应用数学和力学，第3卷第2期(1982年3月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　四川人民出版社出版

关于几类Riccati方程和二阶常微分方程的周期解*

李　鸿　祥

(上海铁道学院，1980年12月1日收到)

摘　　要

本文讨论了具有周期系数的几类 Riccati 方程的周期解问题，并给出几类二阶常微分方程有周期解的条件.

大家知道，具有周期系数的微分方程和一个微分方程具有周期解是两回不同的事[1]．具有周期系数的微分方程在什么条件下有周期解，这是周期系统中的一个重要问题.

秦元勋教授在[2]中回答了陈省身教授在中国科学院讲学时提出的关于周期系数的Riccati方程

$$y'=A(x)y^2+B(x)y+C(x)$$

在什么条件下存在周期解的问题，式中假设 $A(x)$、$B(x)$ 及 $C(x)$ 均是周期为2π的实连续函数．这个问题的解决有着重要的理论价值和实践意义．文[3]指出，Riccati 方程在流体力学、弹性振动理论等许多科技领域中都有应用.

本文在一、中，利用作者在文[4]中得到的结果给出具有周期系数的几类 Riccati 方程存在周期解的条件，指出应用秦元勋教授在[2]中所得到的诸充分性定理并不能完全判定出所述几类方程有无周期解．在二、中，我们利用一、及文[4]中的结果又给出了几类二阶常微分方程存在周期解的条件.

一、几 类Riccati方 程

本文以下假设所提到的函数均是周期为 $T\,(T>0)$ 的实连续函数，其中有一些并具有所需阶数的导数；a,b 及 c 均为实常数，且 $a\neq0$.

定理1.1.　设 $G(x)Q(x)\neq0$．若 $\int_0^T GQdx=0$，则方程

$$y'-\frac{G'}{G}y=Q(ay^2-bGy+cG^2) \tag{1.1}$$

的一切实解均是周期为 T 的实周期函数.

---

* 楼世博推荐.

证．由文[4]中定理 1.1 知方程(1.1)是可积的，且其通解为

(i)　$b^2<4ac$ 时，$y=G\left[\omega\,\mathrm{tg}\left(a\omega\int GQdx+C\right)+\frac{b}{2a}\right]$ (1.2)

(ii)　$b^2=4ac$ 时，$y=-G\left(\frac{1}{a\int GQ\,dx+C}-\frac{b}{2a}\right)$ (1.3)

(iii)　$b^2>4ac$ 时，$y=-G\left[\tau\,\mathrm{th}\left(a\tau\int GQdx+C\right)-\frac{b}{2a}\right]$ (1.4)

其中 $\omega=\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}$，$\tau=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$，$\int udx$ 表 u 的一个原函数，C 为任意常数．

由假设条件推知，方程(1.1)的诸系数函数都具有周期 T，因而满足[2]中给出的一切解均为周期函数的必要条件．令 $\varphi(x)=\int_0^x GQdx$，由 $\int_0^T GQdx=0$ 易证 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的实连续函数．这样一来，若 $\Psi(u)$ 是任一实连续函数，且 $u=\varphi(x)$ 在 $[0,T]$ 上的值不越出 $\Psi(u)$ 的定义域，则复合函数 $\Psi(\varphi(x))$ 亦是周期为 T 的实连续函数．最后，由诸解式(1.2)—(1.4)，定理即得证．

