

# 泥沙对水的相对速度和含沙浓度 对脉动速度的影响

蔡 树 棠

(合肥中国科技大学近代力学系, 1981年3月9日收到)

## 摘 要

本文从流体动力学的基本理论出发, 讨论了泥沙运动理论中的三个基本问题。(1) 泥沙在湍性水流中对水的相对速度。(2) 水流挟带泥沙以后脉动速度的改变。(3) 泥沙在二维渠道均匀定常流动中含沙量的垂直分布和通常的扩散理论的修正。按照我们理论分析的结果, 发现和通常水力学及河道动力学中常用的表达式有一些出入。

## 一、前 言

在泥沙理论中, 通常把泥沙颗粒在湍性流动中相对于流体质点的速度认为和泥沙在静水中的沉降速度是一样的<sup>[1]</sup>。这一简化假定应用得极为广泛, 但实际上它是没有经过任何证明的, 并且这一假定是和物理学中的等价原理是有矛盾的。因为在相对速度的表达式里, 重力加速度和流体质点的加速度并不处于平等的地位。本文在前面几篇文章的基础上<sup>[1][2][3][4]</sup>, 进一步讨论了在湍流运动时候, 泥沙对流体质点相对速度的表达式。接着又讨论了水流带沙以后脉动速度的改变量, 以及由于相对速度的变化而产生的二维渠道均匀定常流动含沙量分布公式中的指数的修正。最后并得到了修正后的扩散理论公式中的指数的表达式。

## 二、在湍流中泥沙颗粒相对于流体质点的速度

在以前的几篇论文中, 我们在含沙量较小, 各泥沙颗粒彼此没有直接相互作用, 以及流体团内各泥沙颗粒运动速度比较一致的前提下曾得到泥沙和水各自的运动方程式<sup>[1][2][3][4]</sup>。

$$\left(d_2 + \frac{1}{2}d_1\right) \frac{DV_i^s}{dt} = \frac{3}{2}d_1 \frac{DV_i^s}{dt} - (d_2 - d_1)g + \frac{3}{4}\mu_0 \nabla^2 V_i^s + \frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} \left[ \beta(V_i^s - V_i^s) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{D}{d\tau} (V_i^s - V_i^s) \sqrt{t-\tau} d\tau \right] \quad (2.1)$$

$$d_1 \frac{DV_i^s}{dt} = -d_1 g + \frac{\partial \tau_{i0}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}d_1 s \left( \frac{DV_i^s}{dt} - \frac{DV_i^s}{dt} \right) - \frac{3}{4}\mu_0 s \nabla^2 V_i^s$$

$$-\frac{9}{2} \frac{\mu_0 s}{a^2} \left[ \beta(V_i - V_i^s) + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{D}{d\tau} (V_i - V_i^s) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] \quad (2.2)$$

式中  $\frac{D}{dt}$  表示物质微商,  $d_1$ 、 $d_2$  各自代表水和泥沙的密度,  $V_i$  和  $V_i^s$  各自代表水和泥沙的速度.

$\mu_0$  为水的粘性系数,  $\nu$  为运动粘性系数,  $s$  为泥沙体积浓度,  $\beta = \frac{1}{1 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{6s}{\pi}}}$ ,  $a$  为泥沙颗粒半径,  $-g_i$  为重力加速度.

$\int_0^t$  为随泥沙颗粒的积分,  $\tau_i a$  为水的应力张量. 式 (2.1) 为泥沙质点运动时的牛顿第二定律, 式中各项都是一般流体力学工作者非常熟悉的.

$d_2 \frac{DV_i^s}{dt}$  就是质量乘加速度,  $\frac{1}{2} d_1 \left( \frac{DV_i^s}{dt} - \frac{DV_i}{dt} \right)$  为流体力学中的附加质量项,  $d_1 \frac{DV_i}{dt}$  为周围流体加速的惯性项,  $-(d_2 - d_1)g_i$  为重力减去浮力项,  $\frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} (V_i - V_i^s)$  为 Stokes 项,  $\frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}}$

$\int_0^t \frac{D}{d\tau} (V_i - V_i^s) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$  是大家熟悉的 Basset 项. 修正因子  $\beta$  和  $\frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 V_i$  则是以前几篇文章中

得到的. 在浓度小的时候,  $\beta \approx 1$ .  $\frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 V_i$  是由剪切流动引起的, 在颗粒和流体密度相等

时候将起重要的作用. 式 (2.2) 就是 Navier-Stokes 方程再加上体力项. 体力项除重力以外, 就是泥沙对水的反作用力, 它由牛顿第三定律给出.

