应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

四支柱支撑无梁矩形板的弯曲*

李 定 坤

（福州大学，1982年1月6日收到）

摘 要

本文对于四边和四个角点均自由、仅由四根中间支柱支撑的矩形板，在均布载荷作用下的弯曲问题，提供一个解析解．文中对于若干特殊情形，给出了支柱反力和在板的一些点处挠度及弯矩的数值结果．

计算结果表明，本文的方法是有效的．

一、引 言

无梁板在均布载荷作用下的弯曲问题，在土木工程中是颇为重要的．一些作者讨论过这个问题[1]．但是，原有的讨论，或者假定无梁板是无限大，或者考虑由外墙简支（外墙形成板的矩形边界）、并具有若干中间支柱的有限矩形板．

本文讨论没有外墙支撑的有限无梁矩形板，在均布载荷作用下的弯曲．今考虑如图1所示的矩形板．取坐标轴平行于板边，并将原点取在板的中心．板的四边和四个角点都是自由的．这个板由四根中间支柱支撑．支柱分别设在 $(\xi,0)$，$(-\xi,0)$，$(0,\eta)$ 和 $(0,-\eta)$ 处，这里 $0<\xi<a/2$，$0<\eta<b/2$．为了使问题简化，假设柱子的横截面尺寸很小，支柱反力可以看做集中力．

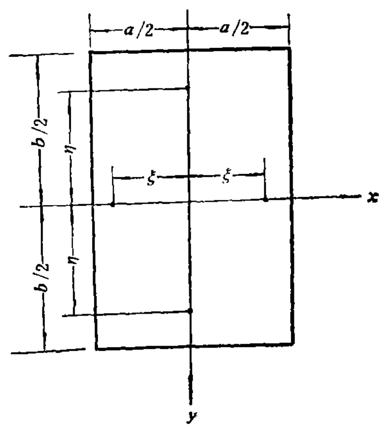

图 1

二、解 的 表 达 式

由于以上所述的无梁板，在结构、受载及支撑诸方面都对称于x轴和对称于y轴，因此，板的挠度曲面应对称于x轴和对称于y轴．在这种情况下，挠度曲面的微分方程是

* 张福范推荐．

$$D\nabla^2\nabla^2 W=q-P_1\delta(x-\xi,y)-P_1\delta(x+\xi,y)-P_2\delta(x,y-\eta)-P_2\delta(x,y+\eta) \tag{2.1}$$

式中q是均布载荷的集度，$\delta(x-x_0,y-y_0)$是二维δ函数[2]，P_1是在$(\xi,0)$处和在$(-\xi,0)$处的支柱反力，P_2是在$(0,\eta)$处和在$(0,-\eta)$处的支柱反力．P_1和P_2是待定的．本问题的边界条件为

$$(M_x)_{x=a/2}=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{x=a/2}=0 \tag{2.2}$$

$$(V_x)_{x=a/2}=-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=a/2}=0 \tag{2.3}$$

$$(M_y)_{y=b/2}=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{y=b/2}=0 \tag{2.4}$$

$$(V_y)_{y=b/2}=-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2}\right]_{y=b/2}=0 \tag{2.5}$$

$$R=2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_{x=a/2,y=b/2}=0 \tag{2.6}$$

支撑处的几何约束条件为

$$(W)_{x=\xi,y=0}=0 \tag{2.7}$$

$$(W)_{x=0,y=\eta}=0 \tag{2.8}$$

在写以上条件时，已经考虑到问题的对称性．如果所求出的解除了满足方程（2.1）和条件(2.2—2.8)以外，还满足对称性条件，那末，它一定也满足没有写出来的边界条件和支撑处的几何约束条件．

为了得到本问题解的表达式，先讨论以下三个问题：

（Ⅰ）　在均布载荷作用下的四边简支矩形板．

挠度的单重级数形式的表达式为[1,4]

$$W_{\rm I}=\frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{1}{m^5}\left(1-\frac{\frac{\alpha_m}{2}\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}+2}{2\,\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a}+\frac{\frac{m\pi y}{a}}{2\,\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\mathrm{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)(-1)^{(m-1)/2}\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{2.9a}$$

或者

$$W_{\rm I}=\frac{4qb^4}{\pi^5 D}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{1}{i^5}\left(1-\frac{\frac{\beta_i}{2}\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}+2}{2\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}\mathrm{ch}\frac{i\pi x}{b}+\frac{\frac{i\pi x}{b}}{2\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}\mathrm{sh}\frac{i\pi x}{b}\right)(-1)^{(i-1)/2}\cos\frac{i\pi y}{b} \tag{2.9b}$$

其中

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{a}, \qquad \beta_i = \frac{i\pi a}{b} \tag{2.10}$$

