应用数学和力学, 第 25 卷 第 12 期(2004 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 12_1292_07

关于复模态参数的冗余性*

陈奎孚, 焦群英

(中国农业大学 理学院 应用力学系, 北京 100083)

(鲁传敬推荐)

摘要: 生成仿真传递函数是考核模态识别算法和评估模态分析软件的不可缺少的环节• 比较可行的 3 种计算方案表明: 若选择将传递函数表示为复模态参数的展开式, 则可以自由设定仿真模态的特性, 如密频、大阻尼和复模态; 然而, 即使采用这种格式也不能随意设置一组复模态振型, 因为这种格式的表观参数个数大于物理参数个数; 故而, 若对应的物理参数有意义, 那么复模态参数必须满足一组约束关系• 通过分析复模态系统的特征值问题, 和复模态参数反演物理参数的方程式, 给出了复模态参数间的一组非线性冗余约束• 讨论了实模态、无阻尼和不完全模态等特殊情形的冗余约束具体形式与独立参数的个数, 值得注意的是, 对于实模态系统, 冗余约束自动满足• 给出冗余约束在传递函数矩阵和一列传递函数上的等价形式• 这些结果有助于产生仿真传递函数, 实施优化型识别算法, 以及评估识别结果; 还可用来评价残余模态和识别完整性•

关 键 词: 振动; 复模态; 传递函数; 特征值
中图分类号: TN911. 72 文献标识码: A

引 言

经过约40 年的发展, 模态分析已经取得了巨大进展, 特别是实模态分析, 无论是理论还是应用都已进入成熟阶段[1~5]• 然而, 复模态理论的发展则相对滞后一些, 这既有理论问题, 也有具体实施细节有待于进一步完善• 一个关键问题是, 在复模态的框架下, 阻尼矩阵已经不再假定为比例阻尼• 相关的研究已经指出阻尼的稳健性比较差[6~7]•

无论何种识别算法, 都要经得起仿真数据来考核• 对于频域识别算法, 必须要生成一组仿真的传递函数(Transfer function(TF)) 的离散数据• 在某些情形下, 我们希望仿真的 TF 具有特殊的性态, 比如比例阻尼, 近乎重频的极点• 一个重要的问题是我们是否可以随意设置模态参数, 比如模拟具有复模态振型, 但是具有比例阻尼? 另一个问题是模态参数的唯一性, 这个稍微难理解一些• 我们稍后解释这个概念•

就实模态而言, 各阶振型与相应的模态质量、模态阻尼和模态刚度(或模态频率) 可以为任意实数(当然要满足刚度和质量大于零, 以及正阻尼条件) • 只要模态参数完备(简称这组参数为原始参数) , 就可由这组模态参数导出物理坐标系下的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$、阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和刚度$\boldsymbol{K}$•

* 收稿日期: 2003_01_15; 修订日期: 2004_07_06
作者简介: 陈奎孚(1969—) , 江苏宿迁人, 讲师, 博士;
焦群英, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_10_62376411; Fax: + 86_10_62376777; E_mail: jiaoqy@cau. edu. cn)•

如果再由导出的 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 生成仿真TF,那么由后者识别出的模态参数(简称为再生参数)• 我们总是期望再生参数与原始参数应无差异•

对于实模态分析，这个问题不大，理论上与原始参数和再生参数之间无差异(按照相同的规则对振型归一化)，或者振型最多相差一个符号• 我们认为这种情形的模态参数具有唯一性•

但是对于复模态分析,这个唯一性并不总是成立的• 随便给定一组模态参数,原始参数与再生参数之间可能存在巨大差异• 这是因为复模态参数的形式参数个数(number of apparent variants (NAV))超过物理参数个数• 很显然复模态参数之间存在某种约束•

显然,该约束对仿真数据的生成非常重要• 此外,有些作者企图通过优化技术直接识别模态参数[8~10]• 理解这个约束将有助于这种方法得以实施,以及评估识别结果• Garvey S.D.已经注意到这种约束,并可用于节约存储量[11~12]• 本文还将表明,它对残余模态和识别参数完备性检查等也具有一定意义•