连续方程则为<sup>(1)(2)(3)(4)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} (d_2 s) + \frac{\partial}{\partial x_i} (d_2 s V_i^s) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [d_1 (1-s)] + \frac{\partial}{\partial x_i} [d_1 (1-s) V_i] = 0 \quad (2.4)$$

我们用 Lagrange 描述方式, 令  $\alpha_i = V_i - V_i^s$ , 则有

$$\dot{\alpha}_i + A \alpha_i + B \int_0^t \frac{\dot{\alpha}_i}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - G_i(t) = 0 \quad (2.1)'$$

式中  $\dot{\alpha}_i$  表示  $\alpha_i$  对时间的微商

$$A = \frac{9}{2} \frac{\mu_0 \beta}{a^2}, \quad B = \frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}}, \quad G_i = \frac{(d_2 - d_1) \left( g_i + \frac{DV_i}{dt} \right) - \frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 V_i}{d_2 + \frac{1}{2} d_1}$$

把这个方程化为微分方程<sup>(2)(4)</sup>, 得到

$$\dot{\alpha} + (2A - \pi B^2) \alpha + A^2 \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau - A \int_0^t G_i(\tau) d\tau + B \int_0^t \frac{G_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - G_i(t) = 0 \quad (2.1)''$$

我们现在考虑泥沙在一团流体中的运动 这时的特征时间为  $\frac{a^2}{\nu}$  (2.14)。当泥沙颗粒的直径很小, 它的特征时间也就很小。例如  $D=0.06\text{mm}$  的泥沙颗粒

$$\frac{a^2}{\nu} = \frac{(0.003)^2}{0.01} \approx 10^{-3} \text{秒}$$

在这样短的时间里, 流体团的加速度有时可以近似地认为不变, 流体团中泥沙的浓度也可以近似地认为是常数。而水和泥沙的相对速度也就很快达到极限值 (2.14)

$$a_i \approx \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0 \beta} \left[ (d_2 - d_1) \left( g + \frac{DV_i}{dt} \right) - \frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 V_i \right] \quad (2.5)$$

这个式子  $g_i$  和  $\frac{DV_i}{dt}$  处于平等地位, 所以符合等价原理的要求。这个式子即使  $\beta \approx 1$  和略去

$\frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 V_i$  项也不会变为静水沉速。由此可见并不像一般认为的那样, 水和泥沙的相对速度

就是静水沉降速度  $\frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu} (d_2 - d_1) g$ 。维里康诺夫用正弦函数代表水和泥沙的相互作用力<sup>[6]</sup>,

那是不合理的。因为在空间一个点上来看, 固然涨落速度变动较快, 但这是对不同的流体团和不同的泥沙颗粒而言, 不能用到一个流体团和一个泥沙颗粒上去。所以他把 Euler 观点和 Lagrange 观点混同起来是完全错误的。

如果泥沙颗粒比较大, 特征时间就比较长。如果特征时间  $\frac{a^2}{\nu}$  和  $\frac{DV_i}{dt}$ ,  $V_i$  的变化时间同一量级或比它更大一些, 则水和泥沙的极限相对速度 (2.5) 就不能达到。这样也就不能把  $\frac{DV_i}{dt}$  和  $\nabla^2 V_i$  的瞬时值项考虑在内, 而只能考虑它们的平均值。而我们知道对清水的情形

$$\frac{DV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_j v_i}$$

对二维渠道中的均匀定常流动, 我们可以很简单地计算出它们的量级

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \approx 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v_j v_i}) \sim \frac{d}{dy} \overline{v_i^2} \sim \frac{\overline{v_i^2}}{H} \sim \frac{V^2}{gH} \frac{\overline{v_i^2}}{\overline{V^2}} g$$

$$\frac{\overline{V^2}}{gH} \approx F^2 \approx 1, \quad \frac{\overline{v_i^2}}{\overline{V^2}} \approx (0.04)^2 \approx 10^{-3}$$

所以

$$\frac{DV_i}{dt} \sim \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v_j v_i}) \sim 10^{-3} g$$

