应用数学和力学，第3卷第2期(1982年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

在集中荷载作用下悬臂矩形板的弯曲*

林 鹏 程

(福州大学，1981年5月6日收到)

摘 要

本文引用广义简支边的概念并应用叠加法，解决了有一集中力作用在板的垂直于固定边的中线任一点上的悬臂板弯曲问题.

一、引 言

悬臂矩形板的一边为固定，三边为自由，并有两个自由角点，要寻找一个满足微分方程及所有的边界条件和角点条件的解析解，长期以来被认为是一个难点．张福范教授在最近的工作[1],[2],[3],[4]中，引用广义简支边的概念并应用叠加法，讨论了有一集中力作用于自由边的中点、均布荷载、有一集中力作用在自由边的任一点、作用在板的中点等情形的弯曲问题．本文讨论在板的平面内荷载为不连续、但板的弯曲面关于垂直于固定边的中线系对称的情形．所讨论的问题是：有一集中力作用在板垂直于固定边的中线上任一点上的弯曲问题的解．

设悬臂矩形板的边 $y=0$ 为固定边，其他三边 $x=o$、$x=a$、$y=b$ 为悬空，所欲求解的问题可归结为：

在板的边界内，须满足偏微分方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{P\delta(x-a/2,y-\eta)}{D}$$

其中

$$\delta(x-a/2,\ y-\eta)=\begin{cases}1\ , & x=a/2,\ y=\eta\\ 0\ , & \text{在其他地方}\end{cases}$$

并满足边界条件

$$(w)_{y=0}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0\ ,\qquad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right]_{y=b}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=0\ ,\qquad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\x=a}}=0$$

* 徐次达推荐.

此外，在自由角点$(0,b)$，(a,b)还要求

$$(R)_{\substack{(0,b)\\(a,b)}}=2D(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{(0,b)\\(a,b)}}=0$$

为了解此问题，仍引用广义简支边的概念并应用叠加法来处理.

二、叠 加 的 组 成 部 分

(A)一四边简支矩形板，有一集中力 P 作用在板的对称线 $x=a/2$ 上的任一点$\left(\frac{a}{2},\eta\right)$上，此时板的挠曲面方程为：

$$w=\frac{Pb^2}{2D\pi^3}\sum_{i=1}\frac{\sin\frac{i\pi\eta}{b}}{i^3\cosh\frac{\beta_i}{2}}\left[\sinh\frac{i\pi x}{b}+\frac{\beta_i}{2}\tanh\frac{\beta_i}{2}\sinh\frac{i\pi x}{b}-\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}\right]\sin\frac{i\pi y}{b}\quad(2.1)$$

其中 $\beta_i=\frac{i\pi a}{b}$. 这挠曲面方程只适用于 $x\leqslant a/2$. 但由于对称，我们也可用这方程计算另一半板的挠度与内力分量弯矩等.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{Pb}{D\pi}\sum_{m=1,3,\dots}\left[\coth\alpha_m-\frac{b-\eta}{b}\coth\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}\right]\frac{\sinh\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}}{m\sinh\alpha_m}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi x}{a}\quad(2.2)$$

$$(V_y)_{y=b}=-\frac{P}{a}\sum_{m=1,3,\dots}\left[2+(1-\mu)\alpha_m\coth\alpha_m-(1-\mu)\frac{\alpha_m\eta}{b}\coth\frac{\alpha_m\eta}{b}\right]$$

$$\cdot\frac{\sinh\frac{\alpha_m\eta}{b}}{\sinh\alpha_m}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi x}{a}\quad(2.3)$$

$$(V_x)_{x=a}=-\frac{P}{2b}\sum_{i=1}\frac{2+(1-\mu)\frac{\beta_i}{2}\tanh\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}\sin\frac{i\pi\eta}{b}\sin\frac{i\pi y}{b}\quad(2.4)$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=-\frac{Pa(1-\mu)}{2b}\sum_{i=1}\frac{\tanh\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}\sin\frac{i\pi\eta}{b}\cos i\pi\quad(2.5)$$

其中 $\alpha_m=\frac{m\pi b}{a}$.