利用[4]中定理 1.2 及定理1.3，仿前可证

定理1.2． 设 $GQ\neq0$，$MH-NF\neq0$．若 $\int_0^T GQdx=0$，则方程

$$y'-\frac{G'}{G}y=Q[a(y+F)^2-b(y+F)G+cG^2]+\frac{G'}{G}F-F' \tag{1.5}$$

和

$$y'=R(x)y^2+P(x)y+\Phi(x) \tag{1.6}$$

的一切实解都是周期为 T 的实周期函数，其中

$$R=\frac{1}{MH-NF}\left[aQM^2-M'N+MN'+MN\left(\frac{G'}{G}-bGQ\right)+cQN^2G^2\right] \tag{1.7}$$

$$P=\frac{1}{MH-NF}\Big[MH'-M'H+FN'-F'N+(MH+NF)\left(\frac{G'}{G}-bGQ\right)$$
$$+2aQMF+2cQNHG^2\Big] \tag{1.8}$$

$$\Phi=\frac{1}{MH-NF}\left[aQF^2-F'H+FH'+FH\left(\frac{G'}{G}-bGQ\right)+cQH^2G^2\right] \tag{1.9}$$

定理1.3． 在方程(1.1)、(1.5)及(1.6)中设 $GQ\neq0$，$MH-NF\neq0$，$\int_0^T GQdx=l\neq0$．

(i)　$b^2<4ac$时，(1)若$GQ\neq$const.，则它们存在周期解的充要条件是 $a\omega l=r\pi$(r 为有理数，下同)；(2)若 $GQ\equiv$const.$=k$，则当 $G\equiv$const.$=k_1$ 时，它们的一切实解都是实周期函数；当 $G=\frac{k}{Q}\neq$const. 时，它们具有周期解的充要条件是T和 $\frac{\pi}{a\omega k}$可公度．

(ii)　若 $b^2=4ac$，则它们都有唯一的周期为 T 的实连续解，且分别为

$$y=\frac{b}{2a}G,\quad y=\frac{b}{2a}G-F\ 及\ y=\frac{-bGH+2aF}{bGN-2aM}\quad(bGN\neq2aM).$$

(iii) 若 $b^2>4ac$，则它们都恰有两个周期为 T 的实连续解，且分别为

$$y=\left(\frac{b}{2a}\pm\tau\right)G,\quad y=\left(\frac{b}{2a}\pm\tau\right)G-F \quad \text{及}$$

$$y=\frac{-(b\pm 2a\tau)GH+2aF}{(b\pm 2a\tau)GN-2aM}\quad ((b\pm\tau)GN\neq 2aM).$$

证. 下面只对方程(1.1)给出证明，关于对另二方程的证明，与此类似.

(i) $b^2<4ac$ 时，由 $\int_0^T GQdx=l\neq 0$，容易证明[6]

$$\varphi(x)=\int_0^x GQdx=\begin{cases} f(x)+\dfrac{l}{T}x, & \text{当 } GQ\neq\text{const. 时}\\ kx, & \text{当 } GQ\equiv\text{const.}=k \text{ 时}\end{cases}$$

其中 $f(x+T)=f(x)$. (1) 若 $GQ\neq$const.，则(1.2)式变为

$$y=G\left[\omega\frac{\operatorname{tg}(a\omega f(x))+\operatorname{tg}\left(\dfrac{a\omega l}{T}x+C\right)}{1-\operatorname{tg}(a\omega f(x))\operatorname{tg}\left(\dfrac{a\omega l}{T}x+C\right)}+\frac{b}{2a}\right]$$

显然，y 为周期函数的充要条件是函数 $G(x)$、$\operatorname{tg}(a\omega f(x))$的周期 T 和函数 $\operatorname{tg}\left(\dfrac{a\omega l}{T}x+C\right)$ 的周期 $\dfrac{T\pi}{a\omega l}$ 可公度[6]，亦即有 $a\omega l=r\pi$；(2)若 $GQ\equiv$const.$=k$，则(1.2)式变为

$$y=G\left[\omega\operatorname{tg}(a\omega kx+C)+\frac{b}{2a}\right]$$

利用文[6]中的结果，即可得所需结论.

(ii) 若 $b^2=4ac$，则由方程(1.1)的通解表达式(1.2)及(i)中所证 $\int GQdx$ 不是周期函数推知，仅当(1.2)式中 $C=\infty$ 时，它有周期解，即唯一的周期解 $y=\dfrac{b}{2a}G$.

