

# 星系螺旋结构的气体激波理论\*

胡文瑞

(北京中国科学院力学研究所, 1980年4月20日收到)

## 摘 要

本文用星际气体自引力星系激波来解释星系的螺旋结构, 恒星的扰动引力场并非必要条件. 我们首先证明, 即使扰动引力场为零, 也可以存在局部的星系激波解. 这种解要求  $|w_{\theta 0}| > a$ , 而且只要气体的密度反差比较大, 就只能用激波解来解释螺旋结构. 用叠代的方法求出了星际气体的自引力激波宏图. 对一种特定的扰动引力场模拟气体自引力, 可以在速度平面上定性分析激波解的特性. 初始原星系盘中的物质分布不均匀性, 通过缠卷过程、不稳定性增长和波动叠加, 可以发展成星系激波宏图. 这样, 对星系激波的起源, 演化和维持给出一个完整的图象. 利用这个图象, 可以解释星系螺旋结构的大量观测结果和分类特性.

## 一、前 言

星系螺旋结构的起源和演化是一个重要的天体物理课题<sup>[1]</sup>. 近十余年来, 恒星的密度波理论有了迅速的发展<sup>[2]</sup>. 若假设存在准定常的螺旋引力场, 在较差自转的作用下, 可求出螺旋形的波动解. 密度波理论主要关心螺旋结构的维持问题. 密度波理论也计算星系激波的维持, 但这种激波必须由恒星的螺旋形扰动引力场产生出来. 密度波理论取得了很大成功, 促进了许多研究成果, 也引起了不少争论.

星系螺旋结构可能主要是一种气体现象, 因此有可能用星际气体本身来解释其起源和维持, 而不必借助于恒星的扰动引力场. 气体理论曾经流行过很长时间, 但都未能很好解释缠卷困难. 如采用气体的波动过程来解释螺旋结构, 就可以克服物质臂的疑难. 近年来, 我们提出用星际气体自引力激波来解释星系螺旋结构的起源、演化和维持. 试图建立星系螺旋结构的气体激波理论.

观测表明, 在盘状星系的旋臂中, 气体和尘埃的密度, 以及磁场强度都比臂际空间的值要大得多, 很象是某种非线性波动现象. 自从藤本克昭首先提出星系激波的概念以来<sup>[3]</sup>, 在密度波理论中广泛研究了激波的维持<sup>[4-9]</sup>, 和随时间的变化规律<sup>[10, 11]</sup>. 所有这些计算都是非自洽的局部星系激波解. 除个别采用分析讨论外<sup>[9]</sup>, 其余都是数值计算结果. 因此, 需要改进非自洽和局部假设这些近似条件. 同时, 还应该寻求一些简单的分析解, 以补偿数值计算的局限性.

密度波理论认为, 星系激波只能由恒星的扰动引力场产生, 当扰动引力场强度小于某一阈值后, 不存在双周期的星系激波解. 我们必须指出这个计算结论的局限性, 并证明, 没有

\* 钱伟长推荐.

恒星扰动引力场也可以存在星系激波解. 基于这个分析结果, 可以逐渐地讨论星际气体的自引力星系激波的维持和演化. 利用气体激波宏图, 能够解释正常螺旋星系的演化和分类特征, 以及大量的观测事实.

## 二、无扰动引力场的星系激波

象通常星系激波研究中那样假设: 在等角速度  $\Omega_p$  旋转的坐标系中, 流动是定常的; 螺旋结构是紧卷的; 流线与圆轨道的偏离不大; 等效声速  $a$  是轴对称的. 但是, 没有假设存在恒星扰动引力场. 在柱坐标系  $(r, \theta)$  中, 记  $\phi = \theta - \Omega_p t$ , 则旋转坐标系  $(r, \phi)$  中的方程组为

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - 2\vec{v} \times \vec{\Omega}_p = -\frac{a^2}{\sigma} \nabla \sigma + \nabla \left( \frac{r^2}{2} \Omega_p^2 \right) + \vec{f} \quad (2.2)$$

其中  $\sigma$  为面密度,  $a$  为等效声速,  $\vec{f}$  为引力. 将所有量分为基态值与扰动值之和:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0(r) + \sigma_1(r, \phi), & u &= u_1(r, \phi) \\ v &= [\Omega(r) - \Omega_p]r + v_1(r, \phi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

基态是轴对称的, 满足平衡关系

$$-\Omega^2(r)r = -\frac{a^2}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{dr} + f_{0r} \quad (2.4)$$

为了方便地讨论扰动关系, 作坐标变换

$$\begin{aligned} \xi &= -\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \sin i + \phi \cos i \\ \eta &= \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \cos i + \phi \sin i \end{aligned} \quad (2.5)$$

$r_0$  为参考半径. 螺旋坐标中的速度分量为

$$w_{\xi_0} = (\Omega - \Omega_p)r \cos i, \quad w_{\eta_0} = (\Omega - \Omega_p)r \sin i \quad (2.6)$$

$$w_{\xi} = -u_1 \sin i + v_1 \cos i, \quad w_{\eta} = u_1 \cos i + v_1 \sin i \quad (2.7)$$

$(w_{\xi_0}, w_{\eta_0})$  为基态流场,  $(w_{\xi}, w_{\eta})$  为扰动流场. 紧卷条件下 ( $\tan i \ll 1$ ) 的扰动方程组为<sup>[4, 8]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{(w_{\eta} + w_{\eta_0})^2 - a^2}{w_{\eta} + w_{\eta_0}} \frac{\partial w_{\eta}}{\partial \eta} = 2\Omega r w_{\xi} + f_{1\eta} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} (w_{\eta} + w_{\eta_0}) \frac{\partial w_{\xi}}{\partial \eta} = -\left(\frac{\kappa^2}{2\Omega}\right) r w_{\eta} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} (\sigma_0 + \sigma_1)(w_{\eta} + w_{\eta_0}) = \sigma_0 w_{\eta_0} \end{cases} \quad (2.10)$$

无扰动引力时  $f_{1\eta} = 0$ , 上式中  $\kappa^2 = 2\Omega^2 \left[ 1 + \frac{r}{2\Omega} \frac{d\Omega}{dr} \cos^2 i \right]$ .

无扰动引力时, 可在速度平面  $(w_{\xi}, w_{\eta})$  上讨论星系激波的特性<sup>[12]</sup>. 由 (2.8) 和 (2.9) 得到

$$\frac{dw_{\eta}}{dw_{\xi}} = -\left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{(w_{\eta} + w_{\eta_0})^2 w_{\xi}}{w_{\eta}(w_{\eta} + w_{\eta_0} + a)(w_{\eta} + w_{\eta_0} - a)} \quad (2.11)$$

在速度平面上, 方程 (2.11) 的积分曲线由奇点的性质决定. 方程 (2.11) 有三个奇点:  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(0,a-w_{\eta_0})$ ,  $P_3(0,-a-w_{\eta_0})$ . 奇点附近的方程为

$$P_1: \quad \frac{dw_{\eta}}{dw_{\xi}} = -\left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{w_{\eta_0}^2}{w_{\eta_0}^2 - a^2} \frac{w_{\xi}}{w_{\eta}} \quad (2.12)$$

$$P_2: \quad \frac{dw_{\eta}}{dw_{\xi}} = 2\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{a}{w_{\eta_0} - a} \frac{w_{\xi}}{w_{\eta} + w_{\eta_0} - a} \quad (2.13)$$

$$P_3: \quad \frac{dw_{\eta}}{dw_{\xi}} = -2\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{a}{w_{\eta_0} + a} \frac{w_{\xi}}{w_{\eta} + w_{\eta_0} + a} \quad (2.14)$$

在  $w_{\eta_0} > a$  时, 三个奇点附近的积分曲线族为

$$P_1: \quad w_{\eta}^2 + \left[ \left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{w_{\eta_0}^2}{w_{\eta_0}^2 - a^2} \right] w_{\xi}^2 = c_1 \quad (2.15)$$

$$P_2: \quad (w_{\eta} + w_{\eta_0} - a)^2 - \left[ 2\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{a}{w_{\eta_0} - a} \right] w_{\xi}^2 = c_2 \quad (2.16)$$

$$P_3: \quad (w_{\eta} + w_{\eta_0} + a)^2 + \left[ 2\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{a}{w_{\eta_0} + a} \right] w_{\xi}^2 = c_3 \quad (2.17)$$

这时,  $P_1$  为中心奇点,  $P_2$  为鞍点,  $P_3$  为中心奇点; 积分曲线的全局形态如图 1a 所示. 类似地,  $|w_{\eta_0}| < a$  时,  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  分别为鞍点、中心奇点、中心奇点; 积分曲线的全局形态如图 1b 所示.  $w_{\eta_0} < 0$  且  $|w_{\eta_0}| > a$  时,  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  分别为中心奇点. 中心奇点和鞍点, 其形态如图 1c 所示.

