

马丢方程的一阶不稳定区及其 在回旋加速器中的应用*

罗诗裕

(兰州中国科学院近代物理研究所, 1980年10月1日收到)

摘 要

根据马丢 (Mathieu) 方程解的稳定性和迁移矩阵方法, 近似地分析了粒子穿越 $\nu_z = \frac{1}{2}$ 共振线的动力学行为, 并导出了动力学允许的最大场梯度振幅。

磁体张角为 52° 的四度对称径向扇回旋加速器, 当粒子能量大于0.21时, 将穿过 $\nu_z = \frac{1}{2}$ 这条 (参数) 共振线, 导致轴向自由振荡振幅迅速增长, 以致使粒子打在真空室的壁上而损失掉, 这是应当尽量避免的. 本文从实际出发, 试图根据马丢方程解的稳定性和迁移矩阵方法, 对粒子穿越这条共振线的行为作一近似分析, 并导出动力学允许的最大场梯度振幅。

一、运动方程及其解的稳定性

在线性近似下, 无量纲的粒子轴向运动方程为:

$$\ddot{z}_1 + g(\phi)z_1 = \varepsilon f(z_1, \phi) \quad (1.1)$$

其中, 字母上方的圆点“·”表示对变数 ϕ 的微分, $g(\phi)$ 是 ϕ 的周期函数, ε 是小参数, $\varepsilon f(z_1, \phi)$ 是场梯度扰动产生的线性恢复力, 一般说来, 它也是 ϕ 的周期函数, 不过同 $g(\phi)$ 相比, 只满足较弱的周期条件, z_1 是粒子的轴向偏离 (以平衡轨道半径 r_0 为单位)。

根据弗洛格 (Floquet) 定理, 无扰动方程 (1.1) 有如下形式的解

$$z_1(\phi) = a(\phi) \exp[i\nu_z \theta(\phi)] \quad (1.2)$$

其中 a 和 θ 满足方程

$$a^2 \dot{\theta} = 1, \quad \ddot{a} + g(\phi)a = \nu_z^2 a^{-3} \quad (1.3)$$

作变换

$$z_1(\phi) = a(\phi)z_2(\theta) \quad (1.4)$$

将上式代入方程 (1.1), 并注意到式 (1.3), 可得

$$\ddot{z}_2 + \nu_z^2 z_2 = a^3 \varepsilon f(z_2, \theta) \quad (1.5)$$

* 钱伟长推荐。

精确到一阶小量, a 和 θ 又可表示为

$$a=1+\xi(\phi), \quad \theta=\phi[1+\zeta(\phi)] \quad (1.6)$$

注意, 式(1.5)中字母上方的圆点“·”表示对新变数 θ 的微商.

$$z_2 = \frac{z}{r_0} \quad (1.7)$$

并考虑如下形式的场梯度扰动

$$ef(z_2, \theta) = -\delta z_2 \cos p\theta \quad (1.8)$$

则方程(1.1)可足够精确地表示为

$$\ddot{z} + (v_z^2 + \delta \cos p\theta)z = 0 \quad (1.9)$$

其中

$$\delta = \frac{r_0}{B} \frac{\partial b_z}{\partial z} = \frac{r_0}{B} b_p \quad (1.10)$$

b_p 是 p 次谐波梯度振幅.

方程(1.9)是熟知的马丢方程, 它的性质早就被人们详尽地研究过了. 解的稳定性与参数 $\frac{v_z^2}{p^2}$ 和 $\frac{\delta}{p^2}$ 的分布有关, 在 $\frac{v_z^2}{p^2} \sim \frac{\delta}{p^2}$ 平面上, 出现了一系列稳定和不稳定区, 如图1所示, 图中阴影部分表示稳定区域. 一般说来, 这种稳定和不确定区域可以有无限多个. 从图1可以看出, 当 $|\delta| \rightarrow 0$ 时, 如果 $v_z^2 > 0$, 系统是稳定的, 但对于 $v_z^2 < 0$, 系统则总是不稳定的; 随着 $|\delta|$ 的增加, 即使 $v_z^2 < 0$, 系统也可能表现出稳定性; 此外, 由于方程(1.9)存在振荡部分 $\delta \cos p\theta$, 使得 $v_z^2 > 0$ 的半平面内也出现一系列不稳定区域, 当 $|\delta| \rightarrow 0$ 时, 这些不稳定区退化为一, 且全都落在 $\delta=0$ 的横轴上, 这些点由公式

$$\frac{v_z^2}{p^2} = \frac{k^2}{4} \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (1.11)$$

给出, 人们通常把对应于不同 k 值的区域, 分别称为一阶、二阶和三阶等不稳定区.