(iii) 若 $b^2>4ac$，则方程(1.1)的解式(1.4)可写为

$$y=-G\left[\tau\frac{e^{a\tau\int GQdx+C}-e^{-a\tau\int GQdx-C}}{e^{a\tau\int GQdx+C}+e^{-a\tau\int GQdx-C}}-\frac{b}{2a}\right]$$

显然，此时方程(1.1)恰有两个周期为 T 的实连续解 $y=\left(\dfrac{b}{2a}\pm\tau\right)G$，它们分别对应于 $C=\mp\infty$. 证毕.

注意，定理1.1及定理1.2的结论中均只要求实周期解. 如果要求"实连续周期解"，则应把"一切实解"改为"无穷多个解". 显然，这样的周期解是有实际意义的.

我们指出，应用文[2]中的诸充分性定理并不能完全判定出方程(1.1)、(1.5)及(1.6)当满足相应定理中的条件时存在周期解. 事实上，例如，若 $\int_0^T GQdx\neq 0$，对于方程(1.1)，则当 $b^2>4ac$ 且 $ac\geqslant 0$ 时，由于

$$A(x)C(x)=acQ^2G^2\geqslant 0$$

所以就不能应用文[2]中的定理3.1来判定出它恰有两个周期为 $T=2\pi$ 的实连续解；对于在

$[0, 2\pi]$ 的部分区间或整个区间上有

$$\left(\frac{G'}{G}-bGQ\right)^2 \leqslant 4acQ^2G^2 \quad 或 \quad \left(\frac{G'}{G}-bGQ\right)^2 < 4acQ^2G^2$$

时的方程，文[2]中的定理 3.2 或定理 3.3 也无能为力.

例1.1. 系数为周期 2π 的实连续函数的 Riccati 方程

$$y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$$

是(1.5)型的. 这里豫解函数是 $G = Q \equiv 1$，$F = \sin x$，特征常数为 $a = 1$，$b = 2$，$c = 1$，且判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$[4]，故依本文定理 1.3(ii)，它有唯一的周期为 2π 的实连续解

$$y = 1 - \sin x$$

但是，在区间 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 内却有 $(B(x))^2 < 4A(x)C(x)$；

$$4(1-\sin x)^2 < 4[(1-\sin x)^2 - \cos x]$$

且在 $[0, 2\pi]$ 上并不成立

$$\min_x y_1(x) = \min_x (1 - \sin x + \sqrt{\cos x}) \geqslant \max_x y_2(x) = \max_x (1 - \sin x - \sqrt{\cos x})$$

因此不能应用文[2] § 3 中的定理 3.3 来判定出所给方程有周期解.

二、几 类 二 阶 方 程

定理2.1. 设 $GQ \neq 0$，$MH - NF \neq 0$.

（i） 若 $\int_0^T G dx = 0$，则二阶齐次线性方程

$$y'' + \left(bG - \frac{G'}{G}\right)y' + cG^2 y = 0 \tag{2.1}$$

的一切实解均是周期为 T 的实连续函数.

（ii） 若 $\int_0^T G dx = 0$ 和 $\int_0^T F dx = 0$，则二阶齐次线性方程

$$y'' + \left(bG - \frac{G'}{G} - 2F\right)y' + \left[F^2 - F' - F\left(bG - \frac{G'}{G}\right) + cG^2\right]y = 0 \tag{2.2}$$

的一切实解均是周期为 T 的实连续函数；若 $\int_0^T F dx \neq 0$，则它无非平凡周期解.

（iii） 若 $\int_0^T GQ dx = 0$ 和 $\int_0^T Ru dx = 0$（u 为(1.6)的任一实解），则二阶齐次线性方程

$$y'' - \left(P + \frac{R'}{R}\right)y' + R\Phi y = 0 \tag{2.3}$$

（其中 R、P 及 Φ 分别如 (1.7)、(1.8) 及 (1.9) 式所示）的一切实解均是周期为 T 的实连续函数；若 $\int_0^T Ru dx \neq 0$，则它无非平凡周期解.