对于正则点, 方程 (2.1) 的积分曲线族为

$$w_{\eta}^2 - 2a^2 \ln |w_{\eta} + w_{\eta_0}| - \frac{2a^2 w_{\eta_0}}{w_{\eta} + w_{\eta_0}} + \left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 w_{\xi}^2 = c \quad (2.18)$$

其中  $c$  为积分常数. 特别重要的是  $w_{\eta_0} > a$  时的分界环线  $\Gamma$ , 代入  $P_2$  点的值就得到

$$w_{\eta}^2 - 2a^2 \ln \left| \frac{w_{\eta} + w_{\eta_0}}{a} \right| - 2a^2 \frac{w_{\eta_0}}{w_{\eta} + w_{\eta_0}} + \left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 w_{\xi}^2 = (w_{\eta_0} - a)^2 - 2aw_{\eta_0} \quad (2.19)$$

由 (2.18) 也可得到图 1 的形态.

方程 (2.8), (2.9) 表明, 速度平面有三条奇异线:  $w_{\eta} = -w_{\eta_0}$ ,  $w_{\eta} = -(w_{\eta_0} \pm a)$ . 积分曲线通过这些奇异线时, 走向改变方向. 积分曲线的走向如图 1 的箭头所示. 只有  $|w_{\eta_0}| > a$  时, 才能通过分界环线得到光滑地跨过声速点 (鞍点) 的解, 超声速流动再通过法向速度间断而跳跃到亚声速, 形成如图 2 所给出的周期解. 在  $|w_{\eta_0}| < a$  时, 声速线  $w_{\eta} + w_{\eta_0} = a$  是奇异线, 不存在有物理意义的周期解.  $|w_{\eta_0}| > a$  时, 分界线环以内的积分曲线满足条件  $|w_{\eta} + w_{\eta_0}| > a$ , 是完全超声速流动; 而分界环线以外的解都不能光滑地跨过奇异线, 不可能构成合理的周期解.

根据 (1.6) 式, 条件  $|w_{\eta_0}| > a$  可以写成

$$|\Omega - \Omega_p| r \sin i > a$$

这表明, 共转圈附近没有局部激波解. 图样速度  $\Omega_p$  过大, 或者倾角  $i$  过小, 都会影响星系激波的延伸范围. 在上述分析中, 不要求存在恒星的扰动引力场. 所以, 恒星扰动引力场不是形成星系激波的必要条件. 可以估计, 弱扰动引力场不会改变星系激波的上列定性性质<sup>[1]</sup>.

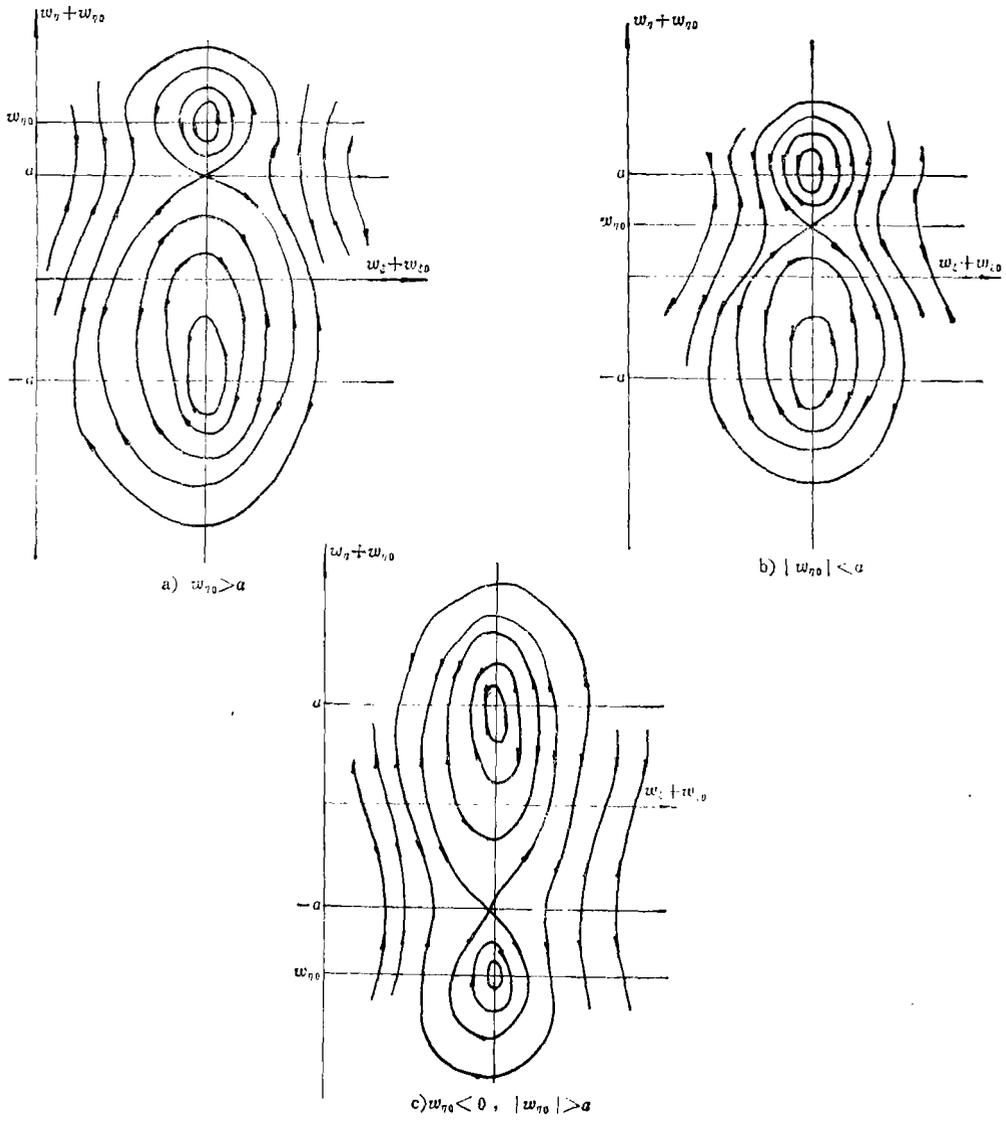


图 1 无扰动引力场时速度平面中积分曲线的全局形态的示意图。

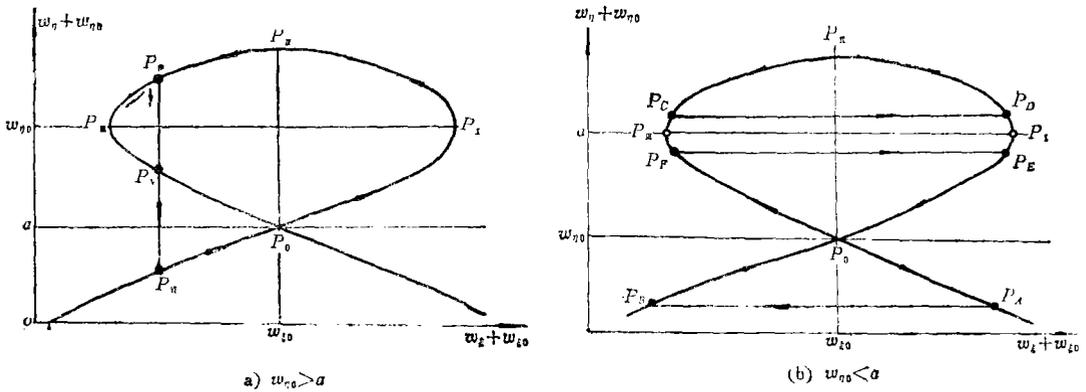


图 2 无扰动引力场时,  $|w_{\eta_0}| > a$  的分界线环上对应的局部激波解。

将速度平面的结果再回到物理平面中, 就可以得到完整的星系激波解. 讨论  $w_{\eta_0} > a$  时上半平面  $w_{\eta} + w_{\eta_0} > 0$  的分界线环. 选择  $P_2$  的坐标为

