

旋转壳边界条件广义表达式*

梅占馨

(西安冶金建筑学院, 1982年1月31日收到)

摘 要

旋转壳的边界条件, 传统的表达方式是在中面位移 u, v, w, ψ 或相应的四个力共八个量当中给定四个. 而以节圆广义位移作为基本未知数, 一个节圆上未知数的数目超过四个^{[1][2][3][4]}. 在这种情况下关于边界条件的处理问题尚无令人满意的解决办法. 本文利用虚功原理, 导出一组壳边广义量与非广义量关系公式. 研究了七种类型常见边界, 给出用广义力与广义位移表示的边界条件公式. 每一种边界条件公式的数目可以和一个节圆上所采用的未知数数目相一致. 有了这些公式, 即可直接将边界条件代入广义位移法运动方程以求解广义位移. 这样做, 避免了文献[2]关于未知数的变换与逆变换过程, 不仅道理上简明而且也简化了计算. 有了边界条件广义表达式, 使得旋转壳广义位移法在理论上也更为完善.

一、低价有限环公式简介

为了说明本文边界条件广义表达式的应用, 这里将作者所建议的低阶有限环公式(节圆广义位移未知数为6个)作一扼要介绍. 这组公式用于求解旋转壳动力问题与高阶有限环^{[2][3][4]}相比, 计算工作量大为减轻而算出的结果甚为接近.

图1代表某种形式的旋转壳. 其母线可以给定方程也可以给定坐标点, 后者可用三次样条插值. 其厚度沿母线变化取线性插值. 面荷载沿母线方向取线性插值, 环向取 M 阶三角级数插值. 设壳中面位移对应于整体坐标系的列向量为

$$\{V\} = \{u, v, w\} \quad (1.1)$$

由于旋转壳在工程振动问题中(如地震、风振等)一般不需要计算其特别高的频率与振型, 作者采用将 $\{V\}$ 沿子午向用三次爱尔米特插值, 沿环向展成 M 阶三角级数. 这样, 一般不必划分许多单元即可满足工程振动计算的需要.

根据壳体理论的变形与位移关系公式, 考虑壳体单位面积上的分布荷载与惯性力, 利用虚功原理, 导出环壳单元环向第 k 谐波(以对称变形为例)的节圆未平衡广义力为

$$\{R_k\} = [K_k^e] \{\alpha_k\} + [M^e] \{\ddot{\alpha}_k\} - \{P_k^e\} \quad (1.2)$$

式中

$$\{\alpha_k\} = \{\alpha_{k1} \ \alpha_{k2} \ \alpha_{k3} \ \alpha_{k4} \ \alpha_{k5} \ \alpha_{k6} \ \alpha_{k7} \ \alpha_{k8} \ \alpha_{k9} \ \alpha_{k10} \ \alpha_{k11} \ \alpha_{k12}\} \quad (1.3)$$

其意义为位移 u, v, w 及其一阶导数 u', v', w' 在单元两端沿环向展成三角级数的第 k 谐波系数.

* 钱伟长推荐.

依次对每个节圆建立平衡条件, 得出整个旋转壳的运动方程为

$$[M]\{\beta\} + [K]\{\beta\} = \{Q\} \quad (1.4)$$

式中, $[K]$ 与 $[M]$ 分别为旋转壳的总刚度矩阵与总质量矩阵(6m阶).

$\{Q\}$ 为各节圆广义荷载所组成的荷载向量. 至于两端边界节圆的未平衡广义力, 可以理解为也包括在 $\{Q\}$ 的相应项当中.

方程(1.4)是m个节圆有6m个方程. 包含有6m个广义位移未知数(在向量 $\{\beta\}$ 中)及两个边界节圆上 $2 \times 6 = 12$ 个未平衡广义力. 所以, 要定解还须由两个边界节圆提供 $2 \times 6 = 12$ 个补充条件.

二、壳边广义量与非广义量关系公式

为节省篇幅, 现将旋转壳边缘力、边缘位移的有关定义式与关系式列表给出(考虑第k谐波对称变形, 但全部下标k均略去).