(B)设矩形板的 $y=b$ 边为广义简支边，其他三边为简支边，沿 $y=b$ 这边的挠度为：

$$(w)_{y=b}=\sum_{m=1,3,\dots}a_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

此时板的挠曲面方程，转角及内力分量等为：

$$w=\frac{1-\mu}{2}\sum_{m=1,3,\dots}\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}\left\{\left(\frac{2}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\quad(2.6)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1-\mu}{2a}\pi\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{mb_m}{\sinh\alpha_m}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.7}$$

$$(V_y)_{y=b}=\frac{D}{2}\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}m^3b_m\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.8}$$

$$(V_x)_{x=a}=2D\frac{(1-\mu)^2\pi^2}{a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{b_m}{m}\sum_{i=1}\frac{i^3\cos i\pi}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{2.9}$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=-D(1-\mu)^2\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{m=1,3,\cdots}m^2b_m\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right) \tag{2.10}$$

(C) 设矩形板的两边 $y=0$，$y=b$ 为简支边，而 $x=0$，$x=a$ 这两边为广义简支边，沿边 $x=0$，$x=a$ 的挠度为：

$$(w)_{\substack{x=0\\x=a}}=\sum_{i=1}b_i\sin\frac{i\pi y}{b}$$

此时板的挠曲面方程等为：

$$w=\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}b_i\left\{\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left[\left(\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}-\frac{2}{1-\mu}\right)\sinh\frac{i\pi x}{b}+\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{2}{1-\mu}\cosh\frac{i\pi x}{b}-\frac{i\pi x}{b}\sinh\frac{i\pi x}{b}\right\}\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{2.11}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{4}{b}\sum_{i=1}\frac{b_i}{i}\sum_{m=1,3,\cdots}m\frac{\frac{m^2}{i^2}+(2-\mu)\frac{a^2}{b^2}}{\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.12}$$

$$(V_y)_{y=b}=4D\frac{(1-\mu)^2\pi^2}{b^3}\sum_{i=1}\frac{b_i\cos i\pi}{i}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{m^3}{\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.13}$$

$$(V_x)_{x=a}=\frac{D}{2}\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{b^3}\sum_{i=1}i^3b_i\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{2.14}$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=D(1-\mu)^2\frac{\pi^2}{b^2}\sum_{i=1}i^2b_i\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)\cos i\pi \tag{2.15}$$

(D) 设有一四边简支的矩形板，沿 $y=0$ 边作用分布弯矩：

$$M(x)=\sum_{m=1,3,\cdots}E_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

此时板的挠曲面方程等为：

$$w=\frac{a^2}{2D\pi^2}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{E_m}{m^2}\left[-\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right.$$
$$\left.+\coth\alpha_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right]\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.16}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{a}{2D\pi}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{E_m}{m}\left(\coth\alpha_m-\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.17}$$

$$(V_y)_{y=b}=-(1+\mu)\frac{\pi}{2a}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{mE_m}{\sinh\alpha_m}\left(1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.18}$$

$$(V_x)_{x=a}=\frac{2}{a}\sum_{i=1}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{E_m i\left[\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{i^2}{m^2}\right]}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cos m\pi\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{2.19}$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=-(1-\mu)\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{E_m\cos m\pi}{\sinh\alpha_m}(\alpha_m\coth\alpha_m-1) \tag{2.20}$$

(E)为了使角点(a, b)，(0，b)自由，尚应叠加如下的刚性位移，即

$$w=ky \tag{2.21}$$

k为一待定常数.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=k=\frac{4k}{\pi}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{1}{m}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.22}$$

三、以叠加法解悬臂矩形板的弯曲

为了满足沿固定边 $y=0$ 各点的斜度为零，叠加算式 (2.2)，(2.7)，(2.12)，(2.17)，(2.22)，并使它们之和为零. 于是得到:

$$\frac{\pi}{4}(1-\mu)\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)+2\frac{a}{b}\sum_{i=1}\frac{b_i}{i}\frac{(2-\mu)\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}$$

$$+\frac{a^2}{4\pi D}\cdot\frac{E_m}{m^2}\left(\coth\alpha_m-\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)+\frac{2}{m^2}\cdot\frac{ka}{\pi}$$

$$=-\frac{Pab}{2D\pi}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m^2}\cdot\frac{\sinh\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}}{\sinh\alpha_m}\left[\coth\alpha_m-\frac{b-\eta}{b}\coth\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}\right]\quad m=1,3,5,\cdots \tag{3.1}$$