$$\eta = \eta_0 \text{ 时 } \quad w_{\xi} = 0, \quad w_{\eta} = a - w_{\eta_0} \quad (w_{\eta_0} > a)$$

由 (1.8) 或 (1.9) 就可得到

$$\left. \begin{aligned} \eta - \eta_0 &= - \int_0^{w_{\xi}} \frac{2\Omega}{\kappa^2 r} \frac{w_{\eta} + w_{\eta_0}}{w_{\eta}} dw_{\xi} \\ \eta - \eta_0 &= \int_{a-w_{\eta_0}}^{w_{\eta}} \frac{1}{2\Omega r} \frac{w_{\eta} + w_{\eta_0} + a}{w_{\eta} + w_{\eta_0}} \frac{w_{\eta} + w_{\eta_0} - a}{w_{\xi}} dw_{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

其中  $w_{\xi}$  和  $w_{\eta}$  的关系由 (2.19) 给出. 由 (2.20) 的简单积分就求出流场与坐标  $\eta$  的关系. 其典型的分布如图 3 所示. 在具体计算星系激波时, 选用 Schmidt (1965) 银河系模型作为基态<sup>[13]</sup>, 并假设等效声速为常数  $a = 8$  公里/秒, 螺旋线倾角  $i = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ , 图样速度  $\Omega_p = 6$  公里/秒·千秒差距. 星系激波宏图有较大的延伸范围. 图 3a 中  $w_{\eta}$  剖面的法向间断清晰可见, 图 3c 表明气体密度反差可达 10 倍左右, 图 3d 验证了局部解近似是可取的.

鞍点  $P_2$  在物理平面中也有两个实方向. 对 (2.9) 式取极限, 并利用罗比达法则就得到

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \left( \frac{\partial w_{\eta}}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{\partial w_{\eta_0}}{\partial \eta} \right)_{\eta = \eta_0} \pm \sqrt{2(\kappa r)^2 \frac{w_{\eta_0} - a}{a} + \left( \frac{\partial w_{\eta_0}}{\partial \eta} \right)_{\eta = \eta_0}^2} \right] \quad (2.21)$$

在求解 (2.20) 时, 由  $P_2$  点起始向两边积分时, 先要用 (2.21) 式差值一步, 跨过奇点.

要说明星系激波的机理需要阐明在什么条件下会产生跨声速的光滑过渡, 以及在什么条件下会出现激波间断. 光滑的跨声速流要求有调节机制. 类比于气体动力学中的拉伐尔喷管, 星系激波中是由扰动力来调制. (2.8) 式右端为扰动离心力与扰动外力之和, 当它们之和变号时就可能有光滑通过鞍点的流动解. 一旦得到了光滑过渡的超声速流动, 就只能通过法向速度间断跳回亚声速区域, 构成周期解.

$w_{\eta_0} > a$  时有两类解: 分界线环以内的完全超声速流动解, 或激波间断解. 每一个连续的周期解都有一最大密度反差  $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ . 利用连续方程 (2.10), 周期解密度差的上限为

$$\Delta\sigma_1 = \sigma_0 \left( \frac{w_{\eta_0}}{a} - \frac{w_{\eta_0}}{w_{\eta_0} + w_{\eta \max}} \right) \quad (2.22)$$

在感兴趣的范围内, 大体上有

$$\Delta\sigma_1/\sigma_0 \lesssim 2.5$$

(2.22) 给出了完全超声速流动周期解所可能有的最大密度变化. 实际上, 星系中观测到的密度变化比这个值大, 这时就只能用星系激波机制来解释.

### 三、星际气体自引力星系激波

由于星系激波产生很强的压缩, 在激波附近气体密度急剧增加所形成的引力场不小, 它会对流动产生相当的影响. 所以, 研究自洽的气体激波解是人们很关心的问题. 这时除了要求解方程 (2.8) — (2.10) 之外, 还必须考虑气体本身的扰动引力  $f_1 = -\partial\psi_1/\partial\eta$ , 而扰动引力势  $\psi_1$  应该满足泊松方程