表1. 旋转壳边缘力、边缘位移的有关定义式与关系式

名 称	表 达 式	说 明
对应于局部坐标系边缘位移向量	$\{u^*\} = [S^4] \{u^{*0}\}$	$\{u^*\} = \{u^* \ v^* \ w^* \ \psi^*\}$ ψ^* ——转角
系数向量	$\{u^{*0}\} = \{u^{*0} \ v^{*0} \ w^{*0} \ \psi^{*0}\}$	
谐波矩阵(对角)	$[S^4] = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta & \cos k\theta & \cos k\theta \\ & & & \end{bmatrix}$	θ ——环向角
对应于整体坐标系边缘位移向量	$\{u\} = [S^4] \{u^*\}$	$\{u\} = \{u \ v \ w \ \psi\}$
系数向量	$\{u^*\} = \{u^* \ v^* \ w^* \ \psi^*\}$	
变换关系	$\{u^{*0}\} = [t] \{u^*\}$	
变换矩阵	$[t] = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	角 φ 见图1
对应于局部坐标系边缘力向量	$\{T_1^*\} = [S^4] \{T_1^{*0}\}$	$\{T_1^*\} = \{T_1^* \ \bar{S}^* \ \bar{Q}_1^* \ M_1^*\}$ 各为子午向力, 环向等效剪力, 等效横向力与弯矩
系数向量	$\{T_1^{*0}\} = \{T_1^{*0} \ \bar{S}^{*0} \ \bar{Q}_1^{*0} \ M_1^{*0}\}$	
对应于整体坐标系边缘力向量	$\{T_1\} = [S^4] \{T_1^*\}$	$\{T_1\} = \{T_1 \ \bar{S} \ \bar{Q}_1 \ M_1\}$
系数向量	$\{T_1^*\} = \{T_1^* \ \bar{S}^* \ \bar{Q}_1^* \ M_1^*\}$	
变换关系	$\{T_1^{*0}\} = [t] \{T_1^*\}$	
边缘广义位移向量	$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6\}$	
边缘广义力向量	$\{R\} = \{R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5 \ R_6\}$	
对应于局部坐标系边缘力虚功	$\delta W_1 = \int_0^{2\pi} \{\delta u^*\}^T \{T_1^*\} r d\theta$	
边缘广义力虚功	$\delta W_2 = \{\delta \alpha\}^T \{R\}$	
虚功原理	$\delta W_1 = \delta W_2$	

从上表所列各表达式可以导出下列结果:

表2. 壳边广义量与非广义量关系公式

名 称	表 达 式	说 明
广义位移表达式 (用局部坐标系位移系数表示)	$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} -u^{*o} \sin \varphi + w^{*o} \cos \varphi \\ v^{*o} \\ u^{*o} \cos \varphi + w^{*o} \sin \varphi \\ -\frac{\partial u^{*o}}{\partial s} \sin \varphi + \frac{\partial w^{*o}}{\partial s} \cos \varphi \\ \frac{\partial v^{*o}}{\partial s} \\ \frac{\partial u^{*o}}{\partial s} \cos \varphi + \frac{\partial w^{*o}}{\partial s} \sin \varphi \end{Bmatrix}$	
广义位移表达式 (用整体坐标系位移系数表示)	$\{\alpha\} = \left\{ u^o \ v^o \ w^o \ \frac{\partial u^o}{\partial s} \ \frac{\partial v^o}{\partial s} \ \frac{\partial w^o}{\partial s} \right\}$	
广义位移与壳边转角系数关系式	$\psi^o = -\alpha_4 \cos \varphi - \alpha_6 \sin \varphi$	
广义力表达式 (用局部坐标系边缘力系数表示)	$\{R\} = \pi r \begin{Bmatrix} -\left(T_1^{*o} + \frac{M_1^{*o}}{R} \right) \sin \varphi + \bar{Q}_1^{*o} \cos \varphi \\ \bar{S}^{*o} \\ \left(T_1^{*o} + \frac{M_1^{*o}}{R} \right) \cos \varphi + \bar{Q}_1^{*o} \sin \varphi \\ -M_1^{*o} \cos \varphi \\ 0 \\ -M_1^{*o} \sin \varphi \end{Bmatrix}$	当谐波号 $k=0$ 时, π 换以 2π , 以下同此。 R —子午线在边缘点的半径
广义力表达式 (用整体坐标系边缘力系数表示)	$\{R\} = \pi r \begin{Bmatrix} T_1^o - \frac{M_1^o}{R} \sin \varphi \\ \bar{S}^o \\ \bar{Q}_1^o + \frac{M_1^o}{R} \cos \varphi \\ -M_1^o \cos \varphi \\ 0 \\ -M_1^o \sin \varphi \end{Bmatrix}$	
壳边广义力的两个已知条件	$R_3 = 0$ $R_4 = R_0 \operatorname{ctg} \varphi$	