为了满足沿边 $x=a$ 的剪力为零，叠加算式(2.4)，(2.9)，(2.14)，(2.19)，并令它们之和为零，于是得到:

$$(1-\mu)\frac{b^3}{a^3}\cos i\pi\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{a_m}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}+\frac{\pi}{4}(1-\mu)^2 b_i\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)$$

$$-\frac{1}{i^2\pi^2}\frac{b^3}{Da}\sum_{m=1,3,\cdots}E_m\frac{\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{i^2}{m^2}}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}=\frac{Pb^2}{D\pi^2}\cdot\frac{1}{4i^3}\sin\frac{i\pi\eta}{b}\frac{2+(1-\mu)\frac{\beta_i}{2}\tanh\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}$$

$$i=1,2,3\ldots \tag{3.2}$$

由于对称，对 $x=0$ 边将得到一相同的方程组.

为了满足沿边 $y=b$ 的剪力为零，叠加算式(2.3)，(2.8)，(2.13)，(2.18)，并令它们之和为零，于是得到:

$$(1-\mu)^2\pi\frac{a_m}{2}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)+4(1-\mu)^2\frac{a^3}{b^3}\sum_{i=1}\frac{b_i}{i}\frac{\cos i\pi}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}$$

$$-(1+\mu)\frac{a^2}{2\pi D}\frac{E_m}{m^2\sinh\alpha_m}\left(1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\alpha_m\coth\alpha_m\right)$$

$$=\frac{Pa^2}{D\pi^2}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m^3}\left[2+(1-\mu)\alpha_m\coth\alpha_m-(1-\mu)\alpha_m\frac{\eta}{b}\coth\frac{\alpha_m\eta}{b}\right]\frac{\sinh\frac{\alpha_m\eta}{b}}{\sinh\alpha_m}$$

$$m=1,\ 3,\ 5,\ldots \tag{3.3}$$

由于在自由角点 (a, b) 处没有集中力作用，叠加算式 (2.5)，(2.10)，(2.15)，(2.20)，并使它们之和为零，于是得到：

$$-\sum_{m=1,3,\cdots} m^2 a_m\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)+\frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1} i^2 b_i\cos i\pi\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)$$

$$+\frac{1}{(1-\mu)\pi^2}\frac{a^2}{D}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{E_m}{\sinh\alpha_m}(\alpha_m\coth\alpha_m-1)=\frac{Pa^3}{Db}\frac{1}{(1-\mu)\pi^2}\sum_{i=1}\sin\frac{i\pi\eta}{b}\frac{\tanh\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}\cos i\pi \tag{3.4}$$

从另一自由角点 $(0, b)$ 将得到一相同的方程．这样，我们就得到三个无穷的联立方程组 (3.1)～(3.3) 和一个单独的方程 (3.4)，于是就可以解出未知量 a_m，b_i，E_m，k．从而可求得板的挠度及内力分量弯矩等．

四、计 算 实 例

考虑在集中力作用下的一正方形板，此时 $a=b$，取 $\mu=0.3$．集中力作用在对称线上一点$\left(\frac{a}{2},\eta\right)$处，$\eta$ 分别取 $\frac{a}{8}$，$\frac{a}{4}$，$\frac{3a}{8}$，$\frac{a}{2}$，$\frac{5a}{8}$，$\frac{3a}{4}$，$\frac{7a}{8}$．由于系数 E_m 收敛较慢，在计算中a_m，b_i，E_m 各取36个未知量，由电子计算机解方程组 (3.1)～(3.4)，即得到对于不同的η 值 a_m，b_i，E_m，k 的值．（为了避免篇幅冗长，a_m，b_i，E_m，k 的计算结果就不列出了）．

下面我们以 $\eta=\frac{a}{8}$为例说明如何计算板内及板边各点的挠度和沿固定边弯矩的分布以及沿固定边的总弯矩．

首先计算沿自由边 $y=a$ 的挠度曲线．

$$(w)_{y=a}=ka+\sum_{m=1,3,\cdots}^{71} a_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