沿$x=a/2$这边的横向力等于

$$(V_{x1})_{x=a/2} = -\frac{2bq}{\pi^2} \sum_{i=1,3,\cdots} \frac{1}{i^2}\left[(3-\nu)\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2} - (1-\nu)\frac{\frac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\beta_i}{2}}\right] \cdot (-1)^{(i-1)/2}\cos\frac{i\pi y}{b} \tag{2.11}$$

沿$y=b/2$这边的横向力等于

$$(V_{y1})_{y=b/2} = -\frac{2aq}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\cdots} \frac{1}{m^2}\left[(3-\nu)\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2} - (1-\nu)\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right] \cdot (-1)^{(m-1)/2}\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{2.12}$$

作用于角点$(a/2,b/2)$的集中力为

$$R_1 = \frac{4(1-\nu)}{\pi^3} qa^2 \sum_{m=1,3,\cdots} \frac{1}{m^3}\left(\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2} - \frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right) \tag{2.13}$$

板的弯矩表达式为

$$M_{x1} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,\cdots} \frac{1}{m^3}\left[1 - \frac{(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2} + 2}{2\,\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\,\mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a} + \frac{1-\nu}{2\,\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}} \cdot \frac{m\pi y}{a}\,\mathrm{sh}\frac{m\pi y}{a}\right](-1)^{(m-1)/2}\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{2.14}$$

$$M_{y1} = \frac{4qb^2}{\pi^3} \sum_{i=1,3,\cdots} \frac{1}{i^3}\left[1 - \frac{(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2} + 2}{2\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}\,\mathrm{ch}\frac{i\pi x}{b} + \frac{1-\nu}{2\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}} \cdot \frac{i\pi x}{b}\,\mathrm{sh}\frac{i\pi x}{b}\right](-1)^{(i-1)/2}\cos\frac{i\pi y}{b} \tag{2.15}$$

(Ⅱ) 在四个集中力作用下的四边简支矩形板.

考虑一个四边简支的矩形板，在$(\xi,0)$和$(-\xi,0)$两处均承受集中载荷$-P_1$的作用，在$(0,\eta)$和$(0,-\eta)$两处均承受集中载荷$-P_2$的作用，负号表示集中力向上作用．常数P_1和P_2取所考虑无梁板相应的支柱反力的数值．引进无量纲参数

$$\bar{P}_1 = P_1/(qab), \qquad \bar{P}_2 = P_2/(qab) \tag{2.16}$$

在以上四个集中力作用下，矩形板的挠度为

$$W_{\rm I}=-\frac{qa^3b\bar{P}_1}{\pi^3D}\sum_{m=1,3,\cdots}\left[\left(1+\frac{\alpha_m}{2}\text{th}\frac{\alpha_m}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)\text{ch}\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)\right]\frac{\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}}{m^3\text{ch}\frac{\alpha_m}{2}}$$

$$-\frac{qb^3a\bar{P}_2}{\pi^3D}\sum_{i=1,3,\cdots}\left[\left(1+\frac{\beta_i}{2}\text{th}\frac{\beta_i}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\text{ch}\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\right]\frac{\cos\frac{i\pi\eta}{b}\cos\frac{i\pi y}{b}}{i^3\text{ch}\frac{\beta_i}{2}} \tag{2.17}$$

式中的α_m和β_i仍由(2.10)式定义．表达式(2.17)是利用承受单个集中载荷的四边简支矩形板的解[1]，通过迭加得到的．此式仅当不等式$x\geqslant0$和$y\geqslant0$同时成立时有效．由表达式(2.17)我们得到，沿$x=a/2$这边的横向力为

$$(V_{x\rm I})_{x=a/2}=qa\bar{P}_2\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{2+(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}\text{th}\frac{\beta_i}{2}}{\text{ch}\frac{\beta_i}{2}}\cos\frac{i\pi\eta}{b}\cos\frac{i\pi y}{b}$$

$$+8\,qa\bar{P}_1\sum_{i=1,3,\cdots}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{\left(\frac{m}{i}\right)^3+(2-\nu)\left(\frac{m}{i}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2}{i\pi\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}(-1)^{(m-1)/2}$$

$$\cdot\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{i\pi y}{b} \tag{2.18}$$

沿$y=b/2$这边的横向力为

$$(V_{y\rm I})_{y=b/2}=qb\bar{P}_1\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{2+(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}\text{th}\frac{\alpha_m}{2}}{\text{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$+8\,qb\bar{P}_2\sum_{m=1,3,\cdots}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\left(\frac{i}{m}\right)^3+(2-\nu)\left(\frac{i}{m}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^2}{m\pi\left(\frac{i^2}{m^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2}(-1)^{(i-1)/2}$$

$$\cdot\cos\frac{i\pi\eta}{b}\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{2.19}$$

