

部分埋入水中悬臂圆柱体的 弯曲自由振动*

张 悉 德

(山东化工学院, 1980年12月14日收到)

摘 要

本文作者讨论了部份埋入水中悬臂圆柱体的弯曲自由振动, 给出了柱水偶联体系振型函数的精确解和以行列式表示的频率方程. 指出了水的效应等价一个附加分布质量, 因此, 水中柱体振动频率低于无水时柱体振动频率.

一、引 言

由于工业发展的需要, 从三十年代开始人们就对水中柱体的振动问题进行了研究, 直到六十年代发表了不少论文^{[1][2][3][4][5]}. 在上述所有工作中均假定水深与柱高相等, 或用水振型函数(本征函数)代替有水振型函数, 或以无水振型函数为基函数将有水振型函数展开成无穷级数. 作者与其他同志合作曾对水中柱体的剪切振动进行了研究^[6], 研究成果已应用到我国大三线建设中. 在本文中, 作者对水深与柱高不相等弯曲振动的一般情形进行讨论, 给出了有水振型函数的精确解和以行列式表示的频率方程. 尽管数学形式颇为复杂, 但在电子计算机广泛应用的今天, 进行数值计算是不困难的. 本文只限于理论上分析, 数值计算和模型试验待以后进行.

二、速度场势函数 $\phi(r, \theta, z, t)$ 的确定

假定圆柱体一端固定, 另一端自由(图1), 其高度为 H , 半径为 a , 水深为 $h(H > h)$. 假定水是理想的不可压缩的不粘流体, 运动是无旋的, 忽略表面波动. 采用柱坐标进行分析.

若柱体沿 y 方向振动, 水被扰动, 任一点的运动速度为 $\vec{v}(r, \theta, z, t)$, 根据假定则有:

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

于是存在一个速度势函数 $\phi(r, \theta, z, t)$, 使

$$\vec{v}(r, \theta, z, t) = \text{grad } \phi(r, \theta, z, t) \quad (2.2)$$

* 钱伟长推荐.

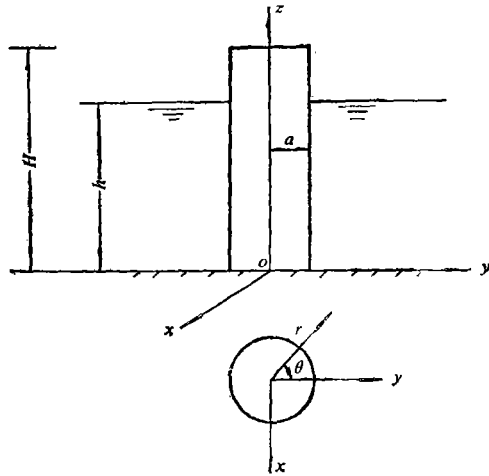


图 1

又因水不可压缩, 故其连续性方程为:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (2.3)$$

从而有

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(r, \theta, z, t) = 0$$

即

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.4)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

为柱坐标的 Laplace 算子.

$\phi(r, \theta, z, t)$ 应满足的边界条件为:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\phi|_{z=H} = 0 \quad (2.5b)$$

$$\phi|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.5c)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{\partial y}{\partial t} \cos \theta \quad (2.5d)$$

其中 $y = y(z, t)$, 为柱体沿 y 方向的位移. 因此, 流场速度势函数 $\phi(r, \theta, z, t)$ 的确定归结为定解问题 (2.4)、(2.5).

$$\text{令 } \phi(r, \theta, z, t) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)\dot{T}(t) \quad (2.6)$$

其中 $\dot{T}(t) = \frac{dT}{dt}$.

代入 (2.4) 式, 得三个常微分方程:

$$Z''(z) + m^2 Z(z) = 0 \quad (2.7)$$

$$\Theta''(\theta) + n^2 \Theta(\theta) = 0 \quad (2.8)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) - \left(m^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) R(r) = 0 \quad (2.9)$$

其中 m, n 为分离变量引进的待定常数, 方程(2.9)为修正的 Bessel 方程. 上述三方程的解分别为

$$Z(z) = A_1 \cos mz + A_2 \sin mz$$

$$\Theta(\theta) = B_1 \cos n\theta + B_2 \sin n\theta$$

$$R(r) = C_1 I_n(mr) + C_2 K_n(mr)$$

其中 $A, B, C (i=1, 2)$ 为常数, $I_n(mr)$ 和 $K_n(mr)$ 分别为 n 阶第一类和第二类修正 Bessel 函数.