$$\Delta\psi_1 = 4\pi G\sigma_1\delta(z) \quad (3.1)$$

可以设想, 如果扰动引力  $f_1$  不是很强时, 星系激波的性质应该与前一节给出的定性特征相

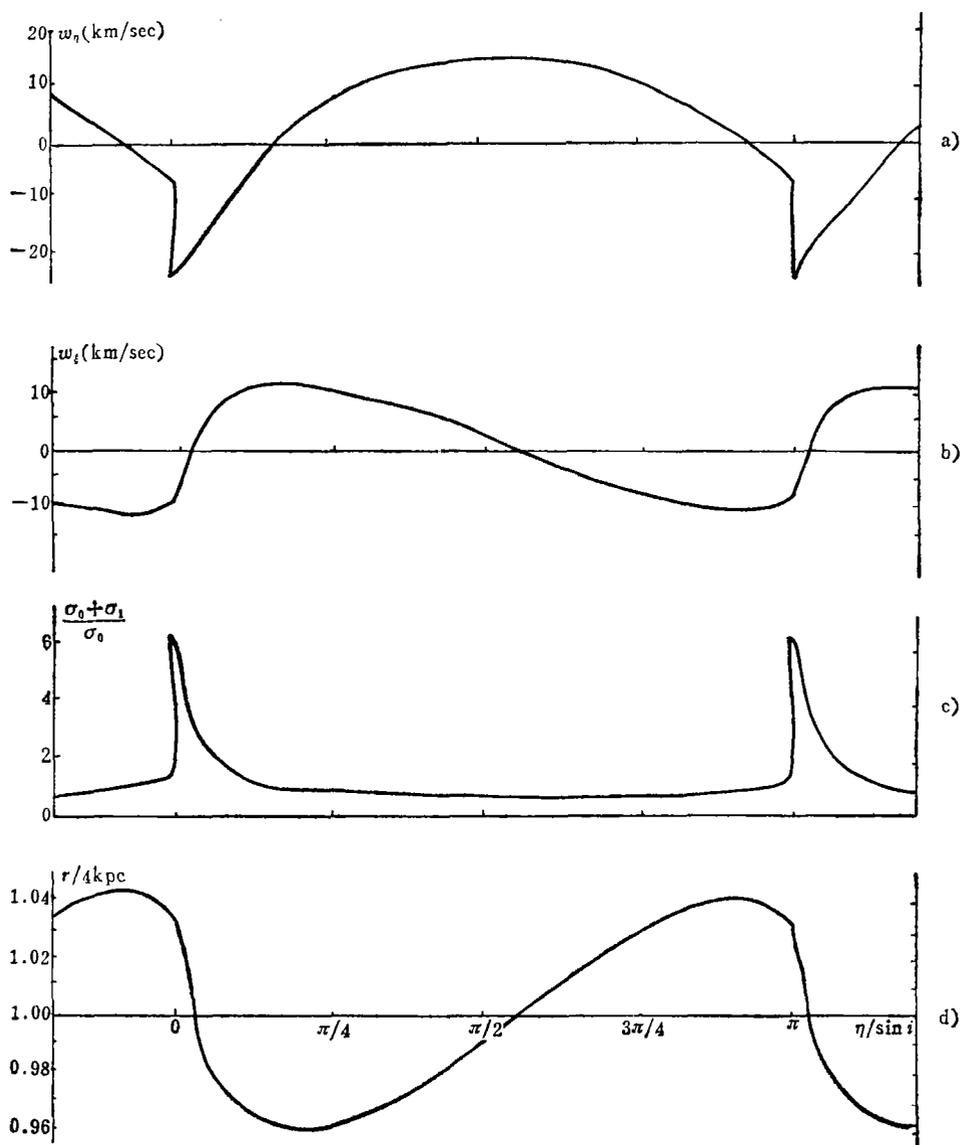


图 3 无扰动引力场时星系激波在  $r=4\text{kpc}$  处的局部解, 其中  $\Omega_p=6\text{km/sec}\cdot\text{kpc}$ ,  $w_{z0}=186.9\text{km/sec}$ ,  $w_{\eta 0}=26.6\text{km/sec}$ .

似, 但  $\partial\psi_1/\partial\eta$  在激波阵面附近并不很小.

可以用叠代的方法来求解这类问题<sup>(14)</sup>. 令

$$\begin{cases} (\sigma_0 + \sigma_1^{(n)}) (w_{\eta 0} + w_{\eta}^{(n)}) = \sigma_0 w_{\eta 0} & (3.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(w_{\eta}^{(n)} + w_{\eta 0})^2 - a^2}{w_{\eta 0} + w_{\eta}^{(n)}} \frac{dw_{\eta}^{(n)}}{d\eta} = 2\Omega r w_{\xi}^{(n)} - \frac{\partial\psi_1^{(n)}}{\partial\eta} \Big|_{z=0} & (3.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (w_{\eta}^{(n)} + w_{\eta 0}) \frac{dw_{\xi}^{(n)}}{d\eta} = -\left(\frac{\kappa^2 r}{2\Delta\Omega}\right) w_{\eta}^{(n)} & (3.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\psi_1^{(n)} = 4\pi G\sigma^{(n)}\delta(z) \\ \psi_1^{(n)}|_{z\rightarrow\infty} = 0, \quad \psi_1^{(n)}|_{r\rightarrow\infty} = 0 & (3.5) \end{cases}$$

上标  $n=0,1,2,\dots$  为叠代次数, 取  $\psi_1^{(0)}=0$ , 则第 0 次流场就是前一节无扰动引力场的结果. 在这样的叠代过程中, 计算流场时仍保留了局部解近似, 但是这些局部解要通过泊松方程而互相联系起来, 具有一定的全局性.

可以对方程组(3.2)–(3.4), 以及边值问题(3.5)进行数值计算. 方程组(3.2)–(3.4)是在螺旋坐标  $(\xi, \eta)$  中计算的, 泊松方程(3.5)在柱坐标  $(r, \theta, z)$  中计算. 在每次叠代过程中, 需要将坐标系不断地进行变换. 计算了银河系的大尺度星系激波, 选用 Megzer(1972) 气体分布模型作为气体的平均密度分布<sup>[16]</sup>. 计算表明, 问题具有很好的收敛性. 流场计算叠代 4~5 次就可得到很好的结果, 引力场收敛得略差些.

流场分布的计算结果与图 3 的剖面很类似. 图 4 为引力势分布的各次叠代情况. 图 5 为气体密度在银盘中的分布情况, 它给出了星系激波的宏图.

在一些星系激波的计算中, 常常把声速点相对于扰动引力场分布的位置作为一个自由度, 以调整激波前后的动量关系, 对每个局部解, 可以任意选择其初始声速点的位置. 为了

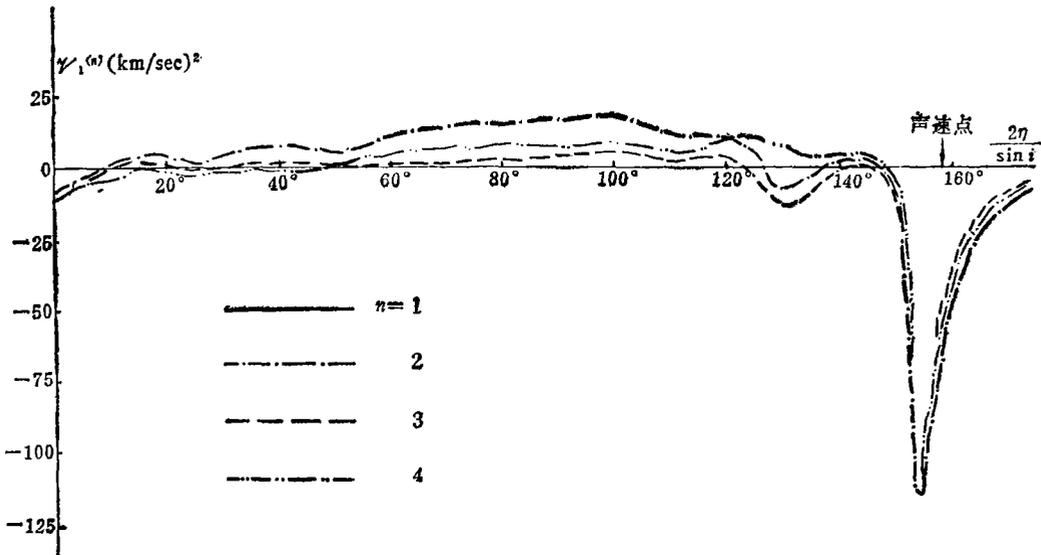


图 4 气体自引力势的叠代解,  $r=10\text{kpc}$ ,  $\Omega_p=5\text{km/sec}\cdot\text{kpc}$ .

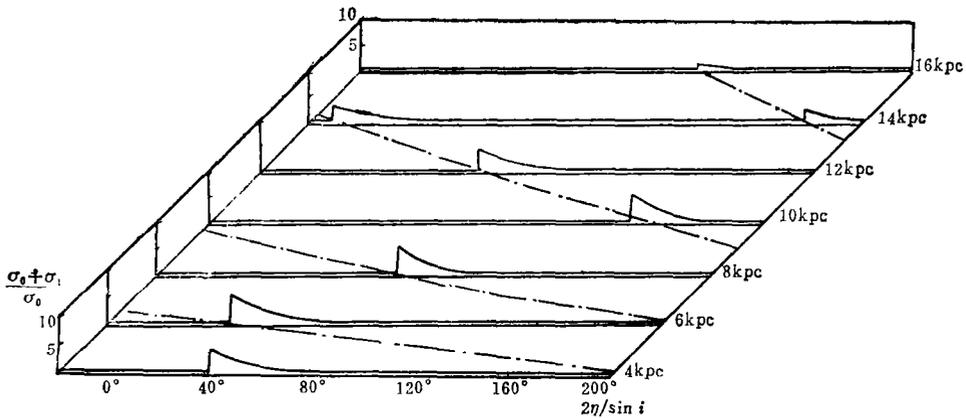


图 5 银盘中气体密度的分布, 点划线为声速线,  $\Omega_p=5\text{km/sec}\cdot\text{kpc}$ .

维持激波宏图, 应要求每个半径处的激波位置与宏图的位置相一致. 在密度波理论中, 这两者是很难同时满足的. 在气体自引力星系激波中, 扰动引力势在声速点附近有很大的梯度, 有很大的调整潜力可供选择.

这样的方法也可求密度波的自洽激波<sup>[10]</sup>.

