应用数学和力学，第3卷第4期（1982年7月）
(Applied Mathematics and Mechanics)

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

定常围压作用时平面应变理想塑性体Mises屈伏条件的精确解*

范 家 参

（昆明云南省地震局，1980年9月23日收到）

摘 要

把应力函数引入平面问题的Mises屈状条件后那个二阶非线性偏微分方程分解为两个二阶线性偏微分方程，用柯西积分公式求出这两个方程右端的已知函数，然后解这个方程，由此定出弹塑性区域的分界线和求出塑性区内的各应力分量，给出一个例题说明本文方法的应用．

一、一 般 原 理

平面应变理想塑性体的 Mises 屈伏条件是[1]：

直角坐标：
$$\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2=k^2 \tag{1.1}$$

极坐标：
$$\frac{1}{4}(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+\tau_{r\theta}^2=k^2 \tag{1.1$'$}$$

在此 σ_x、σ_y、σ_r、σ_θ 为相应坐标方向的正应力．τ_{xy}、$\tau_{r\theta}$ 为相应坐标系的剪应力．k 是单剪时的屈服强度．

令 $\psi(x,y)$ 或 $\psi(r,\theta)$ 为应力函数，其定义为：

直角坐标：
$$\sigma_x=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \tag{1.2}$$

极坐标：
$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2},\quad \sigma_\theta=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2},\quad \tau_{r\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} \tag{1.2$'$}$$

以下以直角坐标系的公式进行推演，必要时再引入极坐标系公式．代(1.2)入(1.1)得：

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2=4k^2 \tag{1.3}$$

引入新变数 ξ 及 η，其定义是：

$$\xi=\sqrt{2k}\,x,\quad \eta=\sqrt{2k}\,y \tag{1.4}$$

则(1.3)式成为：

* 钱伟长推荐．

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2=1 \tag{1.5}$$

把(1.5)式分解为下面两个线性方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)=\alpha(\xi,\eta)\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-2i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)=\frac{1}{\alpha(\xi,\eta)}\end{aligned}\right\} \tag{1.5$'$}$$

在(1.5)′式中右端$\alpha(\xi,\eta)$为某一不取零值的复变函数．后面我们要证明：如果物体上作用的外力是定常围压，则$\alpha(\xi,\eta)$是满足柯西-黎曼条件的解析函数．

由于(1.5)′式左端上下两式是互为共轭的复变函数，故其右端亦必如此．

$$\therefore\quad \frac{1}{\alpha(\xi,\eta)}=\bar{\alpha}(\xi,\eta) \tag{1.6}$$

即$\bar{\alpha}(\xi,\eta)$是$\alpha(\xi,\eta)$的共轭复变函数，因此必有一实函数$\phi(\xi,\eta)$存在，使得：

$$\bar{\alpha}(\xi,\eta)=e^{-i\phi(\xi,\eta)}=\cos\phi(\xi,\eta)-i\sin\phi(\xi,\eta) \tag{1.7}$$

则(1.5)′化为实函数形式的方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}=\cos\phi(\xi,\eta)\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{2}\sin\phi(\xi,\eta)\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

(1.8)式是两个最简单的线性双曲线型偏微分方程，它完全等价于非线性的屈伏条件(1.3)式．一旦$\sin\phi$及$\cos\phi$已知，则(1.8)式易于求解．

令$z=\xi+i\eta$为复变数，以z'表z在边界之值．如果$\alpha(\xi,\eta)=\alpha(z)$是解析函数，则可以应用柯西积分公式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\alpha(z')}{z'-z}dz'=\alpha(z)\quad(z\in S^+\text{即内域}) \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\alpha(z')}{z'-z}dz'=-\alpha(z)+\alpha(\infty)\quad(z\in S^-\text{即外域}) \tag{1.9$'$}$$

以上两式中L表示边界线围道．易知：

$$\alpha(z')=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2i\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)_L=\frac{1}{2k}(\sigma_x-\sigma_y-2i\tau_{xy})_L \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\alpha(z')&=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+2i\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\right)\right]_L\\&=\frac{1}{2k}(\sigma_r-\sigma_\theta-2i\tau_{r\theta})_L\end{aligned} \tag{1.10$'$}$$

如果已知边界线上作用的外力σ_x、σ_y、τ_{xy}或σ_r、σ_θ、$\tau_{r\theta}$之值，则$\alpha(z')$已知，由(1.9)或(1.9)′可求得域中之$\alpha(z)$，从而(1.8)式右端函数为已知．