1 生成仿真传递函数

n 自由度线性振动系统在物理坐标系下的控制方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 均为 $n\times n$ 对称矩阵,分别表示系统的质量、阻尼和刚度矩阵; $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{f}$ 均为 $n\times 1$ 的向量,分别表示响应和激励• 根据定义,TF 矩阵为

$$\boldsymbol{H}(s) = (s^2\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K})^{-1}, \tag{2}$$

可进一步写为

$$\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{P}(s)/Q(s), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{P}(s)$、$Q(s)$ 分别为矩阵 $s^2\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}$ 的伴随矩阵和行列式•

给定质量、刚度和阻尼矩阵后,可以根据式(2)来生成TF,即对每个 s,计算逆矩阵 $(s^2\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K})^{-1}$• 显然,这种方法不仅计算量大,而且对模态参数的性态难以控制,例如,为了刻意仿真密集模态情形的TF•

另一种方法是给定式(3)中多项式的系数,很显然这种方法同样也难以控制模态参数的特性;另外,多项式 $\boldsymbol{P}(s)$、$Q(s)$ 的系数也不能任意选取,因为它们的NAV远远超出物理参数个数• 在物理坐标系下,振动系统由 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 3个矩阵唯一表征,考虑到这3个矩阵的对称性,独立参数个数(number of independent parameters (NIP))为 $3n(n+1)/2$• 根据矩阵性质, $Q(s)$ 为关于 s 的 $2n$ 次多项式,最高幂次系数为1,因而NAV为 $2n$, $\boldsymbol{P}(s)$ 的每个元素均为不超过 $2n-1$ 次的多项式(NAV为 $2n^3$),总NAV为 $2n(n^2+1)$• 因此这些多项式的系数不可能完全独立,也就是每项系数不可能任意指定•

TF的模态参数形式的展开为[13]

$$\boldsymbol{H}(s) = \Psi(s\boldsymbol{I} - \Lambda)^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{-1}\Psi^{\mathrm{T}} + [\Psi(s\boldsymbol{I} - \Lambda)^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}]^*, \tag{4}$$

式中: Ψ 为 $n\times n$ 振型阵; $\boldsymbol{I}$ 为单位阵; $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_r)$、$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}} = \mathrm{diag}(a_r)$ $(r = 1, \cdots, n)$ 均为 $n\times n$ 的对角阵,分别表示复频率阵和复模态质量矩阵• 这里的 $\mathrm{diag}(\alpha_r)$ $(r = 1, \cdots, n)$ 表示 $n\times n$ 的对角阵, r 行的对角元素为 α_r•

对于复模态结构, Ψ 的元素可能为复数,但对于某一行(列)只有比值才有意义,因此 Ψ 最多有 $2n(n-1)$ 个独立参数,再加上 Λ、$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$(均为复数)的 $4n$ 个,总计有 $2n(n+1)$• 虽然它比式(3)的NAV大大减少,但它仍大于式(1)的NIP• 作为同一客观对象的两种描述,其NIP应

该相同, 因而式(4) 的 $2n(n+1)$ 个参数不可能完全独立• 所以仿真生成TF 时, Ψ 的元素并不能任意选取, 它们必须满足一组约束关系•

2 复模态理论与特征值问题

我们从复模态的一般理论出发, 引入 $2n$ 维状态向量: $\boldsymbol{y}=\{\boldsymbol{x}\quad \dot{\boldsymbol{x}}\}^{\mathrm{T}}$• 对 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ 的自由振动, 式(1) 可等价为

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}, \tag{5}$$

其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{M}\end{bmatrix}\bullet \tag{6}$$

式(5) 的特征值问题为

$$\lambda_r\boldsymbol{A}\varphi_r+\boldsymbol{B}\varphi_r=\boldsymbol{0}, \tag{7}$$