自由边 $y=a$ 的最大挠度发生在边的中点，把计算得到的 a_m 和 k 的值代入得最大挠度值为

$$(w)_{\max}=ka+\sum_{m=1,3,\cdots}^{71} a_m\sin\frac{m\pi}{2}=0.826893\times10^{-2}\frac{Pa^2}{D}$$

以下这表给出沿自由边 $y=a$ 的几个点的挠度．$\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

x	0	$0.125a$	$0.25a$	$0.375a$	$0.5a$
w	0.774740×10^{-2}	0.794549×10^{-2}	0.811425×10^{-2}	0.822844×10^{-2}	0.826893×10^{-2}

可以看出，沿自由边 $y=a$ 的挠度曲线几乎仍为一直线.

再计算自由边 $x=0$ 或 $x=a$ 的挠度曲线

$$(w)_{x=a}=ky+\sum_{i=1}^{36}b_i\sin\frac{i\pi y}{b}$$

把上述计算的b_i值代入即得 $x=a$ 边上点的挠度值. 以下这表给出沿自由边 $x=a$ 的几个点的挠度. $\left(单位: \frac{Pa^2}{D}\right)$

y	0	$0.125a$	$0.25a$	$0.375a$	$0.5a$
w	0	0.204699×10^{-3}	0.921161×10^{-3}	0.194624×10^{-2}	0.309406×10^{-2}

y	$0.625a$	$0.75a$	$0.875a$	a
w	0.427148×10^{-2}	0.544372×10^{-2}	0.660176×10^{-2}	0.774740×10^{-2}

在自由边 $x=a$ 的 $0.375a$、$0.5a$、$0.625a$、$0.75a$、$0.875a$、a 这六点的挠度几乎仍在一直线上.

把 (2.1)，(2.6)，(2.11)，(2.16)，(2.21) 五式叠加，再把上述解得的 a_m，b_i，E_m，k 的值代入就可得到板的各点的挠度，详见表 1 ～表 7 .

由表1～7可以看出，对不同的 η 值，均有：沿自由边 $y=a$ 的挠度曲线仍为一直线，其最大挠度均发生在自由边 $y=a$ 的中点. 而自由边 $x=0$ 或 $x=a$ 的挠度曲线当 $y=0.375a$、$0.5a$、$0.625a$、$0.75a$、$0.875a$、a 这六点的挠度近乎位于一直线上.

沿固定边弯矩的分布为：

$$M(x)=\sum_{m=1,3,\cdots}^{71}E_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

以下列出 $\eta=\frac{a}{8}$ 时沿固定边几个点的弯矩值.

x	0	$0.0625a$	$0.125a$	$0.1875a$	$0.25a$
M	0	$-0.040214P$	$-0.052817P$	$-0.066852P$	$-0.086988P$

x	$0.3125a$	$0.375a$	$0.4375a$	$0.5a$
M	$-0.120415P$	$-0.180897P$	$-0.276496P$	$-0.340401P$

由表 8 可以看出，当集中力 P 的作用点离固定边越近，则沿固定边弯矩的分布，其均匀程度越差，这就证实了张福范教授在[3]中的预测.

作为校核，计算在 $\eta=\frac{a}{8}$ 时沿固定边的总弯矩

$$\int_0^a M(x)\,dx=\int_0^a\sum_{m=1,3,\cdots}^{71}E_m\sin\frac{m\pi x}{a}dx=\sum_{m=1,3,\cdots}^{71}\frac{2a}{\pi}\frac{E_m}{m}$$

$$=\frac{2Pa}{\pi^3}\left\{-2.0616+\frac{1}{3}\cdot0.609425+\cdots\cdots+\frac{1}{71}\cdot0.651847\times10^{-2}\right\}$$

$$=-0.124920\,Pa$$

其误差为

$$\frac{0.125-0.124920}{0.125}=0.064\%$$

对其他的 η 值，沿固定边总弯矩的误差均在 1 %以下，详见表 9 .由此可见，误差可以忽略.

以下几个表格列出在不同的 η 值，挠度和沿固定边弯矩的分布以及沿固定边的总弯矩值.