要准确地用分析方法来求解运动方程组和泊松方程, 显然是很困难的. 为了定性分析这类解的定性特征, 我们可以考虑某种特定形式的扰动力, 用这种力来模拟气体的自引力, 这种模拟当然不会严格满足泊松方程, 它只能看成是一定条件下问题的近似处理, 这样, 就可以用分析的方法来讨论扰动引力场对星系激波的影响.

假设扰动引力场  $\delta$  扰动密度满足关系<sup>[17]</sup>

$$f_{1\eta} = -\alpha(r, \varphi) \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = -\alpha \frac{w_\eta}{w_\eta + w_{\eta_0}} \quad (3.6)$$

将 (3.6) 代入 (2.8) 后, 可得到速度平面上的关系

$$\frac{dw_\eta}{dw_\xi} = -\left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{(w_\eta + w_{\eta_0})^2 w_\xi - \left(\frac{\alpha}{2\Omega r}\right) (w_\eta + w_{\eta_0})}{w_\eta (w_\eta + w_{\eta_0} + a) (w_\eta + w_{\eta_0} - a)} \quad (3.7)$$

方程 (3.7) 可化为一类 Abel 微分方程, 没有简单的积分. 为了分析流动特征, 可利用微分方程的定性理论, 讨论 (3.7) 式的奇点性质.

先讨论奇点  $P_1(0, 0)$ , 记  $A_1 = \alpha/2\Omega r w_{\eta_0} > 0$ .  $P_1$  附近的方程为

$$\frac{dw_\eta}{dw_\xi} = -\left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{w_{\eta_0}^2}{w_{\eta_0}^2 - a^2} \frac{w_\xi - A_1 w_\eta}{w_\eta} \quad (3.8)$$

对  $w_{\eta_0} > a$ , 记  $k_1^2 = \left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 \frac{w_{\eta_0}^2}{w_{\eta_0}^2 - a^2} > 0$ , (3.8) 的特征根为

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{2} (A_1 \pm i \sqrt{4k_1^2 - A_1^2}) \quad (3.9)$$

$A_1 = 0$  时,  $\lambda_{1,2}^{(1)}$  为一对共轭纯虚数, 奇点为中心型, 就是上一节的结果. 若扰动引力不很强,

$$\alpha < \frac{8\Omega^2 r}{\kappa} \frac{w_{\eta_0}^2}{\sqrt{w_{\eta_0}^2 - a^2}} \quad \text{或} \quad 2k_1 > A_1 \quad (3.10)$$

则特征根为一对共轭复数, 此奇点为稳定焦点; 否则, 特征根为一对同号实数,  $P_1$  为结点, 扰动引力场仅为轴对称基态场的百分之几时, (3.10) 式总是满足的.

当  $|w_{\eta_0}| < a$  时, 特征根为异号实根,  $P_1$  为鞍点.

类似地可以讨论  $P_2(w_2, a - w_{\eta_0})$  和  $P_3(w_3, -a - w_{\eta_0})$ , 其中  $w_2 = \alpha(a - w_{\eta_0})/2\Omega r a$ ,  $w_3 = \alpha(a + w_{\eta_0})/2\Omega r a$ . 不难证明,  $P_3$  为稳定的焦点. 当  $w_{\eta_0} > a$  时,  $P_2$  为鞍点; 当  $|w_{\eta_0}| < a$  时, 若

$$\alpha < 4 \left(\frac{\Omega}{\kappa}\right) \frac{\Omega r a^2}{w_{\eta_0}} \sqrt{\frac{2a}{a - w_{\eta_0}}}$$

则  $P_2$  为焦点, 否则  $P_2$  为结点.

图 6 给出了几种情形时积分曲线的全局形态和走向. 速度平面中仍然有三条奇异线, 奇异线两边积分曲线的走向改变方向. 与无扰动引力场时的情形 (见图 1) 相比, 最大的差别是不再有封闭光滑积分曲线族.

在  $|w_{\eta_0}| < a$  时, 所有积分曲线都不能光滑地跨过声速奇异线, 亚声速基本流时, 不存在稳定的定常周期解. 对  $w_{\eta_0} > a$ , 只有通过鞍点  $P_2$  的积分曲线才能光滑地跨过声速. 只有扰动引力场不很强, 满足 (3.10) 时, 才存在由超声速流经过法向间断跳跃到亚声速流的可能性, 存在激波间断还要求通过鞍点对应于亚声速加速到超声速流的那条积分曲线上, 它应与直线  $w_\xi = w_3$  在上半平面相交, 当扰动引力较大时,  $\alpha$  就较大,  $w_3$  也就大. 当  $\alpha$  很小时, 解的行为接近于无引力激波的性质; 而当  $\alpha$  超过某个临界值时, 或者由于奇点  $P_1$  的性质发生

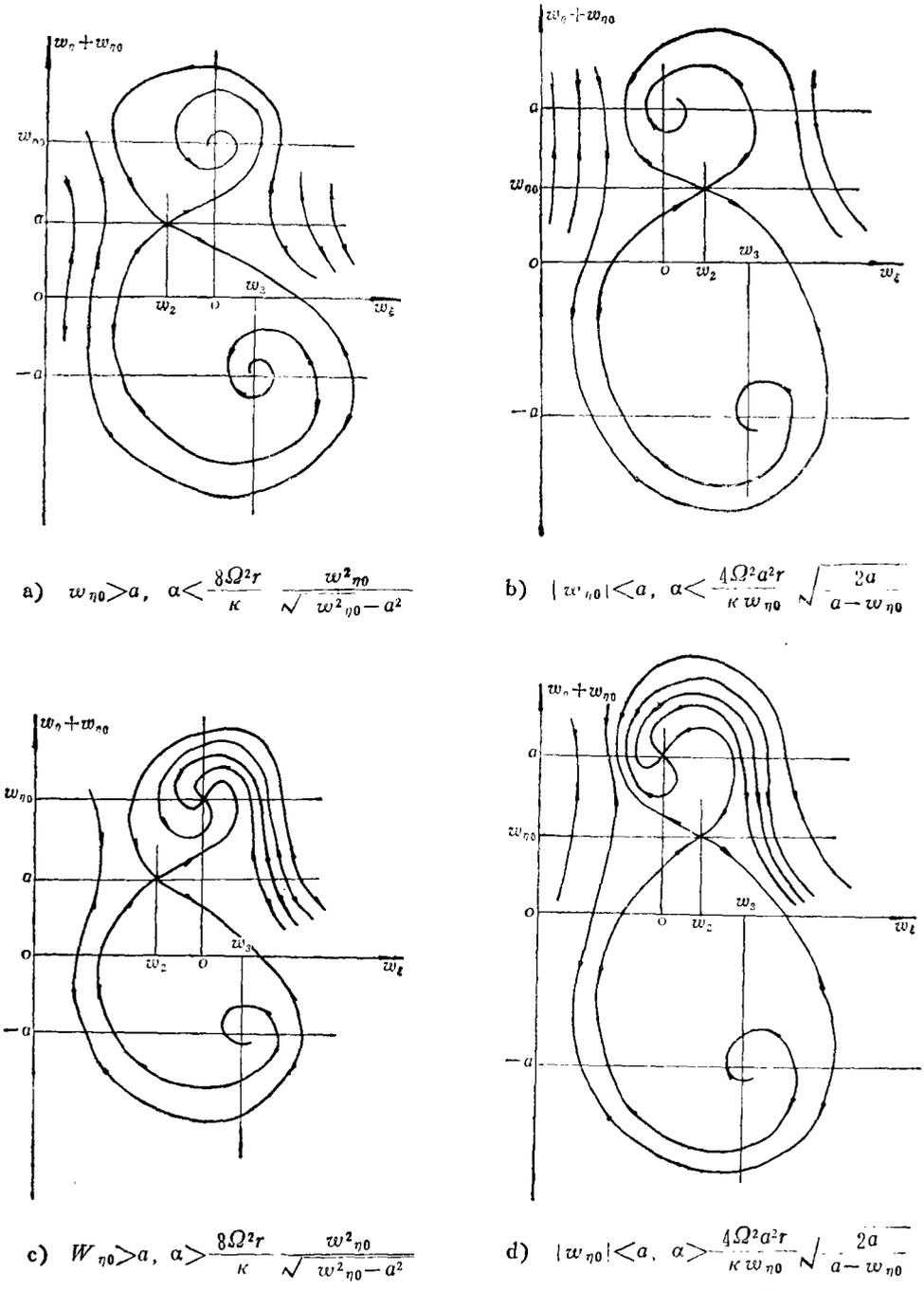


图 6 特定引力场 (3.6) 时速度平面上特分曲线的全局形态示意图.