式中  $\overline{V}$  为水流平均速度,  $H$  为水深。

同样

$$\overline{\mu_0 \nabla^2 V_i} = \mu_0 \nabla^2 \overline{V_i} \sim \mu_0 \frac{\overline{V}}{H^2} \sim \frac{1}{Re} \frac{V^2}{gH} d_1 g$$

由于雷诺数很大，所以它比起重力来也是小得很多的量。在含沙量小的时候，浑水和清水的平均速度和脉动速度应该变化不是很大，上述的估计应该仍旧是正确的。所以对较粗的泥沙，在浓度小的时候，从平均效果来说可以近似地认为水和泥沙的相对速度就是静水沉降速度  $\frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} (d_2 - d_1) g$ 。这就是为什么细泥沙分布得很均匀，用相对速度为沉速的扩散理论算出来的结果和实际测量值不符合的原因。关于湍性水流中泥沙和水的相对速度，长期以来由于实验上只能测量颗粒速度，无法测量流体的运动速度，而一直是一个悬案。我们这一次，则是从流体动力学理论的角度加以解决的。

### 三、有泥沙以后湍流脉动速度的改变量

我们写出流体的运动方程式

$$d_1 \frac{DV_i}{dt} = -d_1 g + \frac{\partial \tau_{ia}}{\partial x_a} - \frac{1}{2} d_1 s \dot{\alpha} - \frac{3}{4} \mu_0 s \nabla^2 V_i - \frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} s \left[ \beta \alpha + \sqrt{\frac{a}{\pi \nu}} \int_0^t \frac{\dot{\alpha}_i}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right] \quad (2.2)'$$

在泥沙颗粒特征时间  $\frac{a^2}{\nu}$  小的时候，绝大部份时间  $\dot{\alpha} \approx 0$ ，而有

$$\alpha_i \approx \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0 \beta} \left[ (d_2 - d_1) \left( g + \frac{DV_i}{dt} \right) - \frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 V_i \right]$$

代入(2.2)'，就得到

$$d_1 \frac{DV_i}{dt} = -d_1 g + \frac{\partial \tau_{ia}}{\partial x_a} - (d_2 - d_1) s \left( g + \frac{DV_i}{dt} \right) \quad (2.2)''$$

我们把  $V_i$  分成三个部份： $V_i$  为水流的平均速度， $v_i^0$  为没有泥沙时水流的脉动速度， $v_i^1$  为有泥沙以后水流脉动速度的改变量。即

$$V_i = V_i + v_i^0 + v_i^1$$

我们把  $\tau_{ia}$  也分成相应的三部份。把方程式也相应分开。对二维渠道均匀定常流动

$$\frac{DV_i}{dt} \approx 0 \quad \mu_0 \nabla^2 V_i \approx 0$$

我们略去平均流动项，就可以写出脉动流速的方程式。使等式两边  $s$  的不同方次各自相等。就有

$$d_1 \frac{Dv_i^0}{dt} = -d_1 g + \frac{\partial \tau_{ia}^0}{\partial x_a} \quad (2.2a)$$

$$d_1 \frac{Dv_i^1}{dt} = - (d_2 - d_1) s \left( g + \frac{Dv_i^0}{dt} \right) + \frac{\partial \tau_{ia}^1}{\partial x_a} \quad (2.2b)$$

对细的泥沙，因此就有

$$d_1 \frac{Dv_i^1}{dt} = - \frac{(d_2 - d_1)}{d_1} s \frac{\partial \tau_{ia}^0}{\partial x_a} + \frac{\partial \tau_{ia}^1}{\partial x_a} \quad (2.2b)'$$

所以当  $\tau_{ia}^1 \approx \frac{d_2 - d_1}{d_1} s \tau_{ia}^0$  时， $\frac{Dv_i^1}{dt} \approx 0$ ，由于  $v_i^0$  平均值为零，这时  $v_i^1$  就很小，即  $v_i^1 \approx 0$ 。至

于 $v_i'$ 的符号, 我们可以这样来得到. 由爱因斯坦公式 $\mu = \mu_0(1 + 2.5s)$ , 密度 $D = d_1(1 + \frac{d_2 - d_1}{d_1}s)$ , 而 $\frac{d_2 - d_1}{d_1} \approx 1.7$ , 所以粘性系数增大得比密度快. 这样在平均速度和线尺度不变的情况下, 雷诺数就相应地变小, 也就是总的脉动速度将变小. 这时候 $v_i'$ 应该正比于 $s$ 而和 $v_i''$ 的符号相反. 对较粗的泥沙, 方程将近似为

$$d_1 \frac{Dv_i'}{dt} \approx -(d_2 - d_1)sg + \frac{\partial \tau_{ia}}{\partial x_a} \quad (2.2b)''$$