三、常见边界条件的广义表达式

边界上给定的四个量可以沿环向进行 M 阶三角级数插值, 根据富里哀系数公式, 则其第 k 谐波系数为已知值. 以下按第 k 谐波系数值给出七种常见边界条件的广义表达式.

表3. 旋转壳七种常见边界条件的广义表达式

	非齐次边界条件		齐次边界条件	
1. 给定位移边界条件	按局部坐标系给定	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u}^{*o} \sin\varphi + \bar{w}^{*o} \cos\varphi \\ \bar{v}^{*o} \\ \bar{u}^{*o} \cos\varphi + \bar{w}^{*o} \sin\varphi \\ -a_4 \operatorname{ctg}\varphi - \frac{\bar{\psi}^{*o}}{\sin\varphi} \end{pmatrix}$	固定边	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_4 \operatorname{ctg}\varphi \end{pmatrix}$
	按整体坐标系给定	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}^o \\ \bar{v}^o \\ \bar{w}^o \\ -a_4 \operatorname{ctg}\varphi - \frac{\bar{\psi}^o}{\sin\varphi} \end{pmatrix}$		
2. 给定力边界条件	按局部坐标系给定	$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \pi r \begin{pmatrix} -(\bar{T}_1^{*o} + \frac{\bar{M}_1^{*o}}{R}) \sin\varphi + \bar{Q}_1^{*o} \cos\varphi \\ \bar{S}^{*o} \\ (\bar{T}_1^{*o} + \frac{\bar{M}_1^{*o}}{R}) \cos\varphi + \bar{Q}_1^{*o} \sin\varphi \\ -\bar{M}_1^{*o} \sin\varphi \end{pmatrix}$	自由边	$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \{0\}$
	按整体坐标系给定	$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \pi r \begin{pmatrix} \bar{T}_1^o + \frac{\bar{M}_1^o}{R} \sin\varphi \\ \bar{S}^o \\ \bar{Q}_1^o + \frac{\bar{M}_1^o}{R} \cos\varphi \\ -\bar{M}_1^o \sin\varphi \end{pmatrix}$		
3. 混合边界条件之一	按局部坐标系给定	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u}^{*o} \sin\varphi + \bar{w}^{*o} \cos\varphi \\ \bar{v}^{*o} \\ \bar{u}^{*o} \cos\varphi + \bar{w}^{*o} \sin\varphi \\ -\pi r \bar{M}_1^{*o} \sin\varphi \end{pmatrix}$	铰支边	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \{0\}$
	按整体坐标系给定	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}^o \\ \bar{v}^o \\ \bar{w}^o \\ -\pi r \bar{M}_1^o \sin\varphi \end{pmatrix}$		
4. 混合边界条件之二	按局部坐标系给定	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ R_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \operatorname{ctg}\varphi - \frac{\bar{u}^{*o}}{\sin\varphi} \\ \bar{v}^{*o} \\ -R_1 \operatorname{ctg}\varphi + \frac{\pi r}{\sin\varphi} \bar{Q}_1^{*o} \\ -\pi r \bar{M}_1^{*o} \sin\varphi \end{pmatrix}$	子午向 简支边	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ R_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \operatorname{ctg}\varphi \\ 0 \\ -R_1 \operatorname{ctg}\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
	按整体坐标系给定	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ R_3 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}^o \\ \bar{v}^o \\ \pi r (\bar{Q}_1^o + \frac{\bar{M}_1^o}{R} \cos\varphi) \\ -\pi r \bar{M}_1^o \sin\varphi \end{pmatrix}$		竖向 简支边