式中 λ_r 和 φ_r 分别为 r 阶特征值和特征向量(为方便计, 不考虑重特征值情形)• 对欠阻尼系统, 式(7) 有 n 对共扼的特征值和特征向量• 若按照 $\lambda_{n+r}=\lambda_r^*$ 排列, 则前 n 个特征值就构成了 Λ 的对角元素• 式(7) 可进一步改写为

$$\lambda_r\varphi_r+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\varphi_r=\boldsymbol{0}, \tag{8}$$

这时 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 是不对称方阵• 应当指出式(8) 特征值的复数特性并非是源于 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的不对称, 它的根本原因取决于 $\boldsymbol{A}$ 阵的子矩阵 $\boldsymbol{C}$ 性态• 对于过阻尼系统, $\boldsymbol{C}$ 量级在某种意义上比较大, 又因 $\boldsymbol{A}$ 阵对称, 可在实数域对其 Cholesky 分解[14]• 这样式(7) 能转化为普通对称阵的特征值问题• 根据矩阵性质, 式(7) 的特征值均为实数• 式(7) 和式(8) 特征值完全相同, 所以后者特征值也完全为实数[14]•

但对于欠阻尼系统, 无法保证 $\boldsymbol{A}$ 正定(比如 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$), 从而无法在实数域对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Cholesky 分解, 式(7) 难以转变为普通特征值, 这时就可能出现复特征值及特征向量•

3 由复模态参数表示物理参数

复模态参数组 Ψ, Λ, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$ 构成了刻画振动系统完备参数集, 因为从这组参数可以导出唯一的物理坐标系下的 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{K}$•

特征值问题(7) [或(8)] 的所有 φ_r 组成 $2n\times 2n$ 的特征向量阵 Φ, 它与振型阵 Ψ 关系为 $\Phi=\begin{bmatrix}\Psi & \Psi^*\\ \Psi\Lambda & \Psi^*\Lambda^*\end{bmatrix}$• 由特征值性质, 存在如下的正交性[13]

$$\Phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\Phi=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^*), \tag{9a}$$

$$\Phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\Phi=-\mathrm{diag}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\Lambda,(\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\Lambda)^*]\bullet \tag{9b}$$

由(6) 易知

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{-1}\\ \boldsymbol{M}^{-1} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{-1}\end{bmatrix}, \tag{10}$$

再由(9a) 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\Phi[\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^*)]^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}=$$
$$\begin{bmatrix}\Psi & \Psi^*\\ \Psi\Lambda & \Psi^*\Lambda^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{-1})^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi^{\mathrm{T}} & \Lambda\Psi^{\mathrm{T}}\\ \Psi^{*\mathrm{T}} & \Lambda^*\Psi^{*\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

进一步展开得

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \Psi A_d^{-1}\Psi^T + (\Psi A_d^{-1}\Psi^T)^* & \Psi A_d^{-1}\Lambda\Psi^T + (\Psi A_d^{-1}\Lambda\Psi^T)^* \\ \Psi\Lambda A_d^{-1}\Psi^T + (\Psi\Lambda A_d^{-1}\Psi^T)^* & \Psi\Lambda^2 A_d^{-1}\Psi^T + (\Psi\Lambda^2 A_d^{-1}\Psi^T)^* \end{bmatrix}. \tag{11}$$

将上式与式(10)比较，从 A^{-1} 右上(或左下)子块有

$$M = [\Psi A_d^{-1}\Lambda\Psi^T + (\Psi A_d^{-1}\Lambda\Psi^T)^*]^{-1}, \tag{12}$$

而从右下子块则有

$$-M^{-1}CM^{-1} = \Psi\Lambda^2 A_d^{-1}\Psi^T + (\Psi\Lambda^2 A_d^{-1}\Psi^T)^*,$$

即

$$C = -M[\Psi\Lambda^2 A_d^{-1}\Psi^T + (\Psi\Lambda^2 A_d^{-1}\Psi^T)^*]M. \tag{13}$$