在 $\frac{v_z^2}{p^2} \sim \frac{\delta}{p^2}$ 平面上, 虽然存在无限多个稳定和不确定区, 实际上(比如在回旋加速器中), 人们都只涉及其中的一个或几个区域. 本文就只关心 $k=1$ 的情形.

由[1]可知, 当 δ 比较小时, 一阶不稳定区的两条边界曲线可分别表示为

$$\frac{v_{z_1}^2}{p^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{p^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{p^2} \right)^2 + \frac{1}{32} \left(\frac{\delta}{p^2} \right)^3 + \dots \quad (1.12)$$

和

$$\frac{v_{z_2}^2}{p^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{p^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{p^2} \right)^2 - \frac{1}{32} \left(\frac{\delta}{p^2} \right)^3 + \dots \quad (1.13)$$

不稳定区域的宽度 Δ 由公式

$$\Delta = \frac{v_{z_2}^2}{p^2} - \frac{v_{z_1}^2}{p^2} = \frac{\delta}{p^2} - \frac{1}{16} \left(\frac{\delta}{p^2} \right)^3$$

给出. 对于这个不稳定区, 上式又可相当精确地表示为

$$\Delta v_z = \frac{1}{2v_z} \left(\delta - \frac{\delta^3}{16p^4} \right) \quad (1.14)$$

其中

$$v_z = \frac{1}{2}(v_{z_2} + v_{z_1}), \quad \Delta v_z = v_{z_2} - v_{z_1} \quad (1.15)$$

而 Δv , 则可视为 $v_z = \frac{p}{2}$ 共振线的禁带宽度. 式(1.14)给出了一阶不稳定区的禁带宽度与场梯度扰动之间的关系.

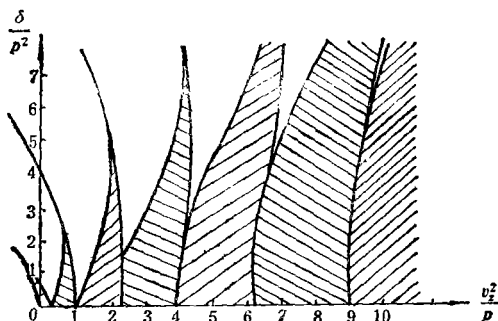


图1 马丢方程的稳定区和不稳定区

我们知道, 在稳定区域内, 方程(1.2)中的 v_z 为实数, 在不稳定区域内为虚数. 从式(1.2)可以看出, 两条边界曲线上的轴向自由振荡可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= a(\phi) \exp[i v_{z_1} \theta(\phi)] \\ z_{12} &= a(\phi) \exp[i(v_{z_1} - i \Delta v_z) \theta(\phi)] \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

设粒子穿越这条共振线的振幅增长为 G , 则 G 可表示为

$$G = \frac{z_{12}}{z_{11}} = \exp[\Delta v_z \theta] \quad (1.17)$$

由上式可得禁带宽度 Δv_z 为

$$\Delta v_z = \frac{\ln G}{\theta} \quad (1.17)'$$

其中 θ 是粒子穿越 $v_z = \frac{p}{2}$ 禁带所需要转过的角度. 假设粒子每圈能量增益为 ϵ_g , 与 Δv_z 相应的能量范围为 ΔE , 则要求粒子旋转

$$s = \frac{\Delta E}{\epsilon_g} \quad (1.18)$$

圈, 才能穿过这条禁带. 于是, 可将式(1.17)'中的 θ 表示为

$$\theta = 2\pi s \quad (1.19)$$

而式(1.17)'则化为

$$\Delta v_z = \frac{\epsilon_g \ln G}{2\pi \Delta E} \quad (1.20)$$

根据李雅普诺夫(Liapunov)的稳定性判据, 假如当“时间”趋于无穷时, 粒子与平衡轨道的偏离不趋于无穷, 则认为这条轨道是稳定的, 试图将这一判据用于实际, 则显得太宽; 相反, 当“时间”趋于无穷时, 要求粒子始终保持在平衡轨道附近才认为是稳定的话, 实际上又显得太严; 在工程上, 运动是否稳定常常要受到其它因素的影响, 比如, 在回旋加

速器中,粒子的轴向运动就要受到真空室大小的限制,即使当“时间”趋于无穷时,粒子不会跑到无穷远,也会打在真空室的壁上而损失掉,这种情况一旦出现,工程上就认为粒子运动是不稳定的.自然,实际上可以允许振幅增长多少,要具体问题具体分析.