这时候泥沙颗粒还要提供一部份位能, 情况就变得复杂了. 不能简单地总说总的脉动速度一定变小. 但这种情形有时有一个很有意义的性质. 如果我们不考虑脉动速度方程中粘性应力的影响, 而近似地认为流体团内 $s$ 为不变的常量, 则(2.2a)和(2.2b)''就差一个因子 $\frac{d_2 - d_1}{d_1}s$ . 两个方程都有同样随机的初始条件和完全相同的边界条件, 因此它们的解成正比, 而我们有

$$v_i' \sim \frac{d_2 - d_1}{d_1} s v_i'' \quad (3.1)$$

#### 四、扩散理论中指数的修正

我们知道有关二维渠道中均匀定常流动的悬沙垂直分布有大家所熟悉的扩散理论. 这个理论的基本要点有三条. (1)泥沙在空间某一点上速度在垂直水流方向的分量的平均值就是泥沙在静水中的沉降速度 $w = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} (d_2 - d_1)g$ . (2)由河底方向往上扩散的泥沙和从上面向河底方向沉降的泥沙互相平衡. 也就是

$$-\overline{v_y s'} = \epsilon_s \frac{d\bar{s}}{dy} = -\bar{s}w \quad (4.1)$$

式中 $\epsilon_s$ 为泥沙的湍流扩散系数,  $\bar{s}$ 为 $s$ 在该点的平均值,  $s'$ 为 $s$ 的脉动量,  $y$ 为垂直水流方向的纵坐标, 从河底算起. (3)泥沙的湍流扩散系数 $\epsilon_s$ 和动量的湍流交换系数 $\epsilon$ 相等. 而动量交换系数 $\epsilon$ 的值由下面的运动方程式求出.

$$-d_1 \overline{v_x v_y} = d_1 \epsilon \frac{dU}{dy} = d_1 g(H - y)i = d_1 v_\tau^2 (1 - \eta) \quad (4.2)$$

式中 $-d_1 \overline{v_x v_y}$ 就是雷诺剪应力,  $i$ 就是渠道的坡降.  $U$ 是该点水流速度的平均值, 也就是 $\bar{V}_x$ .  $v_\tau$ 就是水流的摩阻流速,  $\eta$ 为无量纲高度. 式中

$$v_\tau^2 = gHi, \quad \eta = \frac{y}{H}$$

式(4.2)中略去了层流剪应力项 $\frac{d}{dy} \left( \mu \frac{dU}{dy} \right)$ . 如果我们采用对数流速分布

$$U = \frac{v_\tau}{K} \ln y + A \quad (4.3)$$

式中 $K$ 为卡门常数,  $A$ 为某常数. 则通过积分, 我们就得到悬沙含沙量沿垂线的分布

$$\bar{s} = s_0 \left( \frac{1-\eta}{\eta} \frac{\eta_0}{1-\eta_0} \right)^{\frac{w}{Kv_r}} = s_0 \left( \frac{1-\eta}{\eta} \frac{\eta_0}{1-\eta_0} \right)^Z \quad (4.4)$$

式中  $s_0$  为某一高程  $y_0$  上  $\bar{s}$  的数值,  $\eta_0 = \frac{y_0}{H}$ ,  $Z = \frac{w}{Kv_r}$ . 实测的结果表明 (4.4) 式的基本形式是正确的, 只是实测的  $Z$  值较理论的  $Z$  值为小.

过去都认为实测的悬沙含沙量的垂线分布所以较理论曲线更为均匀, 是由于 (4.4) 式的推导过程中假定了泥沙的湍流扩散系数  $\varepsilon_s$  与动量的湍流交换系数  $\varepsilon$  相等所引起的. 但是在我们看来, 这样的解释恐怕是不能成立的. 因为湍流的扩散作用和动量交换作用主要都是由湍流场中的大涡旋引起的. 相对来说, 小涡旋起的作用是比较小的. 不管大涡旋本身是多么各向异性, 但从扩散作用来说, 把细的泥沙 (沉速很小的泥沙) 扩散开来和动量交换相比, 从理论上看不出为什么应该有太大的差别. 而且在细的泥沙含沙量很小的时候, 脉动速度和湍流扩散系数的改变量也仅和  $s$  成正比. 这些因素都不见得能导致  $Z$  值明显地变小的结论.