变化, 或者由于不可能通过法向间断联结超声速流与亚声速流, 使局部激波解不存在. 这些定性特征与星际气体自引力激波的计算结果<sup>[14]</sup>很类似.

通过这些分析和计算的结果可以看出, 图样速度  $\Omega_p$  是个较重要的参数. 密度波理论中, 固定图样速度  $\Omega_p$  以后, 由计算发现, 具有双周期星系激波解要求扰动恒星引力场的强度超过某一阈值, 事实上对  $\Omega_p$  也有某一阈值. 即使扰动场为零, 调整  $\Omega_p$  小于某一阈值也可以求出双周期的星系激波解. 对于比较大的  $\Omega_p$  值, 还可以用完全超声速流动解与局部周期解组成具有双周期的激波宏图解. 每一个这样的解都还只是提供了一种维持星系螺旋结构的可能性, 还需要通过观测来检验和取舍.

#### 四、稳定性分析

星系激波的稳定性可以用激波进化条件来分析<sup>[18]</sup>. 我们利用 Ляпунов 函数研究了方程 (2.8), (2.9) 的周期解的稳定性, 可以证明下述的定理<sup>[19, 20]</sup>.

**定理 1** 对于微分方程组

$$\frac{(y+y_0)^2-a^2}{y+y_0} \frac{dy}{dx} = A(x)z + G(x), \quad (y+y_0) \frac{dz}{dx} = B(x)y \quad (4.1)$$

其中  $a$  为常数, 若存在常数  $A_0, B_0, K$  使

$$\begin{cases} A(x) > A_0 > 0, & B(x) < B_0 < 0, & 0 < y_0 < a \\ |G(x)| < K, & K > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

则区域

$$|y| < y_0, \quad |y+y_0| < a \quad (4.4)$$

当中, (4.1) 不存在稳定的周期解.

**定理 2** 对于方程组 (4.1), 其中  $A > 0, B < 0, a^2 < y_0^2$ , 如果有解  $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$ , 在条件

$$y_0 + y^{(0)}(x) > a, \quad |y^{(0)}(x)| \leq Y, \quad |G(x)| < K$$

时, 下列不等式

$$K^2 \left\{ \frac{(y_0 - Y)^2 + a^2}{[(y_0 - Y)^2 - a^2]^2} \right\}^2 < - \frac{4AB}{(y_0 + Y)[(y_0 + Y)^2 - a^2]} \quad (4.5)$$

保证  $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$  附近的解或者停留在它附近, 或在它附近以绕圈的方式逐渐地离开.

应用这两个定理可以讨论星系激波和星系密度波的稳定性. 我们在前面已经指出, 基本亚声速流动时不存在局部激波解, 利用定理 2 来讨论无扰动引力场时的激波. 当扰动引力场为零时, 不等式 (4.5) 恒满足. 因此, 所有绕奇点  $P_1$  的封闭曲线, 包括分界线环在内, 都是方程 (2.8) 和 (2.9) 的周期解. 根据定理 2, 这些周期解都是稳定的或准稳的.

在密度波理论中, 引力  $G(x)$  为周期函数, 在原点  $(0, 0)$  附近的解也是周期的<sup>[8]</sup>. 利用定理 2 也表明, 这些周期解在  $w\eta_0 > a$  时是稳定的或准稳的. 在  $|w\eta_0| < a$  时, 声速线也是奇异线, 积分曲线通过声速线时要改变方向, 看来不应该存在光滑的跨声速流动解. 但是, 计算都得到了局部激波解<sup>[8, 11]</sup>. 应该做进一步的研究.

有趣的是, 徐遐生等曾用 (2.8) — (2.10) 去计算非线性密度波. 他们发现, 计算过程严重地依赖于初值, 可能代表一种不稳定性. 在密度波中, 恒星弥散速度很大, 那里满足  $|w\eta_0| < a$  的条件. 如果利用定理 1 来分析, 则这种不稳定性就是明显的了. 这个结果预示着

恒星密度波的周期解可能不稳定。当然，这个定理中的引力被当做外力处理了，这是数学近似。从物理上可以设想，考虑引力作用后体系可能更不稳定。我们以恒星密度波为初值，计算整个二维不定常的非线性运动方程组和泊松方程<sup>[21]</sup>，得到的结果与定理 2 的分析性质相似。非线性不稳定性的发展速率相当快，在  $5 \times 10^7$  年左右，初值为基态 0.05 的扰动可以发展到与基态密度同数量级。这种不稳定性值得进一步研究。

## 五、星系激波的起源

我们前面的讨论对星系螺旋结构的维持提供了一种可能的解释。必须进一步讨论螺旋结构的起源和演化，这是更困难的问题。

原始星系团是质量很大的气云，在坍缩过程中碎裂成原星系，它们有各自的角动量分布。对角动量较大的原星系云，在形成核球的同时，离心力使气体转成盘状，形成初始的星系盘。迅速坍缩成盘的过程中，星系团之间的相互碰撞（主要是远碰撞），在星系中产生动量矩，这样，初始坍缩成的星系盘中，气体分布不均匀。这种质量不均匀大体是对称的，主要倾向是  $m=2$  的非均匀分布。

基于这样的物理图象，计算了自引力系统二维不定常的初值问题<sup>[22]</sup>，基本方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(r\sigma) + \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma u) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma v) = 0 & (5.1) \\ \frac{\partial}{\partial t}(r\sigma u) + \frac{\partial}{\partial r}[r(\sigma u^2 + p + \sigma c^2)] + \frac{\partial}{\partial \theta}[\sigma uv - (\sigma v^2 + p + \sigma c^2) \sin(\theta - \theta_p)] = r\sigma f_r & (5.2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(r\sigma v) + \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma uv) + \frac{\partial}{\partial \theta}[\sigma uv \sin(\theta - \theta_p) + (\sigma v^2 + p + \sigma c^2)] = \sigma f_\theta & (5.3) \\ p/p_0 = (\sigma/\sigma_0)' & (5.4) \end{cases}$$

其中  $f$  为物质的引力，它是由气体和星系盘中的恒星形成的。恒星的引力与离心力平衡，而气体引力由泊松方程确定，即  $\vec{f}_g = -\nabla\psi$ ，而  $\psi$  满足

$$\Delta\psi = 4\pi G\sigma(r, \theta)\delta(z) \quad (5.5)$$

在这些公式中的符号都是通常的含义。考虑到计算的方便，基本方程组已写成全守恒的形式， $\theta_p$  为计算网格参考点处的  $\theta$  角度。

要指出的是，我们处理问题是自洽的、全局解，取消了通常研究星系激波的各种简化假设。此外，方程中不仅有模拟各向同性湍流的等效声速  $c$ ，而且还包含了热力学过程。由于激波后面跳跃很大，热力学声速值会成倍地增加。激波阵面后诞生的大量恒星会使气体加热，也会使湍流状态发生变化<sup>[18]</sup>。具体计算时将  $c$  取为常数，把热力学压力理解为各种效应的综合影响。

初值取 Toomre (1963) 薄盘星系模型<sup>[23]</sup>，但其密度有一  $m=2$  的小涨落，即  $t=0$  时

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \quad v = c_1 r / (r_0^2 + r^2)^{3/4} \\ \sigma &= c_2 (1 + f \sin 2\theta) / (r_0^2 + r^2)^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