作用在角点$(a/2,b/2)$的集中力为

$$R_{\rm I}=-qb^2\bar{P}_1(1-\nu)\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{m\pi\xi}{a}}{\text{ch}\frac{\alpha_m}{2}}(-1)^{(m-1)/2}\,\text{th}\frac{\alpha_m}{2}$$

$$-qa^2\bar{P}_2(1-\nu)\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{i\pi\eta}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\beta_i}{2}}(-1)^{(i-1)/2}\operatorname{th}\frac{\beta_i}{2} \tag{2.20}$$

扳的弯矩表达式为

$$M_{xI}=\frac{qab\bar{P}_1}{\pi}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}}{m\operatorname{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\left\{\left[(\nu-1)\frac{\alpha_m}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha_m}{2}-1-\nu\right]\right.$$

$$\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)+(1-\nu)\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)\operatorname{ch}\left.\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)\right\}$$

$$+\frac{qab\bar{P}_2}{\pi}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{i\pi\eta}{b}\cos\frac{i\pi y}{b}}{i\operatorname{ch}\frac{\beta_i}{2}}\left\{\left[(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}\operatorname{th}\frac{\beta_i}{2}-1-\nu\right]\operatorname{sh}\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\right.$$

$$+(\nu-1)\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\operatorname{ch}\left.\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\right\} \tag{2.21}$$

$$M_{yI}=\frac{qab\bar{P}_2}{\pi}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{i\pi\eta}{b}\cos\frac{i\pi y}{b}}{i\operatorname{ch}\frac{\beta_i}{2}}\left\{\left[(\nu-1)\frac{\beta_i}{2}\operatorname{th}\frac{\beta_i}{2}-1-\nu\right]\operatorname{sh}\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\right.$$

$$+(1-\nu)\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\operatorname{ch}\left.\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi x}{b}\right)\right\}+\frac{qab\bar{P}_1}{\pi}$$

$$\cdot\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}}{m\operatorname{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\left\{\left[(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha_m}{2}-1-\nu\right]\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)\right.$$

$$+(\nu-1)\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)\operatorname{ch}\left.\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi y}{a}\right)\right\} \tag{2.22}$$

(Ⅱ) 具有广义简支边的矩形板.

考虑以下三种情形：1)一对对边($x=\pm a/2$)广义简支，其他两边简支的矩形板. 沿 $x=\pm a/2$ 这两边的挠度为$(W)_{x=\pm a/2}=-\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{2}{1-\nu}B_i\cos\frac{i\pi y}{b}$；

2)一对对边($y=\pm b/2$)广义简支，其他两边简支的矩形板. 沿$y=\pm b/2$这两边的挠度为

$(W)_{y=\pm b/2}=-\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{2}{1-\nu}A_m\cos\frac{m\pi x}{a}$；

3)$W=k$. 叠加对应于这三种情形板的挠度，我们得到

$$W_{\mathrm{I}}=\sum_{m=1,3,\cdots}A_m\left[\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}-\left(\frac{\alpha_m}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha_m}{2}+\frac{2}{1-\nu}\right)\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right]$$

$$\cdot\frac{\cos\dfrac{m\pi x}{a}}{\mathrm{ch}\dfrac{\alpha_m}{2}}+\sum_{i=1,3,\cdots}B_i\left[\frac{i\pi x}{b}\mathrm{sh}\frac{i\pi x}{b}-\left(\frac{\beta_i}{2}\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{1-\nu}\right)\mathrm{ch}\frac{i\pi x}{b}\right]\frac{\cos\dfrac{i\pi y}{b}}{\mathrm{ch}\dfrac{\beta_i}{2}}+k \tag{2.23}$$

其中A_m，B_i，k为待定常数，α_m和β_i由(2.10)式定义．容易验证，挠度表达式 (2.23) 满足齐次微分方程

$$\nabla^2\nabla^2W=0 \tag{2.24}$$

同时满足沿边界弯矩M_n为零这个条件以及对称性条件．由(2.23)式导出沿 $x=a/2$ 这边的横向力为

$$(V_{x\mathrm{II}})_{x=a/2}=-D\sum_{i=1,3,\cdots}\left[(3+\nu)\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}-\frac{(1-\nu)\dfrac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\beta_i}{2}}\right]\left(\frac{i\pi}{b}\right)^3B_i\cos\frac{i\pi y}{b}$$

$$+\frac{8D(1-\nu)\pi^2}{a^3}\sum_{i=1,3,\cdots}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{(-1)^{(m-1)/2}(-1)^{(i-1)/2}m^3i^3}{\left[i^2+\left(\dfrac{bm}{a}\right)^2\right]^2}A_m\cos\frac{i\pi y}{b} \tag{2.25}$$

沿$y=b/2$这边的横向力为

$$(V_{y\mathrm{II}})_{y=b/2}=-D\sum_{m=1,3,\cdots}\left[(3+\nu)\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}-\frac{(1-\nu)\dfrac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\alpha_m}{2}}\right]\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2A_m\cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$+\frac{8D(1-\nu)\pi^2}{b^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{(-1)^{(i-1)/2}(-1)^{(m-1)/2}i^3m^3}{\left[m^2+\left(\dfrac{ai}{b}\right)^2\right]^2}B_i\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{2.26}$$