相反按照我们现在的理论, 就能清楚地解释了地解释这个现象, 并得出  $Z$  值的修正表达式. 从水和泥沙的连续方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [d_1(1-s)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [d_1(1-s)V_j] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (d_2s) + \frac{\partial}{\partial x_j} (d_2sV_j^s) &= 0 \end{aligned}$$

我们把  $\alpha_j$  的定义

$$V_j - V_j^s = \alpha_j$$

代入, 化简以后, 就得到

$$-\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(1-s)V_j] = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [s(V_j - \alpha_j)] = 0 \quad (4.6)$$

我们求这两个式子的湍流平均, 就有

$$-\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{V}_j - \bar{s}\bar{V}_j - \overline{s'v_j}] = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{s}\bar{V}_j + \overline{s'v_j} - \bar{s}\bar{\alpha}_j - \overline{s'\alpha_j'}] = 0 \quad (4.8)$$

式中  $\bar{\alpha}_j$  为  $\alpha_j$  的平均值,  $\alpha_j'$  为  $\alpha_j$  的脉动量. 对二维渠道的均匀定常流动, 我们就有

$$\frac{d}{dy} [\bar{V}_y - \bar{s}\bar{V}_y - \overline{s'v_y}] = 0$$

$$\frac{d}{dy} [\bar{s}\bar{V}_y + \overline{s'v_y} - \bar{s}\bar{\alpha}_y - \overline{s'\alpha_y'}] = 0$$

积分以后, 利用  $y=H$  处为水平面这一边界条件, 就有

$$\bar{V}_y - \bar{s}\bar{V}_y - \overline{s'v_y} = 0 \quad \text{或} \quad V_y = \frac{\overline{s'v_y}}{1-\bar{s}}$$

$$\bar{s}\bar{V}_y + \overline{s'v_y} - \bar{s}\bar{a}_y - \overline{s'a'_y} = 0$$

消去  $\bar{V}_y$ , 就有

$$\frac{\bar{s}}{1-\bar{s}}\overline{s'v_y} + \overline{s'v_y} - \bar{s}\bar{a}_y - \overline{s'a'_y} = 0$$

化简以后, 就有

$$-\overline{s'v_y} = -(1-\bar{s})(\bar{s}\bar{a}_y + \overline{s'a'_y}) \quad (4.1)$$

这个方程式就是 (4.1) 式近似以前的原来形式. (4.1) 式中的  $\bar{s}w$  实际上是  $\bar{s}w^*$

$$\bar{s}w^* = (1-\bar{s})(\bar{s}\bar{a}_y + \overline{s'a'_y})$$

或

$$w^* = \frac{1-\bar{s}}{\bar{s}}(\bar{s}\bar{a}_y + \overline{s'a'_y}) = (1-\bar{s})\left(\bar{a}_y + \frac{\overline{s'a'_y}}{\bar{s}}\right)$$

$w^*$  为我们现在的有效沉速.

我们现在来求  $w^*$  的值. 首先我们在  $\bar{s}w^*$  中只保留  $s$  的一次项, 略去  $s$  的高次项. 其次按照前面已经有过的讨论, 对较粗的泥沙, 由于  $\frac{a^2}{\nu}$  比较大, 在流体团速度和加速度有明显

改变以前, 相对速度远远不能达到极限值  $\frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0\beta} \left[ (d_2 - d_1) \left( g + \frac{DV_y}{dt} \right) - \frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 V_y \right]$ , 而只能在静水沉速  $w$  附近振荡. 这时  $\bar{a}_y \approx w$ , 而且  $a'_y$  很小可以略去不计. 于是就得到一般扩散理论所得到的结果,  $Z^* \approx Z = \frac{w}{Kv_r}$ . 对较细的泥沙, 按前面的讨论, 因为  $\frac{a^2}{\nu}$  很小,

$a_y \approx \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0\beta} \left[ (d_2 - d_1) \left( g + \frac{DV_y}{dt} \right) - \frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 V_y \right]$ . 在略去  $s$  的高次项和  $\frac{\overline{DV_y}}{dt}$ ,  $\mu_0 \nabla^2 V_y$ , 等小项以后

$$\bar{a}_y \approx \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} (d_2 - d_1) g = w$$