利用同样的方法，可从(6)和(9b)导出

$$K = -[\Psi A_d^{-1}\Lambda^{-1}\Psi^T + (\Psi A_d^{-1}\Lambda^{-1}\Psi^T)^*]^{-1}. \tag{14}$$

式(12)～(14)构成了从复模态参数到物理参数的反演公式。从这些表达式可以看出无论 Ψ、Λ、A_d 如何取值，反演出的 M、C、K 均为实对称方阵。

4　复模态参数间的约束关系

根据前面分析可知，Ψ、Λ、A_d 的NIP超过物理坐标系下的参数，因此这组参数之间肯定还存在某种约束。也就是随便给定一组复模态参数，虽然能由式(12)～(13)反演出 M、C、K，但是由这组 M、C、K 仿真的TF识别出的模态参数有可能与最初的不同；这显然会对算法考核造成困难。为了便于生成考核识别算法所需的数据，必须确立复模态参数所要满足的条件，使得识别出的参数在某种程度上与给定参数一致。

比较式(10)和(11)的左上角子块有

$$\Psi A_d^{-1}\Psi^T + (\Psi A_d^{-1}\Psi^T)^* = 0. \tag{15}$$

利用同样的方法，从(6)和(9b)也可导出相同的条件。式(15)是模态参数必须满足的方程组，即要求 $\Psi A_d^{-1}\Psi^T$ 为纯虚数。尽管该方程组形式上提供了 n^2 个方程，但由于方程组的对称性，最多只有 $n(n+1)/2$ 个独立约束。

式(15)关于模态参数的约束为非线性，而非线性关系的独立性和相关性概念要比线性情形复杂得多[15]，难以如同线性方程组那样研究独立变量的个数。在非蜕化的情形下，式(15)应能提供 $n(n+1)/2$ 个独立约束。这样原来的模态参数 $2n(n+1)$ 个减去 $n(n+1)/2$ 个，刚好余 $3n(n+1)/2$ 个，这就与物理参数一致了。

特例1 实模态系统　这个特例非常典型，它与引言中的问题有关。

实模态有4种等价定义：　C 可由无阻尼情形的振型对角化；②C 为比例阻尼阵；③振型为实向量；④Caughey条件[16]可表示为 $MC^{-1}K = KC^{-1}M$。从这些等价定义我们可以知道，一个具有复模态振型的比例阻尼系统是不可实现的。我们可以解释如下：

如果选定了一组振型为复向量的完备的复模态参数，我们把它们带入(12)～(14)。由于 M、K 为对称，而且也应为半正定，故其无阻尼情形的模态应该为实向量。不论它是否能够将 C 对角化，这已经与原始参数不同了(显然，这也就意味着复模态振型的虚部的大小是阻尼非比例性的一个有力的指标[17])。

现在我们来检查NAV和NIP。M、K 共有 $n(n+1)$ 个独立参数，而实模态的 C 必可以被由 M、K 导出的振型对角化，因此只有 n 个独立参数，因而物理参数的NIP为 n^2+2n。在模态坐标系下，Ψ 蜕化为实数(n^2-n 个独立参数)，而 A_d 也全部蜕化为纯虚数(有 n 个独立参数)，同时(15)自动成立，不提供任何独立约束；而 λ_r 仍为复数。故此时 Ψ、λ_r、a_r 的NIP为 n^2+

$2n$, 正与物理坐标系下的一致•

特例 2 无阻尼系统 物理参数只有 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$, NIP 为 n^2+n; 而模态坐标系的 λ_r 进一步蜕化为纯虚数, 因此 NAV 只有 n^2+n• 二者恰好一致•