证. （i） 由文[4]知，方程(2.1)是可积的，且通解为

$$b^2 < 4c \text{ 时，} \quad y = e^{-\frac{b}{2}\int G dx}\left[C_1 \cos\left(\omega \int G dx\right) + C_2 \sin\left(\omega \int G dx\right)\right] \tag{2.4}$$

$$b^2=4c \text{ 时}, \quad y=e^{-\frac{b}{2}\int G dx}\left(C_1+C_2\int G dx\right) \tag{2.5}$$

$$b^2>4c \text{ 时}, \quad y=C_1 e^{\left(-\frac{b}{2}+\tau\right)\int G dx}+C_2 e^{\left(-\frac{b}{2}-\tau\right)\int G dx} \tag{2.6}$$

其中 $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}$， $\tau=\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}$，$C_1$ 及 C_2 为任意常数．余下的证明过程与定理 1.1 的类似．

(ii) 及 (iii) 的证明与 (i) 类似，从略．

定理2.2. 在方程(2.1)中，设 $G(x)\neq 0$，$\int_0^T G dx=l\neq 0$.

(i) $b^2<4c$ 时，(1) 若 $G(x)\neq \text{cosnt.}$，则方程(2.1)有非平凡实连续周期解的充要条件是 $b=0$ 且 $\omega l=r\pi$; (2) 若 $G(x)\equiv \text{const.}=k$，则方程 (2.1) 有非平凡实连续解的充要条件是 $b=0$.

(ii) 若 $b^2\geqslant 4c$，则方程(2.1)无非常数周期解．

证明与定理 1.3 的类似．

当 $\int_0^T G dx=l\neq 0$ 且 $\int_0^T F dx=0$，或 $\int_0^T GQ dx=L\neq 0$ 且 $\int_0^T Ru dx=0$ 时，对于方程(2.2)或(2.3)，可有与定理 2.2 相类似的定理．

例2.1. 方程 $y''+2\text{tg}x\ y'+\cos^4 x\ y=0$ 是(2.1)型的，此处豫解函数为 $G=\cos^2 x$，特征常数为 $b=0$，$c=1$，判别式 $\Delta=b^2-4c<0$，且 $\omega=1$．由于 $\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx=\pi=l$，即 $\omega l=1\pi$，$r=1$，故依定理 2.2(i)(1)，所给方程有非平凡实连续周期解．事实上，由 (2.4) 式可得其通解为

$$y=C_1\left[\cos\left(\frac{1}{4}\sin 2x\right)\cos\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{1}{4}\sin 2x\right)\sin\frac{x}{2}\right]$$

$$+C_2\left[\sin\left(\frac{1}{4}\sin 2x\right)\cos\frac{x}{2}+\cos\left(\frac{1}{4}\sin 2x\right)\sin\frac{x}{2}\right]$$

其一切实解均是周期为4π的实连续函数．

例2.2. 方程$y''-2\text{ctg}x\ y'+2\sin^4 x\ y=0$也是(2.1)型的，这里$G=\sin^2 x$，$b=0$，$c=2$，$\Delta=b^2-4c<0$，$\omega=\sqrt{2}$．由于$\int_0^{2\pi}\sin^2 x dx=\pi=l$ 且 $\omega l=\sqrt{2}\pi$，故依定理 2.2(i) (1)，它无非平凡周期解．

例2.3. 常系数齐次线性方程 $y''+by'+cy=0$ 是方程 (2.1) 当 $G\equiv 1$ 时的特例．由于 $\int_0^{2\pi} G dx=2\pi\neq 0$，根据定理2.2(i)(2)，它当且仅当$b=0$且$c>0$时有非常数周期解——这是熟知的结论．