表 1　$\eta=\frac{a}{8}$ 时正方板的各点挠度表 $\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	0.125a	0.25a	0.375a	0.5a
0	0	0	0	0	0
0.125a	0.204699×10^{-3}	0.364914×10^{-3}	0.543001×10^{-3}	0.903016×10^{-3}	0.139906×10^{-2}
0.25a	0.921161×10^{-3}	0.123046×10^{-2}	0.159361×10^{-2}	0.207635×10^{-2}	0.239206×10^{-2}
0.375a	0.194624×10^{-2}	0.229895×10^{-2}	0.267909×10^{-2}	0.305269×10^{-2}	0.322801×10^{-2}
0.5a	0.309406×10^{-2}	0.342117×10^{-2}	0.374466×10^{-2}	0.401250×10^{-2}	0.412149×10^{-2}
0.625a	0.427148×10^{-2}	0.455182×10^{-2}	0.481278×10^{-2}	0.500912×10^{-2}	0.508392×10^{-2}
0.75a	0.544372×10^{-2}	0.568200×10^{-2}	0.589553×10^{-2}	0.604772×10^{-2}	0.610353×10^{-2}
0.875a	0.660176×10^{-2}	0.681214×10^{-2}	0.696603×10^{-2}	0.712305×10^{-2}	0.716846×10^{-2}
a	0.774740×10^{-2}	0.794599×10^{-2}	0.811425×10^{-2}	0.822844×10^{-2}	0.826893×10^{-2}

表 2　$\eta=\frac{a}{4}$ 时正方板的各点挠度表 $\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	0.125a	0.25a	0.375a	0.5a
0	0	0	0	0	0
0.125a	0.765070×10^{-3}	0.122856×10^{-2}	0.160347×10^{-2}	0.208127×10^{-2}	0.239470×10^{-2}
0.25a	0.337217×10^{-2}	0.427201×10^{-2}	0.518006×10^{-2}	0.629978×10^{-2}	0.716782×10^{-2}
0.375a	0.716628×10^{-2}	0.823658×10^{-2}	0.934751×10^{-2}	0.104661×10^{-1}	0.110479×10^{-1}
0.5a	0.115029×10^{-1}	0.125342×10^{-1}	0.135515×10^{-1}	0.144150×10^{-1}	0.147797×10^{-1}
0.625a	0.160154×10^{-1}	0.169209×10^{-1}	0.177681×10^{-1}	0.184154×10^{-1}	0.186651×10^{-1}
0.75a	0.205466×10^{-1}	0.213263×10^{-1}	0.220285×10^{-1}	0.225335×10^{-1}	0.227199×10^{-1}
0.875a	0.250456×10^{-1}	0.257377×10^{-1}	0.263452×10^{-1}	0.267674×10^{-1}	$0.269\ 96\times10^{-1}$
a	0.295089×10^{-1}	0.301612×10^{-1}	0.307196×10^{-1}	0.310994×10^{-1}	0.312346×10^{-1}

表 3　$\eta=\frac{3}{8}a$ 时正方板的各点挠度表 $\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	0.125a	0.25a	0.375a	0.5a
0	0	0	0	0	0
0.125a	0.150814×10^{-2}	0.226313×10^{-2}	0.269604×10^{-2}	0.306499×10^{-2}	0.323596×10^{-2}
0.25a	0.667102×10^{-2}	0.813364×10^{-2}	0.934477×10^{-2}	0.104759×10^{-1}	0.110567×10^{-1}
0.375a	0.144349×10^{-1}	0.162618×10^{-1}	0.180081×10^{-1}	0.197310×10^{-1}	0.208325×10^{-1}
0.5a	0.236010×10^{-1}	0.254708×10^{-1}	0.272959×10^{-1}	0.289246×10^{-1}	0.296944×10^{-1}
0.625a	0.333484×10^{-1}	0.350666×10^{-1}	0.366897×10^{-1}	0.379767×10^{-1}	0.384944×10^{-1}
0.75a	0.432525×10^{-1}	0.447721×10^{-1}	0.461554×10^{-1}	0.471720×10^{-1}	0.475538×10^{-1}
0.875a	0.531429×10^{-1}	0.545100×10^{-1}	0.557201×10^{-1}	0.565720×10^{-1}	0.568820×10^{-1}
a	0.629803×10^{-1}	0.642749×10^{-1}	0.653931×10^{-1}	0.661623×10^{-1}	0.664379×10^{-1}