由边界条件(2.5a)、(2.5b)可得

$$Z_s(z) = A_s \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} z \quad (s=1, 2, 3, \dots)$$

由边界条件(2.5c)可得

$$m = \frac{(2s-1)\pi}{2h}$$

$$R_n(r) = C_n K_n \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} r \right)$$

因为解关于 θ 是周期的, 故 n 应为整数. 由此, 得到

$$\phi(r, \theta, z, t) = \dot{T}(t) \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} r \right) \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} z [A_{sn} \cos n\theta + B_{sn} \sin n\theta]$$

利用边界条件(2.5d), 即边界上的连续条件

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{\partial y}{\partial t} \cos \theta$$

而 $y(z, t) = Y(z)T(t)$, 从而得

$$Y(z) \cos \theta = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2s-1)\pi}{2h} \dot{K}_n \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} a \right) \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} z [A_{sn} \cos n\theta + B_{sn} \sin n\theta]$$

利用三角函数系的正交性条件, 得

$$A_{sn} = 0, \quad (n \neq 1)$$

$$B_{sn} = 0$$

$$A_{s1} = \frac{4}{\pi(2s-1)} \frac{1}{\dot{K}_1 \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} a \right)} \int_0^h Y(\xi) \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi d\xi$$

于是

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) = \dot{T}(t) \frac{4 \cos \theta}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K_1 \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} r \right)}{(2s-1) \dot{K}_1 \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} a \right)} \\ \cdot \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} z \int_0^h Y(\xi) \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi d\xi \end{aligned} \quad (2.10)$$

三、柱体振动方程的建立

由(2.10)式, 不难确定沿柱体单位高度上水动压力的合力在 y 轴方向的投影为:

$$\begin{aligned} p|_{r=a} &= -\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=a} a \cos \theta d\theta \\ &= -4a\rho \ddot{T}(t) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)}{(2s-1)\dot{K}_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)} \\ &\quad \cdot \cos\frac{(2s-1)\pi}{2h} z \int_0^h Y(\xi) \cos\frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi d\xi \end{aligned}$$

其中 ρ 为水的密度. 从而可得 $0-h$ 段柱体弯曲振动方程为:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho_1 F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - p|_{r=a}$$

即

$$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= -\rho_1 F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4a\rho \ddot{T}(t) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)}{(2s-1)\dot{K}_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)} \\ &\quad \cdot \cos\frac{(2s-1)\pi}{2h} z \int_0^h Y(\xi) \cos\frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi d\xi \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 F 为柱体截面积, ρ_1 为柱体密度, $\dot{K} = \frac{dK}{dr}$.

因为自由振动时, 各变量按正弦规律变化, 在(3.1)式中消去时间变量 t , 得

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^4 Y_1(z)}{dz^4} - \rho_1 F \omega^2 Y_1(z) + 4\rho a \omega^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)}{(2s-1)\dot{K}_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)} \\ \cdot \cos\frac{(2s-1)\pi}{2h} z \int_0^h Y_1(\xi) \cos\frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi d\xi = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $Y_1(z)$ 为 $0-h$ 段柱体振型, ω 为相应的振动频率. 若令

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{-1}{Y_1(z)} 4a\rho \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)}{(2s-1)\dot{K}_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)} \\ &\quad \cdot \cos\frac{(2s-1)\pi}{2h} z \int_0^h Y_1(\xi) \cos\frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi d\xi \end{aligned} \quad (3.3)$$

则方程(3.2)成为

$$EJ \frac{d^4 Y_1(z)}{dz^4} - \omega^2 [\rho_1 F + m(z)] Y_1(z) = 0 \quad (3.4)$$

可见水对柱体的影响相当于附加在柱体上一个分布质量 $m(z)$ 。

$h-H$ 段柱体的振动方程为:

$$EJ \frac{d^4 Y_2(z)}{dz^4} - \omega^2 \rho_1 F Y_2(z) = 0 \quad (3.5)$$

其中 $Y_2(z)$ 为 $h-H$ 段柱体的振型函数。

四、振动方程 (3.4) 和 (3.5) 的求解

将方程 (3.4) 改写为如下形式:

$$\frac{d^4 Y_1(z)}{dz^4} - k^4 Y_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s G_s \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} z \quad (4.1)$$