特例 3 非完整模态 对于实验模态分析, 常常只能对部分模态进行识别, 这时式(15) 不再精确成立• 假定只识别出其中的前 m 阶模态, 记相应的模态振型和模态质量为 Φ_1 和 $\boldsymbol{A}_{d1}$, 前者为 $n\times m$ 的矩形阵, 后者为 $m\times m$ 的对角阵, 残余振型阵和模态质量为 Φ_2 和 $\boldsymbol{A}_{d2}$, 它们分别为 $n\times(n-m)$ 的矩形阵, 后者为$(n-m)\times(n-m)$ 的对角阵, 式(15) 可改写为

$$\Psi\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\Psi_1 & \Psi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d1}}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{d2}}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1^{\mathrm{T}}\\ \Psi_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\Psi_1\boldsymbol{A}_{\mathrm{d1}}^{-1}\Psi_1^{\mathrm{T}}+\Psi_2\boldsymbol{A}_{\mathrm{d2}}^{-1}\Psi_2^{\mathrm{T}},$$

因此变为

$$\Psi_1\boldsymbol{A}_{\mathrm{d1}}^{-1}\Psi_1^{\mathrm{T}}+(\Psi_1\boldsymbol{A}_{\mathrm{d1}}^{-1}\Psi_1^{\mathrm{T}})^*+\Psi_2\boldsymbol{A}_{\mathrm{d2}}^{-1}\Psi_2^{\mathrm{T}}+(\Psi_2\boldsymbol{A}_{\mathrm{d2}}^{-1}\Psi_2^{\mathrm{T}})^*=\boldsymbol{0}•$$

所以, 前 m 阶模态(15) 式不再满足, 只有全部识别完毕(15) 式才能成立• 因而通过对已识别出模态的计算式(15) 左边量, 可以检查复模态识别是否完整•

5 对传递函数的要求

前面曾指出 TF 的多项式系数不可能独立, 原则上利用上面的论证, 也可把这组关系找出来, 但是其形式相当复杂• 我们来看 TF 的留数形式

$$\boldsymbol{H}(s)=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{s-\lambda_r}\boldsymbol{R}_r+\frac{1}{s-\lambda_r^*}\boldsymbol{R}_r^*\right),$$

式中的 $\boldsymbol{R}_r$ 为 $n\times n$ 留数阵• 显然这种表现形式的 NAV 远远超过物理参数的, 但是与式(4) 比较, 不难发现各阶 $\boldsymbol{R}_r$ 与振型的关系为 $\boldsymbol{R}_r=\psi_r\psi_r^{\mathrm{T}}/a_r$, 其中 ψ_r 为振型阵 Ψ 的第 r 列• 上式表明 $\boldsymbol{R}_r$ 的秩恒为 2, 因此最多只能有 $2n$ 个独立参数• 而且所有 $\boldsymbol{R}_r$ 均由 Ψ 和 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$ 完全决定• 故其 NIP 仍然不变• 此外根据(15) 又有

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\boldsymbol{R}_r+\boldsymbol{R}_r^*\right)=\boldsymbol{0},\tag{16}$$

它等价于式(3) 中 $\boldsymbol{P}(s)$ 的各个元素的 $2n-1$ 幂次项系数为零• 就完整模态, 由伴随阵, 对式(3) 来说, 这是显然的结论• 多项式法识别模态参数, 往往对选择的特定区间拟合[18~21], 由于界外残余模态影响, 式(16) 未必成立, $\boldsymbol{P}(s)$ 元素的 $2n-1$ 幂次项系数当然有可能不等于零•

对于实模态系统, 因 Ψ 和 a_r 均蜕化为虚数, 因而 $\boldsymbol{R}_r$ 变成纯虚数, 因此式(16) 自动成立•

根据模态分析原理, $\boldsymbol{H}(s)$ 的的一行(列) 就足以完备刻画一个动力系统, 它就是一点激励多点拾振(或多点依次激励, 一点拾振) 的模态分析技术的基础• 不失一般性, 取出其中第一列, 记为 $\boldsymbol{h}(s)$, 它可以表示为

$$\boldsymbol{h}(s)=\boldsymbol{p}(s)/Q(s),\tag{17}$$

其中: $Q(s)=s^{2n}+\sum_{k=0}^{2n-1}q_ks^k$; $\boldsymbol{p}$ 的元素 $p_i(s)=\sum_{k=0}^{2n-1}q_{i,k}s^k$• 式(17) 的各项元素同样也不可能独立, 因为 q_k、$p_{i,k}$ 的 NAV 为 $2n^2+2n$•