定理2.3. 设$GQ\neq 0$，$MH-NF\neq 0$，$\int_0^T GQ dx=0$，y 为方程(1.1)，(1.5)或(1.6)的任一实连续解．若$\int_0^T y dx=0$，则相应的二阶非线性方程

$$v''+\left(bGQ-\frac{G'}{G}\right)v'-aQv'^2=cQG^2 \tag{2.7}$$

$$v''+\left(bGQ-\frac{G'}{G}-2aQF\right)v'-aQv'^2=Q\,(aF^2+cG^2)-F'-F\left(bGQ-\frac{G'}{G}\right) \tag{2.8}$$

及

$$v''-Pv'-Rv'^2=\Phi \tag{2.9}$$

（式中R，P及Φ分别如(1.7)、(1.8)及(1.9)式所示）都有无穷多个周期为T的实连续周期解.

证. 方程(2.7)、(2.8)及(2.9)都可经变量代换$v'=y$分别化为方程(1.1)、(1.5)及(1.6). 由定理1.1，定理1.2及对它们的注记可知，它们都有无穷多个周期为T的实连续解. 由于$\int_0^T y\,dx=0$，所以方程(2.7)、(2.8)及(2.9)的解$v=\int y\,dx+B$中都包含无穷多个周期为T的实连续解.

定理2.4. 设$L[y]\equiv y''+r(x)y'+s(x)y$为方程(2.1)或(2.2)或(2.3)的左端. 若$\int_0^T G\,dx=0$，或$\int_0^T G\,dx=0$和$\int_0^T F\,dx=0$，或$\int_0^T GQ\,dx=0$和$\int_0^T Ru\,dx=0$（u是(1.6)的任一实解），则二阶非线性方程

$$L[y]=\frac{k}{y^3}e^{-2\int r(x)dx} \tag{2.10}$$

（式中$k=\text{const.}$）的一切实解均是周期为T的实连续函数.

证. 由文[4]知，方程(2.10)是可积的，其通解为

$$y=(C_1y_1^2+C_2y_2^2+2Ay_1y_2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

式中y_1及y_2为方程$L[y]=0$的两个线性独立的解，C_1及C_2为任意常数，常数A满足下式

$$C_1C_2-A^2=\frac{1}{(y_1y_2'-y_1'y_2)^2}e^{-2\int r(x)dx}$$

（注意$(y_1y_2'-y_1'y_2)e^{\int r(x)dx}\equiv\text{const.}$）. 由假设及定理2.1，取$y_1$及$y_2$是周期为$T$的实连续函数，再由(2.11)式，即得所证.

在研究受到与距离立方成反比的中心力作用的质点的直线运动时，就会遇到(2.10)型的方程[7].

参 考 文 献

1. 秦元勋，运动稳定性的一般问题讲义，科学出版社，北京(1958)，343.
2. 秦元勋，周期系数的吕卡提方程的周期解，科学通报，24，23，(1979)，1062—1066.
3. Захар-Иткин, М. Х., Матричное дифференциальное уравнение риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований, *УМН*, 28, 3(171), (1973), 83—120.
4. 李鸿祥，常微分方程的一些新的可积类型，数学的实践与认识，1(1980)，46—51.
5. 吉米多维奇，Б. П.，《数学分析习题集》，李荣冻译，人民教育出版社，北京(1979)，第2267题.
6. 李继闵，周期函数的和、差、积、商的周期性，数学通报，5(1965)，40—43.
7. Eliezer, C. J. and Gray, A., A note on the time-dependent harmonic oscillator, *SIAM J. Appl. Math.*, 30(3), (1976)463—468.

On Periodic Solutions of Several Classes of Riccati's Equation and Second-Order Differential Equations

Li Hong-xiang

(*Shanghai Railway Institute, Shanghai*)

Abstract

In this paper, the problem on periodic solutions of several classes of Riccati's equation with periodic coefficients is discussed, and the conditions, under which several classes of second-order equation with periodic coefficients have periodic solutions, are given.