作用在角点$(a/2,b/2)$的集中力为

$$R_{\mathrm{II}}=2D\sum_{m=1,3,\cdots}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[(1+\nu)\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}-\frac{(1-\nu)\dfrac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\alpha_m}{2}}\right](-1)^{(m-1)/2}A_m$$

$$+2D\sum_{i=1,3,\cdots}\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2\left[(1+\nu)\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}-\frac{(1-\nu)\dfrac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\beta_i}{2}}\right](-1)^{(i-1)/2}B_i \tag{2.27}$$

板的弯矩表达式为

$$M_{x\mathrm{II}}=\sum_{m=1,3,\cdots}DA_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left\{(1-\nu)\frac{m\pi y}{a}\mathrm{sh}\frac{m\pi y}{a}-\left[(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}+2\right.\right.$$

$$+2\nu\Big]\mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a}\Big\}\frac{\cos\frac{m\pi x}{a}}{\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}+\sum_{i=1,3,\cdots}DB_i\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2\Big\{(\nu-1)\frac{i\pi x}{b}\mathrm{sh}\frac{i\pi x}{b}$$

$$-(\nu-1)\frac{\beta_i}{2}\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}\mathrm{ch}\frac{i\pi x}{b}\Big\}\frac{\cos\frac{i\pi y}{b}}{\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}} \tag{2.28}$$

$$M_{y\mathrm{III}}=\sum_{i=1,3,\cdots}DB_i\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2\Big\{(1-\nu)\frac{i\pi x}{b}\mathrm{sh}\frac{i\pi x}{b}-\Big[(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}+2$$

$$+2\nu\Big]\mathrm{ch}\frac{i\pi x}{b}\Big\}\frac{\cos\frac{i\pi y}{b}}{\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}+\sum_{m=1,3,\cdots}DA_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\Big\{(\nu-1)\frac{m\pi y}{a}\mathrm{sh}\frac{m\pi y}{a}$$

$$-(\nu-1)\frac{\alpha_m}{2}\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}\mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a}\Big\}\frac{\cos\frac{m\pi x}{a}}{\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}} \tag{2.29}$$

对于本文所讨论的无梁矩形板，其挠度表达式可取为

$$W=W_{\mathrm{I}}+W_{\mathrm{II}}+W_{\mathrm{III}} \tag{2.30}$$

这里的W_{I}，W_{II}和W_{III}，分别由式(2.9)，(2.17)和(2.23)表示．相应的弯矩表达式为

$$\begin{aligned}M_x&=M_{x\mathrm{I}}+M_{x\mathrm{II}}+M_{x\mathrm{III}}\\M_y&=M_{y\mathrm{I}}+M_{y\mathrm{II}}+M_{y\mathrm{III}}\end{aligned} \tag{2.31}$$

式中的$M_{x\mathrm{I}}$，$M_{x\mathrm{II}}$和$M_{x\mathrm{III}}$，分别由式(2.14)，(2.21)和(2.28)表示；$M_{y\mathrm{I}}$，$M_{y\mathrm{II}}$和$M_{y\mathrm{III}}$分别由式(2.15)，(2.22)和(2.29)表示．容易看出，挠度表达式(2.30)已经满足微分方程(2.1)和边界条件(2.2)和(2.4)，同时还满足板的挠度曲面对称于x轴和对称于y轴这个条件．表达式(2.30)中的待定常数A_m，B_i，$\bar{P}_1$，$\bar{P}_2$和k必须这样来选择，它们应该使W满足剩下的边界条件和支撑点处的几何约束条件．

三、待定常数的确定

为了加速级数的收敛，我们先将式(2.18)和(2.19)中的双重级数，变换成单重级数形式．为此，利用已知级数[3]

$$\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}}{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}i^2\right)^2}=\frac{\pi^4}{8a^3\left(\frac{i\pi}{b}\right)^3\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}$$

$$\cdot\left[\mathrm{sh}\frac{i\pi\xi}{b}+\frac{\beta_i}{2}\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}\mathrm{sh}\frac{i\pi\xi}{b}-\frac{i\pi\xi}{b}\mathrm{ch}\frac{i\pi\xi}{b}\right]$$

$$(0<\xi<a/2) \tag{3.1}$$

式中β_i由(2.10)式定义．将(3.1)式对ξ求一次微商，得

$$\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi\xi}{a}\right.}{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}i^2\right)^2}=\frac{\pi^4}{8a^3\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}$$

$$\cdot\left[\frac{\beta_i}{2}\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}\mathrm{ch}\frac{i\pi\xi}{b}-\frac{i\pi\xi}{b}\mathrm{sh}\frac{i\pi\xi}{b}\right]\qquad(0<\xi<a/2)\tag{3.2}$$