从 $Q(s)=s^{2n}+\sum_{k=0}^{2n-1}q_ks^k=0$ 可解出 n 对共扼复根 λ_r, λ_r^* $(r=1,\cdots,n)$• 相应于 λ_r 极点的留数向量构成 $\boldsymbol{R}_r$ 的第一列 $\boldsymbol{r}_1^r$, 即

$$\boldsymbol{r}_1^r=\boldsymbol{p}(\lambda_r)/Q(\lambda_r)=\psi_{1,r}\psi_r/a_r,$$

其中 $\psi_{1,r}$ 是振型 ψ_r 的第一个分量• 振型是一组比值, 其归一化因子与 a_r 有关, 但可以任意选择• 不妨取 $\psi_r = \boldsymbol{p}(\lambda_r)/Q(\lambda_r)$, 这相当于要求 $a_r = \psi_{1,r} = p_1(\lambda_r)/Q(\lambda_r)$, 这样 $\boldsymbol{R}_r$ 变为

$$\boldsymbol{R}_r = \boldsymbol{p}(\lambda_r)\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\lambda_r)/[Q(\lambda_r)p_1(\lambda_r)],$$

从而式(16)变为

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\boldsymbol{p}(\lambda_r)\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\lambda_r)/[Q(\lambda_r)p_1(\lambda_r)] + \boldsymbol{p}^*(\lambda_r)\boldsymbol{p}^{*\mathrm{T}}(\lambda_r)/[Q^*(\lambda_r)p_1^*(\lambda_r)]\right] = \mathbf{0}•$$

由于对称性, 这最多提供 $n(n+1)/2$ 个约束• 考虑了这个约束后, 剩下的 NIP 就与物理参数的一致了• 与式(16)相仿, 上述矩阵约束的第一列等价于 $\boldsymbol{p}$ 元素的 $2n-1$ 幂次项的系数为零•

6　结 束 语

为了考核模态识别算法和模态分析软件, 必须生成仿真传递函数• 后者有多种方式, 其中基于复模态参数的展开式具有较大的优越性, 因为可以精细控制模态的性态• 对于实模态, 模态振型在实数域几乎没有限制• 然而对复模态, 其振型并不可以在复数域内任意选取, 否则原始参数与再生参数可能相差很大•

二者差异的关键是复模态参数之间有限制, 他们并非独立参数• 通过物理坐标系与复模态坐标系之间的关系, 导出了这组约束• 讨论了实模态、无阻尼和不完整识别等情形下的约束特殊形式和独立参数个数• 指出了复模态理论的特征值为复数的原因在于阻尼阵性态• 给出了在传递函数矩阵和一列传递函数上的等价约束形式•

这些研究结果不仅对仿真数据的生成有指导意义, 而且对某些算法的实施和识别参数完备性的检查等都具有一定意义•

[参　考　文　献]

[1] He J M, Fu Z F. Modal Analysis[M]. Oxford, England: Butterworth_Heinemann, 2001.

[2] Ewins D J. Modal Testing: Theory, Practice and Application[M]. Hertfordshire England: Research Studies Press Limited, 1999.

[3] Silva J M, Maia N M. Theoretical and Experimental Modal Analysis[M]. Hertfordshire England: Research Studies Press Limited, 1998.

[4] 许本文, 焦群英. 机械震动与模态分析基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.

[5] 陆秋海, 李德葆. 模态理论的进展[J]. 力学进展, 1996, **26**(4): 464—472.

[6] Hasselman T K, Chrostowski J D, Pappa R. Estimation of full modal damping matrices from complex test modes[A]. In: The 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference[C]. La Jolla, CA, USA, 1993, 3388—3394.

[7] Gladwell G M L. On the reconstruction of a damped vibrating system from two complex spectra—Part 1: Theory[J]. J Sound Vibration, 2001, **240**(2): 203—217.