其中  $f$  为涨落的相对振幅，取为

$$f = \begin{cases} 0, & \text{当 } r < 5 \text{ kpc 时,} \\ 0.2, & \text{当 } r \geq 5 \text{ kpc 时.} \end{cases} \quad (5.7)$$

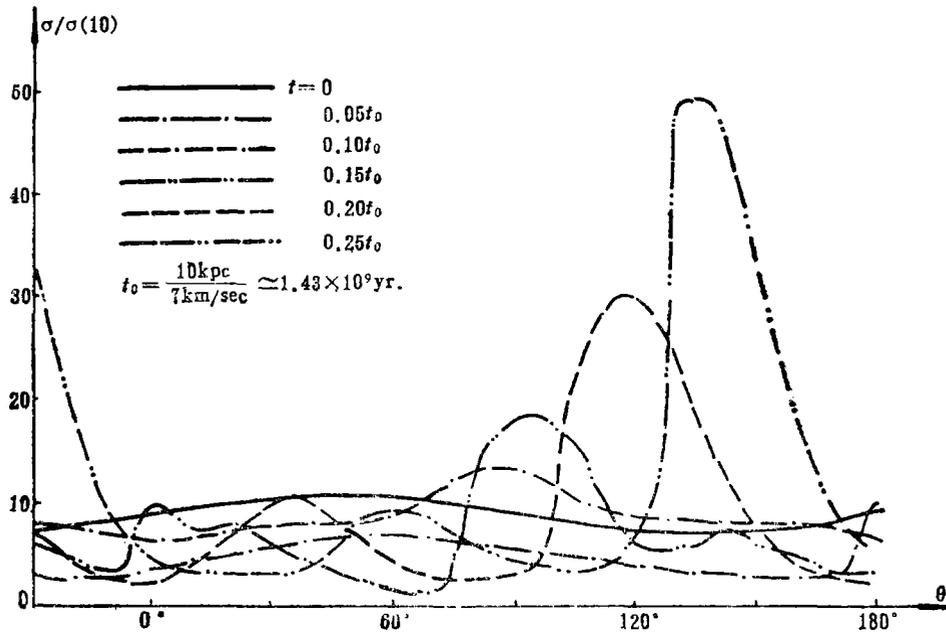


图 7 星系激波的形成过程，其中  $r=5\text{kpc}$ ， $\sigma(10)$  为  $10\text{kpc}$  处的平均气体面密度。

边值取为反射边界条件

$$\begin{aligned} u|_{r=r_1} &= 0 \\ u|_{r=r_2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

其中  $r_1, r_2$  为讨论时的内、外半径。

图 7 绘出了星系激波的形成过程，开始辐条状的密度峰值分布在大约  $2 \times 10^8$  年内发展为很强的激波，从图样的速度可估计出  $\Omega_p$  值大约是  $5 \sim 6 \text{ km/sec} \cdot \text{kpc}$ ，与前边讨论定常激波的图样速度差不多。计算表明，激波形成以后，峰值密度的螺旋图样变化缓慢。图 8 是一个典型的流动参数剖面，它与图 1 的剖面定性相似。

星系激波的形成过程大体有三个效应起作用。在较差自转的场中，任何物质分布的不均匀性都会被拖曳成螺旋形的结构。大尺度的不均匀性拖曳成大尺度的螺旋结构，这是缠

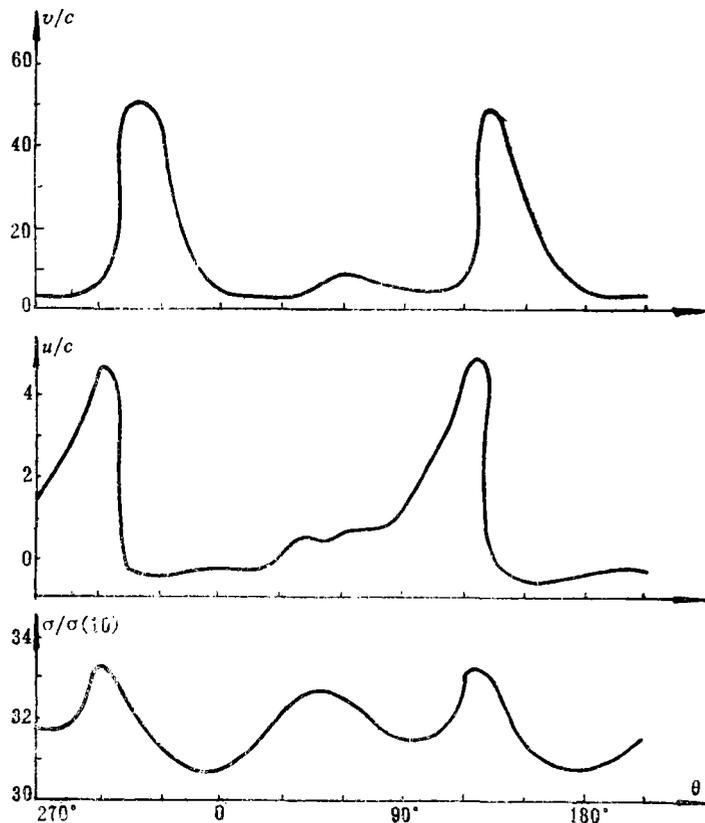


图 8  $t=0.25t_0$  时速度和密度剖面的分布，其中  $r=5\text{kpc}$ 。

卷过程. 在星系盘的局部区域中存在引力不稳定性, 这种不稳定性使密度涨落放大, 图 7 中可以清楚地看出引力不稳定性产生非线性增涨的效应. 第三个过程是非均匀介质中声波在传播过程中互相叠加而形成激波. 总合起来, 物质的不均匀性会缠卷成螺旋结构, 在缠卷过程中引力不稳定性使涨落放大, 而同时非线性波动效应不断发展并形成激波. 一旦激波形成以后, 缠卷过程变慢, 激波宏图大体维持.

将前边讨论的激波维持机制与这里讨论的激波起源机制结合起来, 就绘出星系螺旋结构演化过程的完整图象. 星系螺旋结构本质上是一种气体现象, 因此应该用气体理论来解释. 气体物质理论遇到的困难, 可以用星系激波的气体理论来克服.

## 六、与观测的比较

利用星际气体自引力星系激波的概念, 可以解释正常螺旋星系的大量特征.

1. 螺旋结构的宏图. 观测发现盘状星系大多有螺旋结构的宏图, 这种宏图可以用星际气体的激波宏图来解释. 激波阵面后的局部高密度区域很容易坍缩触发成各种恒星, 其中年青恒星的寿命很短, 在激波后形成和消亡, 表现为明亮的旋臂结构. 原星系盘中物质分布的不均匀性拖曳形成旋臂, 这种物质的不均匀性不一定是连贯的, 但有  $m=2$  的对称性. 旋臂波往往是零乱而破裂. 当原星系盘的质量越大, 周围星系与它碰撞产生的不均匀性不易表现很强, 这时, 主要碰撞过程的影响容易表现为双臂的规则宏图, 观测也确实表明, 星系的质量越大, 越倾向于有较清晰的螺旋结构.

2. 螺旋结构的延伸范围. 激波后面触发形成恒星依赖于气体密度值. 旋臂内的较高气体密度依赖于较强激波产生的大压缩比, 也依赖于基态气体密度有较大的值. 在星系中心部分的核球中, 成星率很高, 气体消耗很大, 所以基态气体密度值  $\sigma_0$  不大. 星系盘的外部,  $\sigma_0$  也不大. 在这些区域中, 尽管也可能有激波, 由于基态气体密度不大, 不是以触发引力坍缩以形成恒星. 所以, 明亮的螺旋结构主要延伸于盘面中间的一个区域, 在银河系中, 螺旋结构的延伸范围大约从 4kpc 到十余 kpc.