二、无扰动方程的自由振荡

现在,我们试图通过无扰动方程自由振荡的分析,导出式(1.20)中的能量间隔 ΔE .注意到式(1.6),可把无扰动方程(1.1)写为

$$\ddot{z}_1 + g(\theta)z_1 = 0 \quad (2.1)$$

其中 $g(\theta)$ 满足强周期性条件

$$g\left(\theta + \frac{2\pi}{N}\right) = g(\theta)$$

N 是系统的对称度.方程(2.1)在一个周期后的解 $\begin{pmatrix} z_{1f} \\ \dot{z}_{1f} \end{pmatrix}$ 可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} z_{1f} \\ \dot{z}_{1f} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z_{1i} \\ \dot{z}_{1i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1i} \\ \dot{z}_{1i} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

其中 $\begin{pmatrix} z_{1i} \\ \dot{z}_{1i} \end{pmatrix}$ 是粒子的初值.要求解(2.2)是稳定的充分和必要条件是矩阵 M 的特征方程

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

有非零解,其中本征值 λ 是行列式方程

$$|M - \lambda I| = 0 \quad (2.4)$$

的两个根, I 是 2×2 阶单位矩阵;注意到 $\det M = 1$,方程(2.4)可写为

$$\lambda^2 - (M_{11} + M_{22})\lambda + 1 = 0 \quad (2.4)'$$

由此可得

$$\lambda = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{11} + M_{22}}{2}\right)^2 - 1} \quad (2.5)$$

令

$$\cos \mu_s = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} \quad (2.6)$$

则式(2.5)化为

$$\lambda = \cos \mu_s \pm i \sin \mu_s = e^{\pm i\mu_s} \quad (2.5)'$$

当,而且仅当 μ_s 为实数时,式(2.2)的解才是稳定的,由此可见 $\cos \mu_s$ 必须满足条件

$$\cos \mu_s \leq 1 \quad (2.7)$$

其中 μ_s 是一个周期内轴向自由振荡的相移,相应的自由振荡频率

$$\nu_s = \frac{N\mu_s}{2\pi} \quad (2.8)$$

可以看出,只要能设法求得迁移矩阵 M ,就可由式(2.2),(2.6)和(2.8)求得方程(2.1)的解和它的自由振荡频率.但是,由于周期系数 $g(\theta)$ 的复杂性,要解析地求出迁移矩阵 M ,

一般是不可能的, 通常需要对它进行数值分析. 不过, 我们打算这样作, 本文仅对方程(2.1)作一近似分析.

在径向扇回旋加速器中, 方程(2.1)中的 $g(\theta)$ 可表示为

$$g(\theta) = \begin{cases} n(\theta) & 0 \leq \theta < \alpha, \quad 2\delta - \alpha < \theta \leq 2\delta \\ \tan(\delta - \alpha) & \theta = \alpha, \quad \theta = 2\delta - \alpha \\ 0 & \alpha < \theta < 2\delta - \alpha \end{cases} \quad (2.9)$$

注意到式(1.6), 上式中的 $n(\theta)$ 又可近似地由公式

$$n(\theta) = -\frac{2E + E^2}{1 + b \cos \theta} \quad (2.10)$$

给出, 其中

$$b = \sin(\delta - \alpha) / \sin \alpha, \quad \delta = \frac{\pi}{N}, \quad \alpha = f\delta \quad (2.11)$$

2α 是磁体张角, E 是粒子能量 (以粒子静止质量为单位), f 是磁体系数.

从式(2.9)可以看出, $g(\theta)$ 是相当复杂的, 为此, 我们对 $g(\theta)$ 作如下近似

$$g(\theta) = \left. \begin{cases} n_1 & 0 \leq \theta < \alpha \text{ (区域 I)}, \quad 2\delta - \alpha < \theta \leq 2\delta \text{ (区域 III)} \\ n_2 & \alpha \leq \theta \leq 2\delta - \alpha \text{ (区域 II)} \end{cases} \right\} \quad (2.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= -\frac{N}{\pi f} \int_0^{\pi/N} n(\theta) d\theta \\ &= -\frac{2N(2E + E^2)}{\pi f(1 - b^2)^{1/2}} \arctan \left[\frac{\left(1 - \cos \frac{\pi}{N}\right)(1 - b)}{\left(1 + \cos \frac{\pi}{N}\right)(1 + b)} \right]^{1/2} \\ n_2 &= \frac{N}{\pi(1 - f)} \tan \left[\frac{\pi}{N} (1 - f) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

n_1 和 n_2 是 $g(\theta)$ 在相应区域内的平均值, 上式表明 $g(\theta)$ 为分段常数. 在这种情况下, 我们可以求得它的解析结果.