将(3.2)式对ξ求两阶微商，得

$$\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3\sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi\xi}{2}}{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}i^2\right)^2}=\frac{\pi^4}{8a^3\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\beta_i}{2}\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}-2\right)\mathrm{ch}\frac{i\pi\xi}{b}-\frac{i\pi\xi}{b}\mathrm{sh}\frac{i\pi\xi}{b}\right]\qquad(0<\xi<a/2)\tag{3.3}$$

利用式(3.2)和(3.3)，表达式(2.18)可变换为

$$(V_{x\mathrm{I}})_{x=a/2}=qa\bar{P}_2\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{2+(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}\cos\frac{i\pi\eta}{b}\cos\frac{i\pi y}{b}$$

$$+qa\bar{P}_1\sum_{i=1,3,\cdots}\left[(\nu-1)\frac{i\pi\xi}{b}\mathrm{sh}\frac{i\pi\xi}{b}+2\,\mathrm{ch}\frac{i\pi\xi}{b}\right.$$

$$\left.+(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}\mathrm{ch}\frac{i\pi\xi}{b}\right]\frac{\cos\frac{i\pi y}{b}}{\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}\tag{3.4}$$

采用类似的方法，(2.19)式可变换为

$$(V_{y\mathrm{I}})_{y=b/2}=qb\bar{P}_1\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{2+(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$+qb\bar{P}_2\sum_{m=1,3,\cdots}\left[(\nu-1)\frac{m\pi\eta}{a}\mathrm{sh}\frac{m\pi\eta}{a}+2\mathrm{ch}\frac{m\pi\eta}{a}\right.$$

$$\left.+(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}\mathrm{ch}\frac{m\pi\eta}{a}\right]\frac{\cos\frac{m\pi x}{a}}{\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\tag{3.5}$$

为了要满足沿$x=a/2$这边横向力V_x为零的条件(2.3)，叠加算式(2.11)，(3.4)和(2.25)所表示的横向力，并使它们的和为零．于是得到

$$\frac{8D(1-\nu)\pi^2}{a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{(-1)^{(m-1)/2}(-1)^{(i-1)/2}m^3i^3}{\left[i^2+\left(\frac{bm}{a}\right)^2\right]^2}A_m+D\left(\frac{i\pi}{b}\right)^3B_i$$

$$\cdot\left[\frac{(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\beta_i}{2}}-(3+\nu)\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}\right]+\frac{qa\bar{P}_1}{\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}\left[(\nu-1)\frac{i\pi\xi}{b}\,\mathrm{sh}\frac{i\pi\xi}{b}+2\,\mathrm{ch}\frac{i\pi\xi}{b}\right.$$

$$\left.+(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}\,\mathrm{ch}\frac{i\pi\xi}{b}\right]+\frac{qa\bar{P}_2}{\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}\left[2+(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}\right]\cos\frac{i\pi\eta}{b}$$

$$=\frac{2bq}{\pi^2 i^2}\left[(3-\nu)\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}-(1-\nu)\frac{\frac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\beta_i}{2}}\right](-1)^{(i-1)/2}\qquad (i=1,3,5,\cdots)\tag{3.6}$$

类似地，为了满足$y=b/2$这边横向力V_y为零的条件(2.5)，叠加算式(2.12)，(3.5)和(2.26)所表示的横向力，并使它们的和为零．于是得到

$$\frac{8D(1-\nu)\pi^2}{b^3}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{(-1)^{(i-1)/2}(-1)^{(m-1)/2}i^3m^3}{\left[m^2+\left(\frac{a_i}{b}\right)^2\right]^2}B_i+D\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 A_m$$

$$\cdot\left[\frac{(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}-(3+\nu)\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}\right]+\frac{qb\bar{P}_2}{\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\left[(\nu-1)\frac{m\pi\eta}{a}\,\mathrm{sh}\frac{m\pi\eta}{a}+2\,\mathrm{ch}\frac{m\pi\eta}{a}\right.$$

$$\left.+(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}\,\mathrm{ch}\frac{m\pi\eta}{a}\right]+\frac{qb\bar{P}_1}{\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}\left[2+(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}\right]\cos\frac{m\pi\xi}{a}$$

$$=\frac{2aq}{\pi^2 m^2}\left[(3-\nu)\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}-(1-\nu)\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right](-1)^{(m-1)/2}\qquad (m=1,3,5,\cdots)\tag{3.7}$$