但这时  $a'_y$  的值并不小, 所以  $\overline{s'a'_y}$  并不能略去. 我们现在来求  $\overline{s'a'_y}$ . 我们先写出  $a'_y$

$$\begin{aligned} a'_y &\approx \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} \left[ (d_2 - d_1) \left( \frac{DV_y}{dt} - \frac{\overline{DV_y}}{dt} \right) - \frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 v_y \right] \\ &\approx \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} \left[ (d_2 - d_1) \frac{DV_y}{dt} - \frac{3}{4} \mu_0 \nabla^2 v_y \right] \end{aligned}$$

对于  $s'$ , 我们先把特征量  $\bar{s}$  提出. 于是

$$\overline{s'a'_y} = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} \bar{s} \left[ (d_2 - d_1) \frac{\overline{s' DV_y}}{\bar{s}} - \frac{3}{4} \mu_0 \frac{\overline{s' \nabla^2 v_y}}{\bar{s}} \right]$$

于是

$$w^* = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} (d_2 - d_1) g \left[ 1 + \frac{1}{g} \frac{\overline{s' DV_y}}{\bar{s}} - \frac{3}{4} \frac{\mu_0}{(d_2 - d_1)g} \frac{\overline{s' \nabla^2 v_y}}{\bar{s}} \right] \quad (4.9)$$

按照近年来的实验,人们观察到不断有流体团从边界层上升到主流中去.在上升的过程中,流体团的上升速度在不断地减慢,而范围则在逐渐扩大.从这样的现象出发,我们可以看出流体团的加速度为负值.另外  $\mu_0 \nabla^2 v$ , 是粘性阻力项,它和流体团的运动速度方向相反,所以  $\mu_0 \nabla^2 v$ , 也是负值.我们现在来写出整个流场中的平均沉速  $w^*$ . 因为流体团是从边界层中升起直到主流中去的,所以(4.9)式中水流加速度的平均值应该用水流整体的特征量  $\bar{V}$  和  $H$  表示出来.但是另一方面,粘性应力项则主要是在边界层里起作用,所以它的平均值应该用边界层内的特征量表示出来.设边界的绝对粗糙度为  $k_s$ , 摩擦流速为  $v_\tau$ . 我们略去  $\bar{s}w^*$  中所有  $s$  的一次以上各项,我们就可以用特征量  $\bar{V}$  和  $H$ ,  $v_\tau$  和  $k_s$  写出  $w^*$  中出现的各项

$$\frac{DV_x}{dt} \sim -\frac{\bar{V}^2}{H}, \quad \mu_0 \nabla^2 v_y \sim -\mu_0 \frac{v_\tau}{k_s^2}$$

并且利用  $g_v \approx g$ ,  $1 - \bar{s} \approx 1$ ,  $\beta^{-1} = 1 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{6s}{\pi}} \approx 1$ , 于是作为一个粗糙近似,有效沉速  $w^*$  可以写成

$$w^* = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} (d_2 - d_1) g \left[ \left( 1 - C_1 \frac{\bar{V}^2}{gH} \right) + C_2 \frac{\mu_0}{d_2 - d_1} \frac{v_\tau}{gk_s^2} \right] \quad (4.10)$$

式中  $C_1$  和  $C_2$  都是常数. 用  $w = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu_0} g (d_2 - d_1)$  除(4.10)式两端,就有

$$\frac{w^*}{w} = 1 - C_1 \frac{\bar{V}^2}{gH} + C_2 \frac{\mu_0}{d_2 - d_1} \frac{v_\tau}{gk_s^2} \quad (4.11)$$

利用  $w$  的表达式消去  $\frac{\mu_0}{d_2 - d_1}$ , 并且用泥沙颗粒直径  $d$  来代替半径  $a$ , 于是我们就有修改后的指数  $Z^*$

$$Z^* = \frac{w^*}{K v_\tau} = \frac{w}{K v_\tau} \frac{w^*}{w} = Z \left[ 1 - C_1 \frac{\bar{V}^2}{gH} + \frac{1}{18} C_2 \frac{d^2}{k_s^2} \frac{1}{KZ} \right] \quad (4.12)$$