续表

		非齐次边界条件		齐次边界条件
5. 混合边界条件之三	按局部坐标系给定	$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ R_3 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\bar{u}^{*0}}{\sin \varphi} \\ \bar{v}^{*0} \\ -R_1 \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\pi r}{\sin \varphi} \bar{Q}_1^{*0} \\ -\alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\bar{\psi}^{*0}}{\sin \varphi} \end{Bmatrix}$	法向 滑动边	$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ R_3 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \operatorname{ctg} \varphi \\ 0 \\ -R_1 \operatorname{ctg} \varphi \\ -\alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi \end{Bmatrix}$
	按整体坐标系给定	$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ R_3 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}^0 \\ \bar{v}^0 \\ -\frac{R_2}{R} + \pi r \bar{Q}_1^0 \\ -\alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\bar{\psi}^0}{\sin \varphi} \end{Bmatrix}$	横向 滑动边	$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ R_3 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{R_4}{R} \\ -\alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi \end{Bmatrix}$
6. 混合边界条件之四	按局部坐标系给定	$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\bar{u}^{*0}}{\sin \varphi} \\ \pi r \bar{S}^{*0} \\ -R_1 \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\pi r}{\sin \varphi} \bar{Q}_1^{*0} \\ -\alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\bar{\psi}^{*0}}{\sin \varphi} \end{Bmatrix}$	法向环向 滑动边	$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \operatorname{ctg} \varphi \\ 0 \\ -R_1 \operatorname{ctg} \varphi \\ -\alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi \end{Bmatrix}$
	按整体坐标系给定	$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}^0 \\ \pi r \bar{S}^0 \\ -\frac{R_4}{R} + \pi r \bar{Q}_1^0 \\ -\alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\bar{\psi}^0}{\sin \varphi} \end{Bmatrix}$	横向环向 滑动边	$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{R_4}{R} \\ -\alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi \end{Bmatrix}$
7. 弹性支承边界条件	按局部坐标系给定	$\begin{Bmatrix} R_1 - R_3 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{R_6}{R \sin^2 \varphi} \\ R_2 \\ R_3 + R_1 \operatorname{ctg} \varphi \\ R_6 \end{Bmatrix} = -\pi r [k_1^*] \begin{Bmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 \operatorname{ctg} \varphi \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \operatorname{ctg} \varphi \\ (\alpha_6 + \alpha_4 \operatorname{ctg} \varphi) \sin^2 \varphi \end{Bmatrix}$ <p>式中 对角矩阵 $[k_1^*] = [k_1^* \ k_2^* \ k_3^* \ k_4^*]$ 为对应于 $\{u^{*0}\}$ 的弹性支承刚度系数 (与 θ 无关) 即</p> $\{T_1^{*0}\} = -[k_1^*] \{u^{*0}\}$		
	按整体坐标系给定	$\begin{Bmatrix} R_1 - \frac{R_6}{R} \\ R_2 \\ R_3 + \frac{R_4}{R} \\ R_6 \end{Bmatrix} = -\pi r [k_1] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \sin \varphi \cos \varphi + \alpha_6 \sin^2 \varphi \end{Bmatrix}$ <p>式中 对角矩阵 $[k_1] = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$ 为对应于 $\{u^0\}$ 的弹性支承刚度系数</p>		

表中对每种边界条件只写出四个表达式。再加上二个关于边缘广义力的已知条件 $R_5 = 0$ 与 $R_4 = R_6 \operatorname{ctg} \varphi$, 则每个边界节圆有六个补充条件。对于求解基本方程恰好够用。

文献 [2] 与 [3] 在一个节圆上分别采用 8 个与 9 个广义位移作为基本未知数。本文关于边界条件的广义表达式同样适用, 只是还要加上补充条件 $R_7 = R_8 = 0$ 与 $R_7 = R_8 = R_9 = 0$ 。