[8] Foltete E, Gladwell G M L. On the reconstruction of a damped vibrating system from two complex spectra—Part 2: Experiment[J]. J Sound Vibration, 2001, **240**(2): 219—240.

[9] Rosa L F L, Magluta C, Roitman N. Modal parameters estimation using an optimization technique[A]. In: A L Wicks Ed. Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference[C]. IMAC. Part 1 (of 2). Orlando, FL, USA. Bethel: Society of Experimental Mechanics, 1997, 540—544.

[10] Rosa L F L, Magluta C, Roitman N. Estimation of modal parameters through a non_linear optimisation technique[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1999, **13**(4): 593—607.

[11] Garvey S D, Friswell M I, Penny J E. Efficient component mode synthesis with non_classically damped (sub_) structures[A]. In: A L Wicks Ed. Proceedings of the 1998 16th International Modal

Analysis Conference [C]. Part 2 (of 2). Santa Barbara, CA, USA. Bethel: Society of Experimental Mechanics, 1998, 1602—1608.
[12] Garvey S D, Penny J E, Friswell M I. The relationship between the real and imaginary parts of complex modes[J]. J Sound Vibration, 1998, **212**(1): 75—83.
[13] 李德葆, 陆秋海. 实验模态分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001, 78—87.
[14] Zwillinger D. Standard Mathematical Tables and Formulae [M]. Florida, USA: CRC Press, 1996, 130—134.
[15] 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性代数方程与定理机器证明[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1996.
[16] Caughey T K, O' kelly M J. Classical normal modes in damped linear dynamics systems[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1965, **32**(2): 583—588.
[17] Liu K F, Kujath M R. Zheng W P. Quantification of non_proportionality of damping in discrete vibratory systems[J]. Computers and Structures, 2000, **77**(5): 557—569.
[18] Levy E C. Complex_curve fitting[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1959, **4**(1): 37—44.
[19] Fahey S O F, Pratt J. Frequency domain modal estimation techniques[J]. Experimental Techniques, 1998, **22**(5): 33—37.
[20] Ruotolo R, Storer D M. Global smoothing technique for FRF data fitting[J]. J Sound Vibration, 2001, **239**(1): 41—56.
[21] Formenti D, Richardson M. Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials (twenty years of progress)[A]. In: A L Wicks Ed. Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference: A Conference on Structural Dynamics [C]. Los Angeles, CA, USA. Bethel: Society of Experimental Mechanics, 2002, 373—382.

On the Redundancy of Complex Modal Parameters

CHEN Kui_fu, JIAO Qun_ying
(College of Science, China Agricultural University,
Beijing 100083, P.R. China)

Abstract: Generating the simulation transfer function (TF) is indispensable to modal analysis, such as examining modal parameters identification algorithm, and assessing modal analysis software. Comparing 3 feasible algorithms to simulate TF shows that, one of them is preperable, which is expressing the TF as the function of the complex modal parameters(CMPs), because the deliberate behaviors of CMPs can be implemented easily, such as, dense modals, large damping, and complex modal shape, etc. Nonetheless, even this preferable algorithms is elected, the complex modal shapes cannot be specified arbitrarily, because the number of CMPs far more exceeds that in physical coordinate. So for physical realizable system, there are redundant constraints in CMPs. By analyzing the eigenvalue problem of a complex modal system, and the inversion equations from CMPs to physical parameters, the explicit redundancy constraints were presented. For the special cases, such as the real modal, the damping free modal, and non_complete identification, the specific forms of the redundancy constraints were discussed, along with the number of independent parameters. It is worthy of noting that, redundancy constraints are automatically satisfied for the real modal case. Their equivalent forms on the transfer matrix and a column of transfer matrix were also provided. These results are applicable to generate TF, to implement identification by optimization and appreciate the identification results, to evaluate residual modal, and to verify the complementary of identified modal orders.

Key words: vibration; complex modal; transfer function; eigenvalue