应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 12_1285_07

求解时滞微分方程组的 Rosenbrock 方法的 GP_稳定性*

丛玉豪, 才佳宁, 项家祥

(上海师范大学 数学系, 上海 200234)

(程昌钧推荐)

摘要: 讨论了求解延时微分方程组的 Rosenbrock 方法的数值稳定性, 分析了求解线性试验方程组的 Rosenbrock 方法的稳定性态, 并证明了数值求解延时微分方程组的 Rosenbrock 方法是 GP_稳定的充分必要条件是 Rosenbrock 方法是 A_稳定的•

关 键 词: 延时微分方程; Rosenbrock 方法; GP_稳定性
中图分类号: O241.8 文献标识码: A

引 言

考察如下延时微分方程的数值解的稳定性态:

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$y(t) = g(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{2}$$

其中 f 和 g 为已知函数, $\tau > 0$ 为常数延时量•

很多学者研究了求解延时微分方程的数值方法的稳定性态• 1988 年, Bellen, Jackiewicz 和 Zennaro[1] 对中立型方程讨论了隐式 Runge_Kutta(IRK) 方法的数值处理; 1990 年, Liu 和 Spijker[2] 研究了 θ_ 方法的渐近稳定性; 1994 年, in' t Hout[3] 研究了求解延时微分方程的 θ_ 方法的数值稳定性; 同年, Koto[4] 得出求解延时微分方程组的 A_稳定的 Runge_Kutta 方法保持其理论解的渐近稳定性; 1995 年, Hu 和 Mitsui[5] 对中立型系统讨论了 Runge_Kutta 方法的数值稳定性, 得到了显式 Runge_Kutta 方法的绝对稳定区域• 这些年, 刘明珠、李寿佛、孙耿、胡广大、张诚坚和黄乘明在数值方法求解延时微分方程的稳定性方面做了很多工作•

在已有的适于求解刚性方程的数值方法中, Rosenbrock 方法是容易实现的• Hairer, *et. al.*[6] 讨论了 Rosenbrock 方法的构造问题; 刘德贵和曹学年等[7] 研究了求解标量延时微分方程的 Rosenbrock 方法的 GP_稳定性, 并证明了 Rosenbrock 方法是 GP_稳定的当且仅当它是 A_稳定的•

本文目的是考察求解时滞微分方程组的 Rosenbrock 方法的 GP_稳定性• 我们将证明

---

* 收稿日期: 2003_04_22; 修订日期: 2004_07_06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171067)
作者简介: 丛玉豪(1965—), 男, 山东人, 教授, 博士(联系人. Tel/Fax: +86_21_64321049; E_mail: yhcong@shnu.edu.cn)•

Rosenbrock 方法是 GP_稳定的当且仅当它是 A_稳定的•

1 理 论 分 析

我们首先考察如下初值问题:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t > t_0, \tag{3}$$

$$y(t_0) = y_0, \tag{4}$$

其中 f 是已知函数, 并且 $y(t)$ 当 $t > t_0$ 时是未知的•

对于初值问题(3)、(4), 我们考察如下 Rosenbrock 方法

$$(\boldsymbol{I} - h\gamma_{ii}\boldsymbol{J})k_i = hf\left(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}k_j\right) + h^2\gamma_i f_t(t_n, y_n) + h\boldsymbol{J}\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}k_j, \tag{5}$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{\nu} b_i k_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, \nu, \tag{6}$$

其中 h 为步长, $t_n = nh$, γ_{ij}, α_{ij}, α_i, γ_i 和 b_i 都是实系数,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}, \quad \gamma_i = \sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij},$$

$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵, $\boldsymbol{J}$ 代表 Jacobi 矩阵 $f_y(t_n, y_n)$, $y_n \sim y(t_n)$, k_i 为级值的近似•

当上述 Rosenbrock 方法应用于如下线性模型方程

$$y'(t) = \lambda y(t), \qquad \lambda \in \mathbf{C},$$

$$y(t_0) = y_0$$

时, 得到

$$(1 - \bar{h}\gamma_{ii})k_i = \bar{h}y_n + \bar{h}\sum_{j=1}^{i-1}(\alpha_{ij} + \gamma_{ij})k_j, \qquad i = 1, 2, \cdots, \nu, \tag{7}$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{\nu} b_i k_i, \tag{8}$$

则 $$(\boldsymbol{I} - \bar{h}\boldsymbol{A})(k_1, k_2, \cdots, k_\nu)^{\mathrm{T}} = \bar{h}y_n\boldsymbol{e},$$