如果还要把  $s^{1/3}$  次的修正项考虑在内,我们还得加上一个浓度修正因子  $\left( 1 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{6s_e}{\pi}} \right)$ ,  $s_e$  为整个流场的某一种平均含沙量,于是有

$$\frac{w^*}{w} = \left( 1 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{6s_e}{\pi}} \right) \left[ 1 - C_1 \frac{\bar{V}^2}{gH} + \frac{1}{18} C_2 \frac{d^2}{k_s^2} \frac{1}{KZ} \right] \quad (4.11)'$$

和

$$Z^* = \frac{w^*}{K v_\tau} = \frac{w}{K v_\tau} \frac{w^*}{w} = Z \left( 1 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{6s_e}{\pi}} \right) \left[ 1 - C_1 \frac{\bar{V}^2}{gH} + \frac{1}{18} C_2 \frac{d^2}{k_s^2} \frac{1}{KZ} \right] \quad (4.12)'$$

我们把得到的(4.12)式和钱宁等<sup>(1)</sup>所做的水槽实验的结果进行了比较.详细情况见图1和图2.图中  $Z^*$  即按公式(4.12)所给出的数值,  $n$  为  $Z^*$  的实验测量值,  $Z$  为没有修正时候的指数,

[ ] 即括弧  $\left[ 1 - C_1 \frac{\bar{V}^2}{gH} + \frac{1}{18} C_2 \frac{d^2}{k_s^2} \frac{1}{KZ} \right]$ . 比较的结果,总的说来还能令人满意.

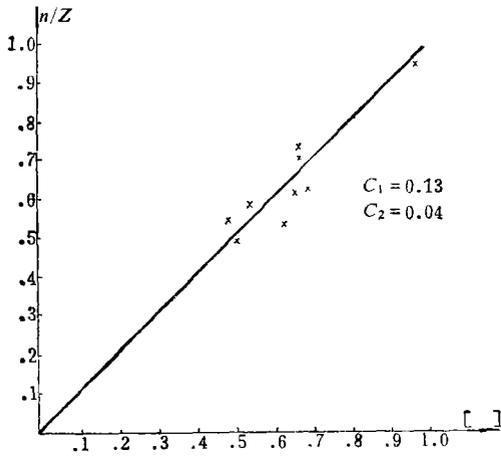


图 1

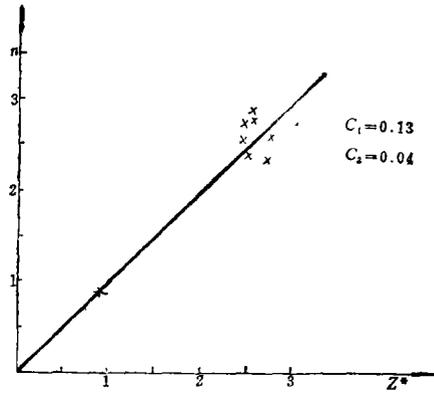


图 2

### 参 考 文 献

1. 蔡树棠, 物理学报, 12, 5 (1956), 402—408.
2. 蔡树棠, 物理学报, 12, 5 (1956), 409—418.
3. 蔡树棠, 物理学报, 13, 5 (1957), 388—398.
4. 蔡树棠, 物理学报, 13, 5 (1957), 399—408.
5. 维里康诺夫, 《河床过程》(中译本)第13章, 水利出版社(1960), 153—168.
6. 钱宁, 万兆惠, 近底高含沙量层流对水流及泥沙运动影响的初步探讨, 河(64)2, 中国科学院、水利电力部, 水利水电科学研究院, 1964年2月.

# The Velocity of Sand Particles Relative to Water and the Variation of Fluctuation Velocity due to the Concentration of Suspended Sand Particles

Tsai Shu-tang

*(Department of Modern Mechanics, University of Science and  
Technology of China, Hefei)*

## Abstract

In this paper, we discuss three fundamental problems of the theory of suspended sand particles based upon the theory of fluid dynamics.

They are: (1) the relative velocity of sand particles to the surrounding fluid in the turbulent flow, (2) the variation of the velocity fluctuation of the fluid when the suspended sand particles exist, (3) the profile of the vertical distribution of the concentration of the suspended sand particles in two-dimensional uniform steady channel flow and the modification of usual diffusion theory. The results of our theoretical analysis are somewhat different from the corresponding expressions in the text books of hydraulics and river mechanics.