3. 多重臂特征. Schweizev<sup>[24]</sup> 发现恒星扰动密度具有多重臂性质以后, 引起人们的广泛兴趣, 这些特征可以解释为, 旋臂中形成各种类型的恒星, 年青型星在旋臂中表现为兰臂; 中年或较老年型的星有较长的寿命和较大的弥散速度, 它们形成以后会迁移到比较远的地方中去, 不同类型的恒星扰动密度有其分布 (依赖于迁移率、衰亡率、弥散等), 表现为红臂和兰臂之间有位相差. 如果把不同成分的密度扰动叠加, 总和的扰动密度就不一定具有规则的双臂结构, 一般会表现有相当的紊乱随机性. 而用星际气体自引力激波来解释星系螺旋结构现象, 正是基于假设扰动的恒星密度分布是随机的, 不构成大尺度的螺旋形式.

4. 环状结构. 不少盘状星系都有环状结构. 它们可以看成是由于较内部的质量分布不均匀性在局部区域中形成很紧卷的激波图样. 从统计的观点看, 有环状结构到无环状结构应该是逐渐分布的. 观测结果也确实如此.

观测也发现少数盘状星系的扰动密度分布很不规则, 这些不规则结构的形成应该与激波的演化密切相关. 在星系团形成初期, 随机的碰撞过程可能产生个别特殊的物质分布, 这时, 形成的激波位形也可能有特殊的形状.

5. 星际磁场的位形, 在星系这样大尺度的问题中, 星际磁场可以看成是与星际气体冻结在一起的. 在气体坍缩成盘和形成激波的过程中, 星际气体密度成倍地增加, 星际磁场也

必然在旋臂中放大，磁场位形大致与螺旋结构的气体密度分布相似。如果取星系际气体密度为  $10^{-7} \text{H/cm}^3$ ，星系际磁场为  $10^{-10}$  高斯，经过各种演化，最后在激波后的气体密度为  $5 \text{H/cm}^3$  左右，臂际空间的大约为  $0.3 \text{H/cm}^3$ 。如果按照冻结关系  $B \propto n^{2/3}$  推算，则激波后的磁场强度为  $10^{-5}$  高斯，臂际空间场强为  $10^{-6}$  高斯，这些量级与银河系的星际磁场观测大体相符。

6. 恒星的化学演化，在银河系中缺乏低金属丰度的恒星，而原始星系的气体组分中主要是中性氢。这说明，在星系演化的初期，恒星大量地在局部区域中诞生，而这些局部区域中金属的丰度较高。这个现象可以很好地用激波形成过程来解释。在星系的早期，很快形成星系激波。激波后面触发年青恒星形成。而这些恒星的寿命很短，它们在激波后很快衰亡，从而改变了那里的元素丰度。

7. 其他，利用星系激波可以解释许多观测现象，比如尘埃带分布于旋臂的内缘，旋臂中恒星的等年龄线也排列成规则的螺旋形，H II 区的分布在旋臂中的规则性，以及 H I 和 H II 的峰值分布等大量观测特性。

最后，讨论正常螺旋星系的形态特征。最近观测到的“光滑臂”现象表明，星系中的气体含量确实在不断地耗散。根据前一节的演化图象，螺旋结构的松紧取决于缠卷过程和形成激波的相对时间。如果缠卷过程的特征时间比形成激波的特征时间要快，则螺旋结构就会卷得较紧，表现为 Sa 型。否则，螺旋结构就比较松，而形成 Sb 或 Sc 型。对于较紧的螺旋星系，激波宏图所占的面积就相对地更多些，这时，激波后面高密度区域更大，使得形成恒星所耗散的气体更多。定性而言，缠得较紧的盘状星系剩余气体的含量就会较少些，使得从  $\text{Sa} \rightarrow \text{Sb} \rightarrow \text{Sc} \rightarrow \text{Ir}$  的气体含量逐渐增多。当然，气体的含量不仅依赖于成星所消耗的气体，还与恒星瓦解时补充的气体有关，不过前一过程更重要些，观测大体上也有这种趋势，即螺旋倾角越大，气体含量越多。对于某些星系，如果气体含量消耗过多而得不到补充，就可能表现为“光滑臂”结构。顺便可以看出，在这种气体理论中，旋臂结构的激波宏图一般是曳式的。

在我们的分析中，主要着眼于星际气体的作用，当然并不意味着恒星完全不重要。多重臂现象的观测表明，不同类型的恒星往往表现出不同的螺旋特征，如果我们在研究星际气体的自引力激波的同时，也考虑恒星的形成和迁移，弥散过程，就可以对恒星的涨落也同时给出一个定性的图案。这是需要进一步研究的课题。

## 参 献 文 献

1. Willein, R., *Pub Astron Soc. Pacific*, **86** (1974), 341.
2. Lin, C. C., in *Theoretical And Applied Mechanics*, Proc. 14th IUTAU Congress (1976), 57
3. Fujimoto, M., in *Non-stable Phenomena in Galaxies*, *IAU Symp.* 29 (1968), 453.
4. Roberts, W. W., *Astrophys. J.*, **158** (1969), 123.
5. Roberts, W. W. and Yuan, C., *Astrophys. J.*, **161** (1970), 817.
6. Shu, F. H., et al., *Astrophys. J.*, **173** (1972), 557.
7. Toka, M., *Astron. Soc. Japan*, **25** (1973), 191.
8. Shu, F. H., et al., *Astrophys. J.*, **183** (1973), 819.
9. 胡文瑞, 科学通报, **22** (1977), 76.
10. Woodward, P. R., *Astrophys. J.*, **195** (1975), 61.
11. Nelson, A. H. and Mafstuda, T., *Monthly Notices RAS*, **179** (1977), 663.
12. 胡文瑞, 关于星系激波, (1966).
13. Schmidt, M., in *Galactic Structure*, (1965), 513.
14. 胡文瑞, 敖超, 1977年全国天文学会议文集, 科学出版社 (1979).
15. Mezger, P. G., in *The Interstellar Medium*, (1974), 9.
16. 胡文瑞, 密度波理论的自治星系激波, 力学学报, (1980).
17. 胡文瑞, 力学情报, **1** (1977), 17.
18. Michurov, Yu. N. and Suchkov, A. A., *Astrophys. Space Sci.*, **35** (1975), 285.
19. 秦元勋, 王联, 王慕秋, 胡文瑞, 1977年全国天文学会议文集 (1979).
20. 秦元勋, 王联, 王慕秋, 胡文瑞, 科学通报, **24** (1979).
21. 秦元勋, 刘尊全, 胡文瑞, 科学通报, **24** (1979).
22. 胡文瑞, 敖超, 星系螺旋结构的起源, 中国科学, **12** (1979).
23. Toomre, A., *Astrophys. J.*, **138** (1963), 385.
24. Schweizer, F., *Astrophys. J. Suppl.*, **31** (1976), 313.

## A Gaseous Shock Wave Theory of the Galactic Spiral Structure

Hu Wen-rui

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)*

### Abstract

In this paper, the galactic spiral structure is studied by the galactic shock wave of interstellar gas with self-gravitation. The perturbed gravitation of stars is not a necessary condition for the existence of such shock. It is proved first of all that there exists solution of local shock wave even if the perturbed gravitation is absent. The condition  $|w_{\theta 0}| > a$  is required for such solution. The spiral structure can only be explained by the shock solution when the difference of density between the regions of arm and interarm is larger. The grand design of shock wave with self-gravitation is obtained by the iterative method. The features of shock wave can be analyzed qualitatively in the velocity plane for a special perturbed gravitation which is used to simulate the self-gravitation of interstellar gas. As the mass distribution in proto-galactic disk is irregular initially, the grand design of the galactic shock wave was developed by the processes of winding, growth of instability and overlapping of waves. Hence, it gives a complete figure about the origin, evolution and persistence. A lot of observed phenomena and classificational features of the galactic spiral structure can be explained by adopting these ideas.