假定$\alpha(z)$为解析函数，则其实部与虚部必须满足柯西-黎曼条件，即要求：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right) \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\right) \tag{1.12}$$

化简为：

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\nabla^2\psi=0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\psi=0 \tag{1.14}$$

等价于：

$$\nabla^2\psi=M\ (\text{常数}) \tag{1.15}$$

但是：

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\frac{1}{2k}(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{1}{2k}(\sigma_r+\sigma_\theta)=\frac{1}{2k}(\sigma_{\max}+\sigma_{\min}) \tag{1.15$'$}$$

易知$\sigma_x+\sigma_y$，$\sigma_r+\sigma_\theta$，$\sigma_{\max}+\sigma_{\min}$都是平面问题中的第一应力不变量，只要物体边界上作用的外力为定常围压，则(1.15)或(1.15)′的条件即满足．此时不但$\alpha(z)$是解析函数，而且弹性区域与塑性区域的应力函数协调条件也满足了，因为在弹性区域内应力函数ψ是重调和函数[2]，即：

$$\nabla^2\nabla^2\psi=0 \tag{1.16}$$

因此凡是满足塑性区域内应力函数条件(1.15)的，必然满足(1.16)式．文献[1]虽然在其205页说到："容易证明ψ，也是一个重调和函数．"但是那里并没有真正给出塑性区域内的应力函数ψ是重调和函数的证明，而本文则证明了这个命题，并由此可决定弹塑性区域的分界线．

二、一 个 算 例

此例题取自文献[1]第7章§30，我们的目的是以此说明本文的方法，又可以和已知的成果进行比较．

图1所示为一正方形柱体的某一截面，其中有一半径为ρ的圆孔．此柱体相对的两侧面上承受随时间t增长的均匀分布拉力作用，其拉力比值为常数比$A:B$，初始状态为$t=0$．圆孔表面不受外力作用．此柱体是平面应变状态．

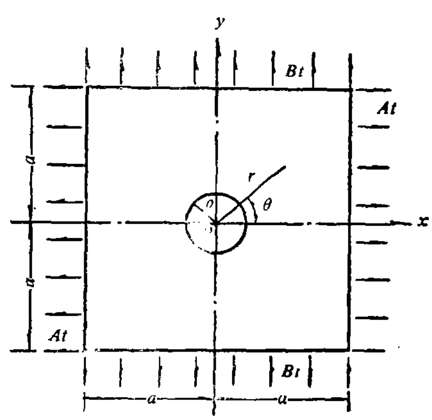

图 1

在圆孔周围的应力分量是：

$\sigma_r|_{r=\rho}=0, \tau_{r\theta}|_{r=\rho}=0$，$\sigma_\theta|_{r=\rho}=2k$（规定拉应力为正）自某一时刻以后，塑性区域即自圆孔周围向外发展．文献[1]204页已提到："我们讨论在某一固定瞬时的应力分布时认为圆孔

周围被一塑性圆环围绕.”这里已明确指出塑性区是以圆孔的同心圆形式向外扩展，故 z 位于圆孔的外域中．应用柯西积分公式(1.9)′并考虑圆孔边的应力分量之值得到：

$$\frac{1}{2k}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2k}{z'-z}dz'\right\}=-1+\alpha(\infty) \tag{2.1}$$

在无穷远处应力分量为零，故必须 $\alpha(\infty)=0$.

$$\therefore\quad \cos\phi(\xi,\eta)=-1,\ \sin\phi(\xi,\eta)=0$$

现在把(1.8)式写成极坐标形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=2k\\&\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

由(2.2)第二式得到：

$$\psi(r,\theta)=F_1(r)+rF_2(\theta) \tag{2.3}$$

在(2.3)式中 $F_1(r)$ 和 $F_2(\theta)$ 都是其相应自变量的待定函数．代(2.3)入(2.2)第一式而得：

$$\frac{d^2F_1(r)}{dr^2}-\frac{1}{r}\left[\frac{dF_1(r)}{dr}+F_2(\theta)\right]-\frac{1}{r}\frac{d^2F_2(\theta)}{d\theta^2}=2k$$