为了满足角点集中力R为零的条件(2.6)，叠加算式(2.13)，(2.20)和(2.27)所表示的集中力，并使它们的和为零．于是得到

$$2D\sum_{m=1,3,\cdots}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[(1+\nu)\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}-\frac{(1-\nu)\frac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right](-1)^{(m-1)/2}A_m$$

$$+2D\sum_{i=1,3,\cdots}\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2\left[(1+\nu)\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}-\frac{(1-\nu)\frac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\beta_i}{2}}\right)(-1)^{(i-1)/2}B_i$$

$$+\bar{P}_1 qb^2(\nu-1)\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{m\pi\xi}{a}}{\mathrm{ch}\frac{\alpha_m}{2}}(-1)^{(m-1)/2}\,\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}$$

$$+\bar{P}_2 qa^2(\nu-1)\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{\cos\frac{i\pi\eta}{b}}{\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}(-1)^{(i-1)/2}\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}$$

$$=\frac{4(\nu-1)}{\pi^3}qa^2\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{1}{m^3}\left(\text{th}\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\text{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right) \tag{3.8}$$

将挠度表达式(2.30)代入约束条件(2.7)和(2.8)，我们得到如下两个方程：

$$\sum_{m=1,3,\cdots}A_m\left[-\left(\frac{\alpha_m}{2}\text{th}\frac{\alpha_m}{2}+\frac{2}{1-\nu}\right)\right]\frac{\cos\frac{m\pi\xi}{a}}{\text{ch}\frac{\alpha_m}{2}}+\sum_{i=1,3,\cdots}B_i\left[\frac{i\pi\xi}{b}\text{sh}\frac{i\pi\xi}{b}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\beta_i}{2}\text{th}\frac{\beta_i}{2}+\frac{2}{1-\nu}\right)\text{ch}\frac{i\pi\xi}{b}\right]\frac{1}{\text{ch}\frac{\beta_i}{2}}+k+\frac{qa^3b\bar{P}_1}{\pi^3D}$$
$$\cdot\sum_{m=1,3,\cdots}\left[\frac{\alpha_m}{2}-\left(1+\frac{\alpha_m}{2}\text{th}\frac{\alpha_m}{2}\right)\text{th}\frac{\alpha_m}{2}\right]\frac{\cos^2\frac{m\pi\xi}{a}}{m^3}+\frac{qb^3a\bar{P}_2}{\pi^3D}$$
$$\cdot\sum_{i=1,3,\cdots}\left[\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi\xi}{b}\right)\text{ch}\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi\xi}{b}\right)-\left(1+\frac{\beta_i}{2}\text{th}\frac{\beta_i}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{\beta_i}{2}-\frac{i\pi\xi}{b}\right)\right]$$
$$\cdot\frac{\cos\frac{i\pi\eta}{b}}{i^3\text{ch}\frac{\beta_i}{2}}=\frac{4qa^4}{\pi^5D}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{1}{m^5}\left(\frac{\frac{\alpha_m}{2}\text{th}\frac{\alpha_m}{2}+2}{2\text{ch}\frac{\alpha_m}{2}}-1\right)(-1)^{(m-1)/2}\cos\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1,3,\cdots}B_i\left[-\left(\frac{\beta_i}{2}\text{th}\frac{\beta_i}{2}+\frac{2}{1-\nu}\right)\right]\frac{\cos\frac{i\pi\eta}{b}}{\text{ch}\frac{\beta_i}{2}}+\sum_{m=1,3,\cdots}A_m\left[\frac{m\pi\eta}{a}\text{sh}\frac{m\pi\eta}{a}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\alpha_m}{2}\text{th}\frac{\alpha_m}{2}+\frac{2}{1-\nu}\right)\text{ch}\frac{m\pi\eta}{a}\right]\frac{1}{\text{ch}\frac{\alpha_m}{2}}+k+\frac{qb^3a\bar{P}_2}{\pi^3D}$$
$$\cdot\sum_{i=1,3,\cdots}\left[\frac{\beta_i}{2}-\left(1+\frac{\beta_i}{2}\text{th}\frac{\beta_i}{2}\right)\text{th}\frac{\beta_i}{2}\right]\frac{\cos^2\frac{i\pi\eta}{b}}{i^3}+\frac{qa^3b\bar{P}_1}{\pi^3D}$$
$$\cdot\sum_{m=1,3,\cdots}\left[\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi\eta}{a}\right)\text{ch}\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi\eta}{a}\right)-\left(1+\frac{\alpha_m}{2}\text{th}\frac{\alpha_m}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{\alpha_m}{2}-\frac{m\pi\eta}{a}\right)\right]$$
$$\cdot\frac{\cos\frac{m\pi\xi}{a}}{m^3\text{ch}\frac{\alpha_m}{2}}=\frac{4qb^4}{\pi^5D}\sum_{i=1,3,\cdots}\frac{1}{i^5}\left(\frac{\frac{\beta_i}{2}\text{th}\frac{\beta_i}{2}+2}{2\text{ch}\frac{\beta_i}{2}}-1\right)(-1)^{(i-1)/2}\cos\frac{i\pi\eta}{b} \tag{3.10}$$

表1. 挠度和弯矩值($\nu=0.3$; $b/a=1$; $2\xi/a=2\eta/b=\alpha$)