其中
$$k^4 = \frac{\rho_1 F \omega^2}{EJ} \quad (4.2)$$

$$R_s = -\frac{4\rho k^4}{\rho_1 F} \frac{aK_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)}{(2s-1)K_1\left(\frac{(2s-1)\pi a}{2h}\right)} \quad (4.3)$$

$$G_s = \int_0^h Y_1(\xi) \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi d\xi \quad (4.4)$$

方程 (4.1) 对应的齐次方程的通解为:

$$Y_{1,1}(z) = D_1 \cos kz + D_2 \sin kz + D_3 \operatorname{ch} kz + D_4 \operatorname{sh} kz$$

其中 $D_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为待定常数。非齐次方程 (4.1) 的特解假定为

$$Y_{1,2}(z) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} z$$

代入 (4.1), 比较系数, 得

$$f_s = \frac{R_s G_s}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^4 - k^4}$$

因此,

$$Y_{1,2}(z) = \sum_{s=1}^{\infty} E_s G_s \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} z$$

其中

$$E_s = \frac{R_s}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^4 - k^4} \quad (4.5)$$

于是方程 (4.1) 的通解为

$$Y_1(z) = Y_{1,1}(z) + Y_{1,2}(z)$$

代入(4.4), 得

$$G_s = D_1 I_s^{(1)} + D_2 I_s^{(2)} + D_3 I_s^{(3)} + D_4 I_s^{(4)} + \sum_{j=1}^{\infty} E_j G_j \int_0^h \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi \cos \frac{(2j-1)\pi}{2h} \xi d\xi$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_s^{(1)} &= \int_0^h \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi \cos k\xi d\xi \\ I_s^{(2)} &= \int_0^h \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi \sin k\xi d\xi \\ I_s^{(3)} &= \int_0^h \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi \operatorname{ch} k\xi d\xi \\ I_s^{(4)} &= \int_0^h \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi \operatorname{sh} k\xi d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

而 G_s 的级数项, 由于 $\cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} \xi$ 的正交性, 只在 $s=j$ 时, 等于 $\frac{h}{2} E_j G_j$; $s \neq j$ 时, 等于零. 于是有:

$$G_s = D_1 I_s^{(1)} + D_2 I_s^{(2)} + D_3 I_s^{(3)} + D_4 I_s^{(4)} + \frac{h}{2} E_s G_s,$$

由此可确定 G_s 如下:

$$G_s = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} E_s} (D_1 I_s^{(1)} + D_2 I_s^{(2)} + D_3 I_s^{(3)} + D_4 I_s^{(4)}) \quad (4.7)$$

从而, 方程(4.1)的通解最后表为:

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= D_1 \cos kz + D_2 \sin kz + D_3 \operatorname{ch} kz + D_4 \operatorname{sh} kz \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{E_s}{1 - \frac{h}{2} E_s} (D_1 I_s^{(1)} + D_2 I_s^{(2)} + D_3 I_s^{(3)} + D_4 I_s^{(4)}) \cos \frac{(2s-1)\pi}{2h} z \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中 $I_s^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, 4$) 由(4.6)式确定, 积分后得:

$$\left. \begin{aligned} I_s^{(1)} &= \frac{1}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^2 - k^2} \left[(-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} \cos kh \right] \\ I_s^{(2)} &= \frac{1}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^2 - k^2} \left[(-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} \sin kh - k \right] \\ I_s^{(3)} &= \frac{1}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^2 + k^2} \left[(-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} \operatorname{ch} kh \right] \\ I_s^{(4)} &= \frac{1}{\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h}\right)^2 + k^2} \left[(-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} \operatorname{sh} kh - k \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

($s=1, 2, 3, \dots$)

方程(3.5)的解为:

$$Y_2(z) = D_1' \cos kz + D_2' \sin kz + D_3' \operatorname{ch} kz + D_4' \operatorname{sh} kz \quad (4.10)$$

其中 k 由(4.2)式确定.