其中 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij} + \gamma_{ij})_{\nu\times\nu}$, $\alpha_{ij} = 0(i \leqslant j)$, $\gamma_{ij} = 0(i < j)$, $\bar{h} = \lambda h$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C}$ 是一个复数集•

将 $(k_1, k_2, \cdots, k_\nu)^{\mathrm{T}}$ 带入(8), 得到

$$y_{n+1} = \varphi(\bar{h})y_n, \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{9}$$

其中 $$\varphi(\bar{h}) = 1 + \bar{h}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I} - \bar{h}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_\nu)^{\mathrm{T}}•$$

定义 1.1[8] 设 $R(q)$ 是关于 q 的函数,

(a) 如果 $\mathrm{Re}(q) < 0 \Rightarrow |R(q)| < 1$, 则称 $R(q)$ 是 A_可接受的;

(b) 如果 $q < 0 \Rightarrow |R(q)| < 1$, 则称 $R(q)$ 是 A_0_可接受的•

定义 1.2 Rosenbrock 方法(5)、(6)是 A_稳定的, 当且仅当 $\varphi(\bar{h})$ 是 A_可接受的•

现在考虑下列延时微分方程组

$$y'(t) = \boldsymbol{L}y(t) + \boldsymbol{M}y(t - \tau), \qquad t \geqslant t_0, \tag{10}$$

$$y(t) = g(t), \qquad t \leqslant t_0, \tag{11}$$

其中 $y(t)$ 代表 d_维未知向量 $(y_1(t), y_2(t), \cdots, y_d(t))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 是 d_维常复数矩阵, $\tau > 0$ 是

常数延时量, $g(t)$ 是已知的连续函数•

将方程(10)、(11) 的指数形式解 $y(t) = \xi\cdot e^{\zeta t}(\xi\in \mathbf{C}^d)$ 代入(10) 得到(10) 的特征方程

$$\det(\zeta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{M}e^{-\zeta\tau}) = 0\cdot \tag{12}$$

如果(12) 的所有解 ζ 有负实部, 则(10) 是渐近稳定的•

引理 1.1[9] 假设(10) 的系数满足

$$\eta(\boldsymbol{L}) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*) < 0, \tag{13}$$

$$\|\boldsymbol{M}\| < -\eta(\boldsymbol{L}), \tag{14}$$

则方程(12) 的所有根都有负实部并且(10) 是渐近稳定的, 即 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$• 这里 $\lambda_{\max}$ 表示一个矩阵的最大特征值, $\boldsymbol{L}^*$ 表示 $\boldsymbol{L}$ 的共轭转置, $-0.5\lambda_{\max}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^*)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{L}$ 实部的最大特征值• 它在本文中扮演一个重要角色•

本引理的证明见[9], 这里我们仍给出其证明以作参考•

证明 设 $\zeta = x + \mathrm{i}y$ 是(12) 的任意解, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{H}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{H}_2$, 其中

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*),\ \boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^*)$$

是 Hermite 矩阵• (12) 成立当且仅当存在向量 $\xi \neq 0$ 使得

$$[\zeta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{M}e^{-\zeta\tau}]\xi = 0\cdot$$

不妨设 $\langle\xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2 = 1$, 作内积得

$$\zeta\langle\xi,\xi\rangle - \langle \boldsymbol{L}\xi,\xi\rangle - \langle \boldsymbol{M}\xi,\xi\rangle e^{-\zeta\tau} = 0,$$

即 $$x + \mathrm{i}y - \langle \boldsymbol{H}_1\xi,\xi\rangle - \mathrm{i}\langle \boldsymbol{H}_2\xi,\xi\rangle = \langle \boldsymbol{M}\xi,\xi\rangle e^{-\zeta\tau}\cdot$$

设 $$\langle \boldsymbol{M}\xi,\xi\rangle = |\langle \boldsymbol{M}\xi,\xi\rangle| e^{-\mathrm{i}\varphi},\qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1},$$

则 $$x - \langle \boldsymbol{H}_1\xi,\xi\rangle = |\langle \boldsymbol{M}\xi,\xi\rangle| \cos(\varphi - y\tau)\cdot e^{-x\tau}\cdot$$

则 $$x - \langle \boldsymbol{H}_1\xi,\xi\rangle \leqslant \|\boldsymbol{M}\| e^{-\tau x}\cdot$$

由 Hermite 矩阵的特征值的极值性质,

$$x - \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*) \leqslant \|\boldsymbol{M}\| e^{-\tau x}\cdot$$

若 $x \geqslant 0$, 则

$$-\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*) \leqslant x - \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*) \leqslant \|\boldsymbol{M}\| e^{-\tau x} \leqslant \|\boldsymbol{M}\|\cdot$$