α	x/a	$y=0$ $W/\left(\frac{qa^4}{D}\right)$	$y=0$ $M_x/(qa^2)$	$y=0$ $M_y/(qa^2)$	$y=x$ $W/\left(\frac{qa^4}{D}\right)$	$y=x$ $M_x/(qa^2)$
0.999	0	0.00454	0.0428	0.0428	0.00454	0.0428
	0.1	0.00437	0.0429	0.0392	0.00423	0.0396
	0.2	0.00386	0.0423	0.0286	0.00348	0.0325
	0.3	0.00299	0.0389	0.0091	0.00271	0.0256
	0.4	0.00171	0.0308	−0.0287	0.00221	0.0178
	0.5	−0.00001	0	—	0.00196	0
0.95	0	0.00333	0.0369	0.0369	0.00333	0.0369
	0.1	0.00319	0.0365	0.0329	0.00307	0.0328
	0.2	0.00277	0.0356	0.0224	0.00248	0.0263
	0.3	0.00203	0.0308	0.0032	0.00193	0.0210
	0.4	0.00097	0.0164	−0.0346	0.00165	0.0154
	0.5	−0.00033	0	−0.1211	0.00158	0
0.85	0	0.00153	0.0196	0.0196	0.00153	0.0196
	0.1	0.00144	0.0203	0.0165	0.00138	0.0178
	0.2	0.00119	0.0187	0.0055	0.00113	0.0128
	0.3	0.00075	0.0098	−0.0159	0.00109	0.0115
	0.4	0.00015	−0.0308	−0.0722	0.00133	0.0103
	0.5	−0.00039	0	−0.0673	0.00175	0
0.6	0	−0.00072	−0.0229	−0.0229	−0.00072	−0.0229
	0.1	−0.00064	−0.0219	−0.0279	−0.00053	−0.0249
	0.2	−0.00040	−0.0261	−0.0444	0.00023	−0.0203
	0.3	0	—	—	0.00153	−0.0079
	0.4	0.00073	−0.0124	−0.0507	0.00307	−0.0002
	0.5	0.00146	0	−0.0429	0.00469	0

表2. 挠度和弯矩值($\nu=0.3$; $b/a=1.5$; $2\xi/a=2\eta/b=\alpha$)

α	x/a	$y=0$ $W/\left(\frac{qa^4}{D}\right)$	$y=0$ $M_x/(qa^2)$	$y=0$ $M_y/(qa^2)$
0.999	0	0.00942	0.0791	0.0353
	0.1	0.00904	0.0774	0.0303
	0.2	0.00792	0.0724	0.0146
	0.3	0.00605	0.0631	−0.0164
	0.4	0.00343	0.0488	−0.0795
	0.5	−0.00002	0	—
0.95	0	0.00697	0.0686	0.0306
	0.1	0.00665	0.0661	0.0251
	0.2	0.00569	0.0603	0.0098
	0.3	0.00411	0.0485	−0.0203
	0.4	0.00195	0.0241	−0.0818
	0.5	−0.00068	0	−0.2243

续表 2

α	x/a	y=0 $W/(\frac{qa^4}{D})$	y=0 $M_x/(qa^2)$	y=0 $M_y/(qa^2)$
0.85	0	0.00332	0.0398	0.0138
	0.1	0.00311	0.0386	0.0098
	0.2	0.00251	0.0314	−0.0057
	0.3	0.00155	0.0138	−0.0373
	0.4	0.00031	−0.0484	−0.1224
	0.5	−0.00086	0	−0.1165
0.6	0	−0.00113	−0.0302	−0.0202
	0.1	−0.00100	−0.0297	−0.0250
	0.2	−0.00062	−0.0331	−0.0414
	0.3	0	—	—
	0.4	0.00098	−0.0149	−0.0520
	0.5	0.00199	0	−0.0469

表3. 挠度和弯矩值($\nu=0.3$; $b/a=1.5$; $2\xi/a=2\eta/b=\alpha$)

α	x/a	$y/b=x/a$ $W/(\frac{qa^4}{D})$	$y/b=x/a$ $M_x/(qa^2)$	$y/b=x/a$ $M_y/(qa^2)$
0.999	0	0.00942	0.0791	0.0353
	0.1	0.00893	0.0698	0.0381
	0.2	0.00778	0.0469	0.0481
	0.3	0.00649	0.0266	0.0521
	0.4	0.00535	0.0166	0.0374
	0.5	0.00437	0	0
0.95	0	0.00697	0.0686	0.0306
	0.1	0.00657	0.0582	0.0321
	0.2	0.00565	0.0374	0.0415
	0.3	0.00470	0.0213	0.0443
	0.4	0.00394	0.0143	0.0319
	0.5	0.00333	0	0
0.85	0	0.00332	0.0398	0.0138
	0.1	0.00311	0.0329	0.0184
	0.2	0.00274	0.0165	0.0263
	0.3	0.00263	0.0101	0.0265
	0.4	0.00289	0.0093	0.0199
	0.5	0.00335	0	0
0.6	0	−0.00113	−0.0302	−0.0202
	0.1	−0.00082	−0.0370	−0.0206
	0.2	0.00044	−0.0311	−0.0274
	0.3	0.00296	−0.0107	−0.0206
	0.4	0.00621	−0.0017	−0.0034
	0.5	0.00966	0	0