四、算 例注

设图 1 为一双曲面旋转壳，底部为固定边，顶部为自由边。题目数据如下（取自文献[4]）：

$$\begin{aligned} Z_b &= 350.86\text{ft}, & Z_t &= 98.89\text{ft}, \\ h &= 12.0\text{in}, & R_b &= 182.25\text{ft}, \\ R_a &= 116.5\text{ft}, & R_t &= 123.0\text{ft}, \\ E &= 4 \times 10^6 \text{psi}, & \mu &= 1/6, \\ \rho &= 0.225 \times 10^{-3} \text{lb-sec}^2/\text{in}^4. \end{aligned}$$

用低阶有限环公式与边界条件广义表达式计算其固有频率与振型。计算结果与文献[4]比较见表 4。从表中所列的 15 个频率看，两组结果吻合得很好。相差最多的也只有 0.4% 左右。但须指出，文献[4]算出的频谱中遗漏了 $k=0, j=1$ 的频率与振型（为扭转振动）。两组振型结果也吻合得很好，其比较从略。

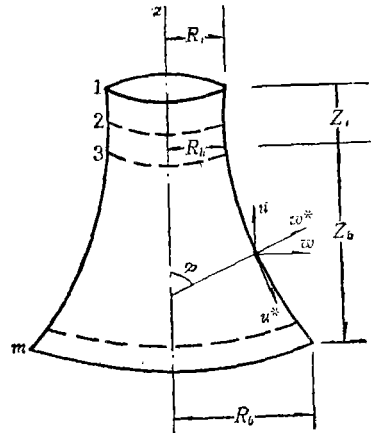


图 1 旋转壳

表 4. 固 有 频 率 (Hz)

谐波号 k	模态号 j	0	1	2	3	4	5	6	文 献
1		5.084	2.705	1.474	1.192	1.103	1.131	1.401	本文
	×		2.709	1.475	1.194	1.104	1.131	1.400	[4]
2		6.551	5.726	3.088	1.670	1.301	1.453	1.572	本文
		6.558	5.752	3.095	1.672	1.302	1.453	1.568	[4]
3		10.16							本文
		10.12							[4]

参 考 文 献

1. 梅占馨, 离散支承旋转壳的动力分析, 固体力学学报, 3, 2(1982).
2. 北京大学固体力学教研室, 旋转壳的应力分析, 水利电力出版社(1979).
3. Chan, A. S. L. and Firman, A., The analysis of cooling towers by the matrix finite element method, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 74, (Part I) (1970), 826-835.
4. Gould, P. L.; Sen, S. K. and Suryoutomo, H., Dynamic analysis of column-supported hyperboloidal shells, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2, (1974) 269-279.
5. Sen, S. K. and Gould, P. H., Hyperboloidal shell on discrete support, *J. of Struct. Div. ASCE*, March (1973).

注：以上例题的电算工作是潘慧兰同志完成的。

Generalized Expressions of Boundary Conditions of Shells of Revolution

Mei Zhan-xin

(Xian Institute of Metallurgy and Construction Engineering, Xian)

Abstract

As for the boundary conditions of shells of revolution, traditionally, four out of the eight quantities which are the four displacements on the middle surface u , v , w and ψ together with the four corresponding forces, are given. When the generalized displacements on the nodal circles are used as basic unknowns, the number of unknowns on a nodal circle is more than four⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾. In this case how to deal with the boundary conditions is still a problem that has not been solved satisfactorily yet. In this paper, the relations between the generalized and nongeneralized quantities of a shell's edge are derived according to the principle of virtual work. Seven types of common edges are studied and their expressions of boundary conditions in the form of generalized displacements or forces are given. The number of expressions of each type of edge may correspond with the number of using unknowns on a nodal circle. With these expressions, boundary conditions can be put directly into equations of motion of generalized displacement method so as to solve the generalized displacements. So doing, the process of transformation and inverse transformation about unknowns in [2] is avoided. Not only the argument is simple and clear, but also the calculation work is reduced. Having the set of generalized expressions of boundary conditions, the generalized displacement method of the shell of revolution may be more perfect in theory.