分离变量后，得到与上式相当的两个常微分方程式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2F_2(\theta)}{d\theta^2}+F_2(\theta)=\lambda\\&\frac{d^2F_1(r)}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dF_1(r)}{dr}+2k=\frac{\lambda}{r}\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

在(2.4)式中 λ 为待定常数．由(2.4)第一式得出其解为：

$$F_2(\theta)=C_1\cos\theta+C_2\sin\theta+\lambda\qquad(\text{因 } F_2(\theta) \text{ 为周期函数，必有 } \lambda=0) \tag{2.5}$$

(2.5)式中的 C_1 及 C_2 为待定积分常数．改写(2.4)式第二式为：

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dF_1(r)}{dr}\right]=2k,\quad\therefore\quad F_1(r)=kr^2\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)+\frac{C_3}{2}r^2+C_4 \tag{2.6}$$

代(2.5)及(2.6)入(2.3)而得：

$$\psi(r,\theta)=kr^2\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)+\frac{C_3}{2}r^2+C_4+r(C_1\cos\theta+C_2\sin\theta) \tag{2.7}$$

把(2.7)式代入圆孔周围的已知应力条件有：

$$\tau_{r\theta}|_{r=\rho}=0:\quad 0=0$$

$$\sigma_r|_{r=\rho}=0:\quad \left[\frac{dF_1(r)}{dr}+F_2(\theta)+\frac{d^2F_2(\theta)}{d\theta^2}\right]_{r=\rho}=0,\ C_3=-2k\ln\rho$$

$$\sigma_\theta|_{r=\rho}=2k:\quad \left.\frac{d^2F_1(r)}{dr^2}\right|_{r=\rho}=2k,\ C_3=-2k\ln\rho$$

我们知道：$rF_2(\theta)=C_1r\cos\theta+C_2r\sin\theta=C_1x+C_2y$，故 $rF_2(\theta)$ 构成直角坐标中的线性应力函数．由(1.2)式可知 $rF_2(\theta)$ 构成的应力函数在物体上每一点产生的 σ_x，σ_y，τ_{xy} 均为零．根据坐标变换的应力分量表达式可知，在极坐标系中 $rF_2(\theta)$ 产生的应力分量 σ_r，σ_θ，$\tau_{r\theta}$ 也均

为零．故可略去这一部份应力函数而置 $C_1=C_2=0$．最后要求 $\psi(r)|_{r=\rho}=f(t)$ 和 $\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=\rho}=0$．

$$C_4=f(t)+\frac{k}{2}\rho^2$$

$$\therefore\quad \psi(r)=f(t)+k\left(r^2\ln\frac{r}{\rho}-\frac{r^2}{2}+\frac{\rho^2}{2}\right)\tag{2.8}$$

需要指出，(2.8)式中的 $f(t)$ 是以时间参数 t 为自变量的函数，在文献[1]及本文中只涉及坐标变数 x，y 或 r，θ，故 $f(t)$ 当做积分常数对待．

本文(2.8)式与文献[1]的(30.8)式完全一样，但本文是系统地解出(1.3)式的极坐标形式这个非线性偏微分方程，而文献[1]只简单提到："应力分量 σ_r，σ_θ，$\tau_{r\theta}$ 与 θ 无关，因为边界条件与 θ 无关．故得出应力函数为(30.8)式．"

下面求此问题的弹塑性区域的分界线．图1所示的有孔正方形体，在弹性区域内的应力分量为[2][3]：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(e)}&=\frac{q_1+q_2}{2}\left(1-\frac{\rho^2}{r^2}\right)+\frac{q_1-q_2}{2}\cos2\theta\left(1-4\frac{\rho^2}{r^2}+3\frac{\rho^4}{r^4}\right)\\
\sigma_\theta^{(e)}&=\frac{q_1+q_2}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)+\frac{q_1-q_2}{2}\cos2\theta\left(1+3\frac{\rho^4}{r^4}\right)\\
\tau_{r\theta}^{(e)}&=-\frac{q_1-q_2}{2}\sin2\theta\left(1+2\frac{\rho^2}{r^2}-3\frac{\rho^4}{r^4}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

在(2.9)式中 q_1 及 q_2 分别表示 x 及 y 方向作用的均匀分布拉力．我们考虑某一固定时刻 $t=c$ 时的情况，这时 $q_1=Ac$，$q_2=Bc$．