表 4　$\eta=\frac{a}{2}$ 时正方板的各点挠度表 $\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	$0.125a$	$0.25a$	$0.375a$	$0.5a$
0	0	0	0	0	0
$0.125a$	0.228209×10^{-2}	0.330874×10^{-2}	0.375433×10^{-2}	0.403039×10^{-2}	0.413625×10^{-2}
$0.25a$	0.102334×10^{-1}	0.121924×10^{-1}	0.134985×10^{-1}	0.144267×10^{-1}	0.147999×10^{-1}
$0.375a$	0.226141×10^{-1}	0.251237×10^{-1}	0.272054×10^{-1}	0.289182×10^{-1}	0.297057×10^{-1}
$0.5a$	0.377745×10^{-1}	0.404935×10^{-1}	0.430077×10^{-1}	0.452534×10^{-1}	0.465402×10^{-1}
$0.625a$	0.543569×10^{-1}	0.570105×10^{-1}	0.595148×10^{-1}	0.616087×10^{-1}	0.625439×10^{-1}
$0.75a$	0.714909×10^{-1}	0.739416×10^{-1}	0.762016×10^{-1}	0.779247×10^{-1}	0.785980×10^{-1}
$0.875a$	0.887416×10^{-1}	0.910004×10^{-1}	0.930264×10^{-1}	0.944856×10^{-1}	0.950258×10^{-1}
a	0.105957	0.108118	0.110014	0.111343	0.111826

表 5　$\eta=\frac{5}{8}a$ 时正方板的各点挠度表 $\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	$0.125a$	$0.25a$	$0.375a$	$0.5a$
0	0	0	0	0	0
$0.125a$	0.301338×10^{-2}	0.432367×10^{-2}	0.480018×10^{-2}	0.503102×10^{-2}	0.510808×10^{-2}
$0.25a$	0.137488×10^{-1}	0.162167×10^{-1}	0.176160×10^{-1}	0.184231×10^{-1}	0.187038×10^{-1}
$0.375a$	0.309763×10^{-1}	0.341498×10^{-1}	0.364215×10^{-1}	0.379529×10^{-1}	0.385304×10^{-1}
$0.5a$	0.527914×10^{-1}	0.563398×10^{-1}	0.592969×10^{-1}	0.615377×10^{-1}	0.623765×10^{-1}
$0.625a$	0.773908×10^{-1}	0.810434×10^{-1}	0.843710×10^{-1}	0.871634×10^{-1}	0.886441×10^{-1}
$0.75a$	0.103369	0.106937	0.110240	0.112883	0.114015
$0.875a$	0.129844	0.133257	0.136370	0.138695	0.139587
a	0.156401	0.159726	0.162717	0.164881	0.165685

表 6　$\eta=\frac{3}{4}a$ 时正方板的各点挠度表 $\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	$0.125a$	$0.25a$	$0.375a$	$0.5a$
0	0	0	0	0	0
$0.125a$	0.368434×10^{-2}	0.530913×10^{-2}	0.585196×10^{-2}	0.607675×10^{-2}	0.614408×10^{-2}
$0.25a$	0.171165×10^{-1}	0.201712×10^{-1}	0.217509×10^{-1}	0.225490×10^{-1}	0.228020×10^{-1}
$0.375a$	0.392053×10^{-1}	0.431322×10^{-1}	0.456664×10^{-1}	0.471584×10^{-1}	0.476656×10^{-1}
$0.5a$	0.679479×10^{-1}	0.723855×10^{-1}	0.757131×10^{-1}	0.779329×10^{-1}	0.787482×10^{-1}
$0.625a$	0.101272	0.105994	0.109964	0.112940	0.114172
$0.75a$	0.137318	0.142158	0.146527	0.150054	0.151800
$0.875a$	0.174658	0.179504	0.183987	0.187500	0.188660
a	0.212413	0.217269	0.221798	0.225253	0.226595