在一个周期内的迁移矩阵 M 可表示为

$$M = M_3 M_2 M_1 \quad (2.14)$$

其中 M_1 , M_2 和 M_3 分别是区域 I, II 和 III 的迁移矩阵, 且

$$M_1 = M_3 = \begin{pmatrix} \text{ch } \eta & (-K_1)^{-\frac{1}{2}} \text{sh } \eta \\ (-K_1)^{\frac{1}{2}} \text{sh } \eta & \text{ch } \eta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos \psi & K_2^{-\frac{1}{2}} \sin \psi \\ -K_2^{\frac{1}{2}} \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{n_1}{r_0^2} \\ K_2 &= \frac{n_2}{r_0^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{2\pi}{N} n_2^{\frac{1}{2}} (1+a)(1-f) \\ \eta &= \frac{\pi}{N} (-n_1)^{\frac{1}{2}} (1+a)f \\ a &= (b \sin \delta) / \delta \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

把式(2.15), (2.16)代入式(2.14), 然后, 再将式(2.16)对能量 E 进行微分, 可得

$$\begin{aligned} \Delta\mu_z &= \frac{-\Delta E}{\sin \mu_z} \left\{ \left[\cos \psi \operatorname{sh} 2\eta - \frac{n_1+n_2}{(-n_1 n_2)^{1/2}} \sin \psi \operatorname{ch} 2\eta \right] \frac{d\eta}{dE} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_1-n_2}{4n_2^{\frac{1}{2}} (-n_1)^{3/2}} \sin \psi \operatorname{sh} 2\eta \frac{dn_1}{dE} \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dE} &= -\frac{\pi}{2N} (-n_1)^{-\frac{1}{2}} (1+a)f \frac{dn_1}{dE} \\ \frac{dn_1}{dE} &= -\frac{4N(1+E)}{\pi f(1-b^2)^{1/2}} \operatorname{arc tan} \left(\left[\frac{(1-\cos \frac{\pi}{N})(1-b)}{(1+\cos \frac{\pi}{N})(1+b)} \right]^{1/2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

由式(2.8), 可得

$$\Delta v_z = \frac{N}{2\pi} \Delta\mu_z \quad (2.20)$$

三、结果 和 讨 论

从实际出发, 我们考虑 $p=k=1$ 的情形. 轴向自由振荡频率 $\nu_z = \frac{1}{2}$ 的禁带与这个一阶不稳定区直接有关, 其禁带宽度为

$$\Delta v_z = \frac{1}{2\nu_z} \left(\delta - \frac{\delta^3}{16} \right) \quad (3.1)$$

(见式(1.14)). 当粒子穿越这条禁带时, 振幅要迅速增长; 从实际出发, 假如真空室的轴向空间只允许振幅增长2倍的话, 式(1.20)就可化为

$$\Delta v_z = \frac{e_0 \ln 2}{2\pi \Delta E} \quad (3.2)$$

其中 ΔE 由式(2.18)给出. 从式(1.10)和(3.1)可以看出, 一旦知了禁带宽度, 就可求出一次谐波梯度振幅

$$b_1 = \frac{2B}{r_0} \nu_z \Delta v_z \quad (3.3)$$

其中略去了式(3.1)中的 δ^3 项, 而

$$r_0 = \frac{c(2E+E^2)^{1/2}}{\omega(1+E)} \quad (3.4)$$

$$\omega = 9.649 \times 10^6 \frac{BQ}{A} \quad (3.5)$$

(磁场强度 B 的单位是千高斯, 频率 ω 的单位是赫兹) B 是半径 r_0 处的磁场强度, Q/A 是粒子的荷质比, c 是光速.

线性分析表明, 对于扇角为 52° 的四度对称径向扇回旋加速器, 粒子将在能量 $E=0.21$ 附近穿过 $\nu_r = \frac{1}{2}$ 共振线. 我们对 $N=4$, $\alpha=26^\circ$, $Q/A=1$, $\epsilon_0=0.001$ 和 $B=16$ 千高斯的情形, 由式(2.18), (2.20), (3.1), (3.2) 和 (3.3), 可求得一次谐波梯度振幅 $b_1=1.58$ 高斯/厘米.

在径向扇回旋加速器中, 扰动场梯度的径向分量一般是很弱的, 且主要集中在磁体的边缘部分. 本文分析表明, 当粒子穿越 $\nu_r = \frac{1}{2}$ 共振线时, 只要主平面内的一次谐波梯度振幅不超过 1.58 高斯/厘米, 则粒子的轴向运动就是稳定的.

参 考 文 献

1. Chihiro Hayashi, *Non-Linear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill Book Company, (1964).

On Mathieu Equation's First-Order Instable Zone and Its Application in Cyclotron

Luo Shi-yu

(*Institute of Modern Physics, Academia Sinica, Lanzhou*)

Abstract

The $\nu_r = \frac{1}{2}$ resonance was analyzed approximately, by using stability of Mathieu equation's solutions and method of transfer matrix, and gradient amplitude of a critical perturbed field was derived.