解答(4.8)与(4.10)中的积分常数 D_i, D_i' ($i=1, 2, 3, 4$) 由下列边界条件及连续条件确定:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(z)|_{z=0} &= 0, & \frac{dY_1(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= 0 \\ \frac{d^2Y_2(z)}{dz^2} \Big|_{z=H} &= 0, & \frac{d^3Y_2(z)}{dz^3} \Big|_{z=H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_1(z)|_{z=h} &= Y_2(z)|_{z=h} \\ \frac{dY_1(z)}{dz} \Big|_{z=h} &= \frac{dY_2(z)}{dz} \Big|_{z=h} \\ \frac{d^2Y_1(z)}{dz^2} \Big|_{z=h} &= \frac{d^2Y_2(z)}{dz^2} \Big|_{z=h} \\ \frac{d^3Y_1(z)}{dz^3} \Big|_{z=h} &= \frac{d^3Y_2(z)}{dz^3} \Big|_{z=h} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

由条件(4.11)及(4.12)得:

$$\left. \begin{aligned} D_1 \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} F_s I_s^{(1)} \right) + D_2 \sum_{s=1}^{\infty} F_s I_s^{(2)} + D_3 \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} F_s I_s^{(3)} \right) \\ + D_4 \sum_{s=1}^{\infty} F_s I_s^{(4)} &= 0 \\ D_2 + D_4 &= 0 \\ D_1 \cos kh + D_2 \sin kh + D_3 \operatorname{ch} kh + D_4 \operatorname{sh} kh \\ - D_1' \cos kh - D_2' \sin kh - D_3' \operatorname{ch} kh - D_4' \operatorname{sh} kh &= 0 \\ -D_1 \left(k \sin kh + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} F_s I_s^{(1)} \right) \\ + D_2 \left(k \cos kh - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} F_s I_s^{(2)} \right) \\ + D_3 \left(k \operatorname{sh} kh - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} F_s I_s^{(3)} \right) \\ + D_4 \left(k \operatorname{ch} kh - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} F_s I_s^{(4)} \right) \\ + D_1' k \sin kh - D_2' k \cos kh - D_3' k \operatorname{sh} kh - D_4' k \operatorname{ch} kh &= 0 \\ -D_1 \cos kh - D_2 \sin kh + D_3 \operatorname{ch} kh + D_4 \operatorname{sh} kh \\ + D_1' \cos kh + D_2' \sin kh - D_3' \operatorname{ch} kh - D_4' \operatorname{sh} kh &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
& D_1 \left(k^3 \sin kh + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} \right)^3 F_s I_s^{(1)} \right) \\
& + D_2 \left(-k^3 \cos kh + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} \right)^3 F_s I_s^{(2)} \right) \\
& + D_3 \left(k^3 \operatorname{sh} kh + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} \right)^3 F_s I_s^{(3)} \right) \\
& + D_4 \left(k^3 \operatorname{ch} kh + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} \right)^3 F_s I_s^{(4)} \right) \\
& - D_1' k^3 \sin kh + D_2' k^3 \cos kh - D_3' k^3 \operatorname{sh} kh - D_4' k^3 \operatorname{ch} kh = 0 \\
& - D_1' \cos kH - D_2' \sin kH + D_3' \operatorname{ch} kH + D_4' \operatorname{sh} kH = 0 \\
& D_1' \sin kH - D_2' \operatorname{cos} kH + D_3' \operatorname{sh} kH + D_4' \operatorname{ch} kH = 0
\end{aligned}$$