当 $t=c$ 时由(2.8)式求得塑性区域内的应力分量为：

$$\sigma_r^{(p)}=2k\ln\frac{r}{\rho},\quad \sigma_\theta^{(p)}=2k\left(\ln\frac{r}{\rho}+1\right),\quad \tau_{r\theta}^{(p)}=0\tag{2.10}$$

各应力分量在弹塑性区域分界线上之值应连续，即(2.9)与(2.10)式相同应力分量之值在分界线上应相等．此外分界线还是塑性区域，就应该满足本文的(1.15)式，故由(2.10)式得出分界线方程为：

$$\frac{1}{2k}(\sigma_r+\sigma_\theta)_\Gamma=2\ln\frac{r}{\rho}+1=M,\quad\therefore\quad r=\rho e^{1/2(M-1)}\tag{2.11}$$

在(2.11)式中，$M>1$ 为某个待定常数．把在弹塑性区域分界线 Γ 上 $\frac{\rho}{r}=e^{-1/2(M-1)}$ 代入(2.9)第三式，当 $q_1\neq q_2$ 时有 $\sin2\theta=0$，故 $\theta=\frac{n\pi}{2}(n=0,1,2,3,\cdots)$，但 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi,\cdots$ 时 $\cos2\theta$ 为 -1 而不合题意，故有：

$$\theta=n\pi\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{2.12}$$

$\cos2n\pi=1$，以此代入(2.9)式，则在分界线 Γ 上有：

$$\frac{(A+B)c}{2}\left[1-e^{(1-M)}\right]-\frac{(B-A)c}{2}\left[1-4e^{(1-M)}+3e^{2(1-M)}\right]=k(M-1)\tag{2.13}$$

$$\frac{(A+B)c}{2}[1+e^{(1-M)}]-\frac{(B-A)c}{2}[1+3e^{2(1-M)}]=k(M+1) \qquad (2.14)$$

由(2.13)及(2.14)两式求出常数 M 及 c，则(2.11)式定出弹塑性区域分界线 Γ 来，而 Γ 是在圆孔以外的一个同心圆，就符合文献[1]204页所说过的情况．但是文献[1]第七章31节提到用保角变换的方法处理了本文图1的例题，在那里忽略了圆孔的作用而把正方板当作无限大板，那里得到的弹塑性区域的分界线是一个椭圆：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{\alpha^2(1+\gamma)^2}+\frac{y^2}{\alpha^2(1-\gamma)^2}=1\\&\alpha=e^{\left[\frac{(A+B)c}{4k}-\frac{1}{2}\right]},\ \gamma=\frac{c(B-A)}{2k}\end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

但是：

$$\alpha=1+\left[\frac{(A+B)c}{4k}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2!}\left[\frac{(A+B)c}{4k}-\frac{1}{2}\right]^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left[\frac{(A+B)c}{4k}-\frac{1}{2}\right]^n+\cdots$$

$$\therefore\quad \alpha>\gamma$$

故(2.15)式代表的椭圆与圆接近，特别当 $B=A$ 时是圆．(2.15)式是忽略了圆孔的存在，只考虑 $B\neq A$ 即 x 与 y 方向作用的拉力不等而产生的作用才会出现椭圆分界线．如果考虑圆孔存在，围绕圆孔周围塑性区域的应力分布是极坐标中轴对称形式，则弹塑性区域分界线就应当是圆，如本文的结果那样．

三、结 束 语

塑性力学本身是非线性的，本文就围压是定常的情况把问题线性化而易于求解应力及弹塑性区域分界线，算是一个新探索，进一步非定常围压情况，可以定常围压为初始解进行摄动法逼近，以后再谈．作者感谢钱伟长教授的鼓励和支持．

参 考 文 献

1. Prager, William and Hodge, Philip G., *The Theory of Perfectly Plastic Solids*,(1951).
2. 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，(1956)，207.
3. 徐芝纶，《弹性理论》，人民教育出版社，(1960)，92—93.

The Exact Solutions of von Mises Yielding Criterion for Ideally Plastic Body under Uniform Pressure in Case of Plane Strain

Fan Ja-shen

(The Seismologic Bureau of Yunnan Province, Kunming)

Abstract

This problem is solved by dividing the quadratic yielding criterion into two linear partial differential equations. With the help of Cauchy's integral, these two linear equations can easily be solved. An example is given to show the calculation of the stress components in the plastic domain and the determination of the equation of the boundary line between the plastic and elastic domains.