这与(13)、(14) 矛盾• 引理 1.1 证毕•

2 Rosenbrock 方法的 GP_稳定性

定义 2.1 如果 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 满足(13)、(14), 则数值方法是 P_ 稳定的当且仅当(10) 的数值解 $\{y_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0, \tag{15}$$

其中 $y_n \sim y(t_n)$, $t_n = nh$, $mh = \tau$, $m \geqslant 1$ 是正整数•

定义 2.2 数值方法是 GP_稳定的当且仅当对任意的 $h > 0$, (15) 成立•

对一般的 Rosenbrock 方法, 由 Lagrange 插值, 得到求解延时微分方程组(10)、(11) 的 Rosenbrock 方法

$$(\boldsymbol{I} - h\gamma_{ii}\boldsymbol{J})k_i^{(n)} = hf\left(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}k_j^{(n)},\ y_{n-m+\delta} + \sum_{j=1}^{i}\beta_{ij}k_j^{(n-m+\delta)}\right) +$$

$$h^2\gamma_i f_t(t_n, y_n, y_{n-m+\delta}) + hJ\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}k_j^{(n)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, \nu, \tag{16}$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{\nu} b_i k_i^{(n)}, \tag{17}$$

其中

$$y_{n-m+\delta} = \sum_{q=-r}^{s} L_q(\delta) y_{n-m+q}, \tag{18}$$

$$k_j^{(n-m+\delta)} = \sum_{q=-r}^{s} L_q(\delta) k_j^{(n-m+q)}, \qquad j = 1, 2, \cdots, \nu-1, \tag{19}$$

并且 $L_q(\delta) = \prod_{l=-r,\, l\neq q}^{s}\left(\dfrac{\delta - l}{q-l}\right), \qquad q = -r, -r+1, \cdots, s,$

$h > 0$ 为步长, $t_n = nh$, α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, α_i, γ_i 和 b_i 都是实系数,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}, \quad \gamma_i = \sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij},$$

I 为单位矩阵, J 代表 Jacobi 矩阵 $f_y(t_n, y_n, y_{n-m+\delta})$, $y_n \sim y(t_n)$, $\tau = (m-\delta)h$, $\delta \in [0, 1)$, $m \geqslant s+1$ 为正整数.

将(16)、(17)代入(10)、(11), 得到

$$\begin{cases}(I_{\nu d} - A\otimes L)K_n = (e\otimes L)y_n + (e\otimes M)\displaystyle\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)y_{n-m+q} + \\ \qquad (B\otimes M)\displaystyle\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)K_{n-m+q}, \\ y_{n+1} = y_n + (b^{\mathrm{T}}\otimes I_{\mathrm{d}})K_n,\end{cases} \tag{20}$$

其中 $\otimes$ 代表 Kronecker 内积,

$$K_n = (k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \cdots, k_\nu^{(n)})^{\mathrm{T}}, \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_\nu)^{\mathrm{T}},$$
$$e = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}, \quad L = hL, \quad M = hM.$$
$$A = (\alpha_{ij} + \gamma_{ij})_{\nu\times\nu}, \quad \alpha_{ij} = 0 \quad (i \leqslant j), \quad \gamma_{ij} = 0 \quad (i < j),$$
$$B = (\beta_{ij})_{\nu\times\nu}, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i < j).$$

将(20)记为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} I_{\nu d} - A\otimes L & 0 \\ -b^{\mathrm{T}}\otimes I_{\mathrm{d}} & I_{\mathrm{d}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_n \\ y_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & e\otimes L \\ 0 & I_d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{n-1} \\ y_n\end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix}B\otimes M & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)K_{n-m+q} \\ \displaystyle\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)y_{n-m+q+1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & e\otimes M \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)K_{n-m+q-1} \\ \displaystyle\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)y_{n-m+q}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

则上式的特征方程为

$$\det\left[\begin{pmatrix} I_{\nu d} - A\otimes L & 0 \\ -b^{\mathrm{T}}\otimes I_{\mathrm{d}} & I_{\mathrm{d}}\end{pmatrix}z^{m+1} - \begin{pmatrix}0 & e\otimes L \\ 0 & I_d\end{pmatrix}z^m - \right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}B\otimes M & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q+1} - \begin{pmatrix}0 & e\otimes M \\ 0 & 0\end{pmatrix}\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^q\right] = 0. \tag{22}$$

设

$$T_1(z)=z^{m+1}\Big[\boldsymbol{I}_{vd}-\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{L}-\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{M}\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q-m}\Big],$$

$$T_2(z)=-z^{m}\Big[\boldsymbol{e}\otimes\Big(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q-m}\Big)\Big],$$

$$T_3(z)=-(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_{\mathrm{d}})z^{m+1},\quad T_4(z)=z^{m}(\boldsymbol{I}_d z-\boldsymbol{I}_{\mathrm{d}}),$$

则(22)可记为

$$\det\begin{pmatrix}T_1(z) & T_2(z)\\ T_3(z) & T_4(z)\end{pmatrix}=0. \tag{23}$$

引理 2.1(见甘特马赫:矩阵理论) 如果 $\det[T_1(z)]\neq 0$, 则(23)与

$$\det[T_4(z)-T_3(z)T_1^{-1}(z)T_2(z)]=0$$

等价.