表 7　$\eta=\frac{7}{8}a$ 时正方板的各点挠度表（单位：$\frac{Pa^2}{D}$）

y \ x	0	0.125a	0.25a	0.375a	0.5a
0	0	0	0	0	0
0.125a	0.429831×10^{-2}	0.627608×10^{-2}	0.692043×10^{-2}	0.716832×10^{-2}	0.723786×10^{-2}
0.25a	0.203356×10^{-1}	0.248056×10^{-1}	0.259437×10^{-1}	0.268255×10^{-1}	0.270912×10^{-1}
0.375a	0.472311×10^{-1}	0.520688×10^{-1}	0.550253×10^{-1}	0.566449×10^{-1}	0.571671×10^{-1}
0.5a	0.829667×10^{-1}	0.884639×10^{-1}	0.923091×10^{-1}	0.946550×10^{-1}	0.954567×10^{-1}
0.625a	0.125339	0.131271	0.135897	0.139007	0.140134
0.75a	0.172193	0.178462	0.183834	0.187828	0.189438
0.875a	0.221613	0.228165	0.231108	0.239052	0.241331
a	0.272104	0.278898	0.285526	0.291009	0.293365

表 8　不同的η值沿固定边弯矩分布表（单位：P）

η \ x	0	0.0625a	0.125a	0.1875a	0.25a	0.3125a	0.375a	0.4375a	0.5a
0.125a	0	-0.402136×10^{-1}	-0.528174×10^{-1}	-0.668519×10^{-1}	-0.869876×10^{-1}	−0.120415	−0.180897	−0.276496	−0.340401
0.25a	0	−0.143344	−0.177928	−0.209372	−0.244902	−0.286869	−0.335576	−0.380537	−0.399790
0.375a	0	−0.271612	−0.324095	−0.362072	−0.395845	−0.426204	−0.454559	−0.477687	−0.487028
0.5a	0	−0.400291	−0.467844	−0.508579	−0.537852	−0.558118	−0.574631	−0.588677	−0.594678
0.625a	0	−0.520858	−0.604377	−0.649732	−0.677390	−0.691813	−0.702111	−0.712467	−0.717423
0.75a	0	−0.632564	−0.734818	−0.788398	−0.818065	−0.829979	−0.837331	−0.846823	−0.851914
0.875a	0	−0.737057	−0.861299	−0.926792	−0.961649	−0.973405	−0.979806	−0.990174	−0.996150
a*	0		−1.0042		−1.1423		−1.1571		−1.1514

* 当集中力作用在自由边 $y=a$ 的中点时，[1]的计算结果.

表 9　不同的η值，沿固定边的总弯矩及其相对误差

η	总弯矩（Pa）	误差	η	总弯矩（Pa）	误差
0.125a	−0.124920	0.064%	0.625a	−0.626501	0.24%
0.25a	−0.250036	0.014%	0.75a	−0.753039	0.4%
0.375a	−0.375375	0.1%	0.875a	−0.881144	0.7%
0.5a	−0.500809	0.16%			

参 考 文 献

1. 张福范，悬臂矩形板的弯曲(有一集中力作用于自由边的中点)．清华大学学报，19，2 (1979)．
2. 张福范，均布荷载下悬臂矩形板的弯曲，应用数学和力学，1，3 (1980)．
3. 张福范，在不连续荷载作用下的悬臂矩形板的弯曲，应用数学和力学，2，4 (1981)．
4. 张福范，悬臂矩形板的不对称弯曲，固体力学学报，2 (1980)．
5. 张福范，《弹性薄板》，科学出版社，(1964)．
6. S. 铁摩辛柯，S.沃诺斯基，《板壳理论》，中译本，科学出版社，(1977)．

Bending of Cantilever Rectangular Plate with Concentrated Load

Lin Peng-cheng

(Fuzhou University, Fujian)

Abstract

In this paper, the solutions for the bending of cantilever rectangular plates with concentrated load acting at any point of the middle line perpendicular to the clamped edge are given by means of a conception named modified simply supported edges and the method of superposition Some numerical examples are presented. The total bending moment checks very well with the value determined statically.