表4. 挠度和弯矩值($\nu=0.3$; $b/a=1.5$; $2\xi/a=2\eta/b=\alpha$)

α	y/b	$x=0$ $W/(\frac{qa^4}{D})$	$x=0$ $M_x/(qa^2)$	$x=0$ $M_y/(qa^2)$
0.999	0	0.00942	0.0791	0.0353
	0.1	0.00926	0.0717	0.0417
	0.2	0.00858	0.0530	0.0536
	0.3	0.00699	0.0248	0.0579
	0.4	0.00417	−0.0239	0.0475
	0.5	−0.00003	—	0
0.95	0	0.00697	0.0686	0.0306
	0.1	0.00684	0.0608	0.0361
	0.2	0.00626	0.0428	0.0472
	0.3	0.00487	0.0150	0.0488
	0.4	0.00243	−0.0349	0.0295
	0.5	−0.00084	−0.1491	0
0.85	0	0.00332	0.0398	0.0138
	0.1	0.00326	0.0338	0.0207
	0.2	0.00292	0.0155	0.0290
	0.3	0.00198	−0.0162	0.0220
	0.4	0.00041	−0.0983	−0.0394
	0.5	−0.00104	−0.0878	0
0.6	0	−0.00113	−0.0302	−0.0202
	0.1	−0.00101	−0.0399	−0.0185
	0.2	−0.00070	−0.0725	−0.0326
	0.3	0	—	—
	0.4	0.00210	−0.0812	−0.0201
	0.5	0.00424	−0.0627	0

表5. 支柱的支撑反力值($\nu=0.3$; $2\xi/a=2\eta/b=\alpha$)

b/a	α	$P_1/(qab)$	$P_2/(qab)$	$2(P_1+P_2)/(qab)$	相对误差
1	0.999	0.25003	0.25003	1.00012	0.012%
	0.95	0.24899	0.24899	0.99596	0.404%
	0.85	0.24926	0.24926	0.99704	0.296%
	0.6	0.24980	0.24980	0.9992	0.08%
1.5	0.999	0.27997	0.21714	0.99422	0.578%
	0.95	0.27123	0.22484	0.99214	0.786%
	0.85	0.24992	0.24937	0.99858	0.142%
	0.6	0.14992	0.35583	1.0115	1.15%

将方程(3.6—3.10)联立起来，便可以确定未知量A_m，B_i，$\bar{P}_1$，$\bar{P}_2$和k.

四、计 算 结 果 与 讨 论

计算时，设$\nu=0.3$，A_m和B_i各取50个未知量，加上$\bar{P}_1$，$\bar{P}_2$和k，方程组的阶数为103. 对

于支柱位置，考虑无量纲参数 $\alpha=2\xi/a=2\eta/b=0.999$，0.95，0.85，0.6 等四种情形．正方形板的挠度和弯矩值列在表 1 里．对于 $b/a=1.5$ 的矩形板，其挠度和弯矩值列在表 2—4 里．

计算结果表明，A_m和B_i的绝对值，分别随着m和i的增加而迅速减少．例如对于$b/a=1.5$，$\alpha=0.6$的情形，$A_1=0.183\times10^{-2}$，$B_1=0.256\times10^{-2}$，而$A_{99}=0.455\times10^{-11}$，$B_{99}=0.513\times10^{-11}$．由此可见，相应的级数收敛很快．

各种情形支柱反力的值列在表 5 里．从表 5 可以看出，对于每一种情况，支柱反力的总和与总的载荷都符合得很好．

参 考 文 献

1. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.,《板壳理论》,(中译本), 科学出版社(1977).
2. 胡海昌,《弹性力学的变分原理及其应用》, 科学出版社(1981).
3. 张福范,《弹性薄板》, 科学出版社(1964).
4. 张福范, 均布荷载下悬臂矩形板的弯曲, 应用数学和力学, 3, 3(1980).

Bending of Rectangular Flat Slabs Supported by Four Columns

Li Ding-kun

(Fuzhou University, Fuzhou)

Abstract

In this paper an analytical solution is proposed for the bending of uniformly loaded rectangular plates supported only by four intermediate columns, the edges and corners of which are all free. For several particular cases, the numerical results, which contain the column reaction and the values for the deflection and the bending moments at several points of the plate, are given.

Calculations indicate that the method proposed in this paper is valid.