引理 2.2[10] 多项式 $\alpha(z,\delta)=\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q+r}$ 满足

1) $|\alpha(z,\delta)|\leqslant 1,\ (|z|=1,0\leqslant\delta<1)$ 与条件 $r\leqslant s\leqslant r+2$ 等价;

2) 如果 $r+s>0,\ r\leqslant s\leqslant r+2,\ |z|=1,0\leqslant\delta<1$, 则 $|\alpha(z,\delta)|=1$ 当且仅当 $z=1$.

设 $R(z,\delta)=\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q-m}$. 当 $|z|=1$ 时, 由引理 2.2, 得到对于 $\delta\in[0,1)$, $|R(z,\delta)|\leqslant 1$. 当 $z=\infty$ 时, 因为 $m\geqslant s+1$, 有 $|R(\infty,\delta)|=0$. 则由解析函数的最大模原理, 得到对于 $|z|\geqslant 1,\ \delta\in[0,1)$,

$$|R(z,\delta)|\leqslant 1.$$

定理 2.1 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},\ r\leqslant s\leqslant r+2$, 并且 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$ 满足条件(13)、(14), 则求解延时微分方程组(10)、(11)的 Rosenbrock 方法是 GP_稳定的当且仅当(5)、(6)是 A_稳定的.

证明 如果(5)、(6)是 A_稳定的, 我们要证明求解(10)、(11)的 Rosenbrock 方法是 GP_稳定的, 只需证明(23)的所有根满足 $|z|<1$.

假设(23)存在根 z 使得 $|z|\geqslant 1$. 首先证明 $\det[T_1(z)]\neq 0$.

由引理 2.2, 对 $|z|\geqslant 1,\ \delta\in[0,1)$,

$$|R(z,\delta)|\leqslant 1, \tag{24}$$

其中 $R(z,\delta)=\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q-m}$.

由条件(13)、(14), 即

$$\|\boldsymbol{M}\|\leqslant-\lambda_{\max}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{*})/2,$$

则对任意的 $|w|\leqslant 1,\ i=1,2,\dots,d$, 有

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}w))<0, \tag{25}$$

其中 $\lambda_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}w)$ 代表 $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}w$ 的特征值.

由(24)、(25), 得到对于 $|z|\geqslant 1$,

$$\det[T_1(z)]=\prod_{j=1}^{d}\det\Big[\boldsymbol{I}_v-\lambda_j\Big(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q-m}\Big)\boldsymbol{A}\Big]\neq 0.$$

因此由引理 2.2,

$$\det\begin{pmatrix}T_1(z) & T_2(z)\\ T_3(z) & T_4(z)\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\det[T_4(z)-T_3(z)T_1^{-1}(z)T_2(z)]=0,$$

得到

$$\det\left\{z^m\left[(z-1)\boldsymbol{I}_d-(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_{\mathrm{d}})\left[\boldsymbol{I}_{\nu d}-\boldsymbol{A}\otimes\left(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q-m}\right)\right]^{-1}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\left[\boldsymbol{e}\otimes\left(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q-m}\right)\right]\right]\right\}=0.$$

设 $w(z)=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\sum_{q=-r}^{s}L_q(\delta)z^{q-m}$, 则

$$\det\left\{\boldsymbol{I}_d z-[\boldsymbol{I}_d+(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d)(\boldsymbol{I}_{\nu d}-\boldsymbol{A}\otimes w(z))^{-1}(\boldsymbol{e}\otimes w(z))]\right\}=0. \tag{26}$$

将(26)记为

$$\det(z\boldsymbol{I}_d-\varphi(w(z)))=0, \tag{27}$$

其中 $\varphi(w(z))=\boldsymbol{I}_d+(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_{\mathrm{d}})(\boldsymbol{I}_{\nu d}-\boldsymbol{A}\otimes w(z))^{-1}(\boldsymbol{e}\otimes w(z)).$

由谱映射定理, 有

$$\lambda(\varphi(w(z)))=\varphi(\lambda(w(z))). \tag{28}$$

则由(27)、(28), $\mathrm{Re}(\lambda(w(z)))<0$ 和(5)、(6)的A_稳定性, 可得

$$|z|=|\varphi(\lambda(w(z)))|<1.$$

这与假设 $|z|\geqslant 1$ 矛盾. 所以Rosenbrock方法是GP_稳定的.