其中

$$F_s = \frac{E_s}{1 - \frac{h}{2} E_s}$$

在联立方程组(4.13)中, 因常数 $D_i, D_i' (i=1, 2, 3, 4)$ 不能全为零, 故方程组(4.13)的系数行列式等于零, 于是得柱水偶联体系频率方程如下:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
\alpha & \beta & & & & 1 \\
\cos kh & \sin kh - \operatorname{sh} kh & & & & \operatorname{ch} kh \\
-(k \sin kh + \sigma^{(1)}) & k(\cos kh - \operatorname{ch} kh) - \sigma^{(2)} + \sigma^{(4)} & & & & k \operatorname{sh} kh - \sigma^{(3)} \\
-\cos kh & -\sin kh - \operatorname{sh} kh & & & & \operatorname{ch} kh \\
k^3 \sin kh + \Sigma^{(1)} & -k^3(\cos kh + \operatorname{ch} kh) + \Sigma^{(2)} - \Sigma^{(4)} & & & & k^3 \operatorname{sh} kh + \Sigma^{(3)} \\
0 & 0 & & & & 0 \\
0 & 0 & & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
-\cos kh & -\sin kh & -\operatorname{ch} kh & -\operatorname{sh} kh & & \\
k \sin kh & -k \cos kh & -k \operatorname{sh} kh & -k \operatorname{ch} kh & & \\
\cos kh & \sin kh & -\operatorname{ch} kh & -\operatorname{sh} kh & = 0 & \\
-k^3 \sin kh & k^3 \cos kh & -k^3 \operatorname{sh} kh & -k^3 \operatorname{ch} kh & & \\
-\cos kH & -\sin kH & \operatorname{ch} kH & \operatorname{sh} kH & & \\
\sin kH & -\operatorname{cos} kH & \operatorname{sh} kH & \operatorname{ch} kH & &
\end{array} \quad (4.14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1 + \sum_{s=1}^{\infty} F_s I_s^{(1)}}{1 + \sum_{s=1}^{\infty} F_s I_s^{(3)}} \\
 \beta &= \frac{\sum_{s=1}^{\infty} F_s (I_s^{(2)} - I_s^{(4)})}{1 + \sum_{s=1}^{\infty} F_s I_s^{(3)}} \\
 \sigma^{(i)} &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(2s-1)\pi}{2h} F_s I_s^{(i)} \\
 \sum^{(i)} &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \left[\frac{(2s-1)\pi}{2h} \right]^s F_s I_s^{(i)} \\
 &\quad (i=1, 2, 3, 4)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

从频率方程(4.14)求出频率后, 代入方程组(4.13)确定诸常数 D_i 和 D'_i ($i=1, 2, 3, 4$) (实际上是确定诸常数的比值), 再把确定的常数代入式(4.8)和(4.10)就得到振型函数。

五、结 语

通过上述分析得知: 水对柱体的影响相当于附加在柱体上的分布质量, 因此, 水中柱体自振频率比无水时降低。

本文提出的部份埋入水中柱体振动分析方法, 可以推广应用到内部贮水的圆筒情形。但需假定圆筒作梁式振动。在此种情况下, 只须以修正的第一类 Bessel 函数 $I_n\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} r\right)$ 代替 $K_n\left(\frac{(2s-1)\pi}{2h} r\right)$ 。

本项研究工作具有实际意义, 例如, 横跨大型水库的桥梁, 其桥墩就是部份埋入水中的柱体, 水坝和港湾靠水平台都是部份埋入水中的结构。在进行这类结构的抗地震设计时, 需要知道它们的自由振动特性, 即自振频率和振型函数。因此, 对水中柱体自由振动的研究就越来越引起人们的重视。

参 考 文 献

1. Ишков, П. К., Определение частот колебаний упругих стержней в жидкости, *Прикладная Математика и Механика*, вып. 1, 3~4, (1937~38).
2. Jacobson, L. S., Impulsive hydrodynamic of fluid inside a cylindrical tank and of a fluid surrounding a cylindrical pier. *BSSA*, 39, 3, (1949).
3. Housner G. W., Dynamic pressures on accelerated fluid containers *BSSA*, 47, 1, (1957).

- 4 郑哲民, 马宗魁, 悬臂梁一侧有液体作用时的自由振动, 力学学报, 3, 2. (1959).
- 5 樱井彰雄. 水中に立てられぬ柱状构造物の振動, 土木技术, 16, 6.(1961).
- 6 项中权, 张悉德等, 圆柱形水池的抗地震分析, 中国科学院工程力学研究所研究报告, (1966).

Free Bending Vibration of Circular Column Partially Submerged in Water

Zhang Xi-de

(Shandong Institute of Chemical Engineering, Qingdao)

Abstract

In this paper, the author had studied the bending vibration of circular column partially submerged in water.

An equation of frequency and an exact solution of corresponding function of vibrational modes are given. It is pointed out that the effect of water is equivalent to an attached distributive mass. Therefore the frequency with water is lower than that without water.