如果Rosenbrock方法是GP_稳定的, (5)、(6)的A_稳定性是显然的. 定理2.1得证.

特别的, 当 L, M 为标量时, Rosenbrock方法是GP_稳定的当且仅当它是A_稳定的.

注记 本文考虑了求解延时微分方程的数值方法的数值稳定性问题. 众所周知, 在实际的应用领域中, 比如生态学、环境科学、电力工程等领域中许多问题均可归结为延时微分方程. 一般来说, 只有极少数能够获得理论解的解析表达式, 因此, 对这类方程进行数值处理是十分必要的.

[参 考 文 献]

[1] Bellen A, Jackiewicz Z, Zennaro M. Stability analysis of one_step methods for neutral delay_differential equations[J]. *Numerische Mathematik*, 1988, **52**(3): 605—619.

[2] LIU Ming_zhu, Spijker M N. The stability of θ_methods in the numerical solution[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1990, **10**(1): 31—48.

[3] in't Hout K J. The stability of θ_methods for systems of delay differential equations[J]. *Annals of Numerical Mathematics*, 1994, **1**(3): 323—334.

[4] Koto T. A stability property of A_stable natural Runge_Kutta methods for systems of delay differential equations[J]. *BIT*, 1994, **34**(2): 262—267.

[5] HU Guang_da, Mitsui T. Stability of numerical methods for systems of nautral delay differential equations[J]. *BIT*, 1995, **35**(4): 504—515.

[6] Hairer E, Nørsett S P, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations* [M]. New York: Springer_Verlag, 2000, 103—117.

[7] 曹学年, 刘德贵, 李寿佛. 求解延迟微分方程的Rosenbrock方法的渐近稳定性[J]. 系统仿真学报, 2002, **14**(3): 290—292.

[8] Lambert J D. *Computational Methods in Ordinary Differentail Equations* [M]. New York: John_Willy, 1990.

[9] KUANG Jiao_xun, TIAN Hong_jiong. The asymptotic behaviour of theoretical and numerical solutions for nonlinear differential systems with several delay terms[J]. *Journal of Shanghai Teachers University (Natural Sciences)*, 1995, **24**(1): 1—7.

[10] in't Hout K J. A new interpolation procedure for adapting Runge_Kutta methods to delay differential

equations[J]. BIT, 1992, **32**(4): 634—649.
[11] 匡蛟勋. 块 θ 方法的 PL_稳定性[J]. 计算数学, 1997, **15**(2): 135—140.
[12] YANG Biao, QIU Lin, KUANG Jiao_xun. The GPL_stability of Runge_Kutta methods for delay differential systems[J]. J Comput Math, 2000, **18**(1): 75—82.
[13] Huang C M, Li S F, Fu H Y, et al. Stability and error analysis of one_leg methods for nonlinear delay differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, **103**(2): 263—279.
[14] CHEN Li_rong, LIU De_gui. Combined RK_Rosenbrock methods and their stability[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2000, **22**(3): 319—332.
[15] LI Shou_fu. Nonlinear stability of general linear methods[J]. Journal of Computational Mathematics, 1991, **9**(2): 97—104.
[16] Robert Pich . An L_stable Rosenbrock method for step_by_step time integration in structual dynamics [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, **126**(3/4): 343—354.
[17] SUN Geng. A class of single step methods with a large interval of absolute stability[J]. J Comput Math, 1991, **9**(2): 185—193.
[18] Barwell V K. Special stability problems for functional differential equations[J]. BIT, 1975, **15**(2): 130—135.
[19] ZHANG Cheng_jian, ZHOU Shu_zi. Nonlinear stability and D_convergence of Runge_Kutta methods for delay differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, **85**(2): 225—237.

GP_Stability of Rosenbrock Methods for System of Delay Differential Equation

CONG Yu_hao, CAI Jia_ning, XIANG Jia_xiang
(Department of Mathematics, Shanghai Normal University,
Shanghai 200234, P. R. China)

Abstract: The stability analysis of the Rosenbrock method for the numerical solutions of system of delay differential equations was studied. The stability behavior of Rosenbrock method was analyzed for the solutions of linear test equation. The result that the Rosenbrock method is GP_stable if and only if it is A_stable is obtained.

Key words: delay differential equation; Rosenbrock method; GP_stability