

多重尺度法在椭圆管道磁流体 动力流中的应用

江福汝

(上海复旦大学数学系, 1981年4月20日收到)

摘 要

本文研究不可压缩可导流体沿一均匀磁场中的椭圆管道的流动. 在Hartmann数是充分大的情形下, 应用多重尺度法, 作出解的准确到任意量级的渐近近似式. 本方法可用于研究截面具有光滑周界的, 任意形状管道的磁流体动力流.

一、引 言

早在1965年, Hunt和Stewartson^[1]就研究了不可压缩可导流体, 沿一横向均匀磁场中的矩形管道的流动. 1967年, Roberts^[2]又研究沿一绝缘圆形管道的流动, 利用匹配方法作出解的准确到 M^{-2} 量级的渐近近似式, 其中 M 表示流动的Hartmann数. 本文研究不可压缩可导流体沿一绝缘椭圆管道的流动, 应用作者在文[3]中提出的多重尺度法, 作出解的准确到 M^{-1} 的任意量级的渐近近似式. 通过这两种方法的比较可以看出, 本方法比较清楚和简单, 并且可以用来研究截面具有光滑周界的, 任意形状管道的磁流体动力流, 和带有其他形式的边界条件. 本文只是以绝缘的椭圆管道作为一个例子, 来阐明我们的方法, 并便于和文[2]中的结果相比较.

假设一具有椭圆截面的管道是放置在一均匀磁场 B_0 中, 并且管道的轴垂直于磁场方向. 取管道的中心, 作为所引入的笛卡儿坐标系 (x, y, z) 的原点, 并使 x -轴平行于流动的方向, z -轴平行于磁场方向(见图1). 以 A 表示椭圆的长半径, 假设与磁场方向平行; 以 B 表示其短半径.

取长半径 A 的长度作为坐标轴的单位长度, 从[1]和[2]知: 流动的规范速度 $v(y, z)$ 和感应磁场 $b(y, z)$ 确定于下面的微分方程组:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M \frac{\partial b}{\partial z} = -1 \quad (1.1)$$

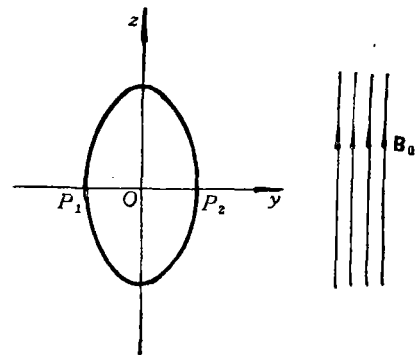


图 1

$$\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + M \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

其中 M 是流动的 Hartmann 数: $M = AB_0(\sigma/\rho\nu)^{\frac{1}{2}}$; ρ , ν 和 σ 分别表示流体的密度, 运动粘度和电导率; B_0 是管道所在磁场的通量密度.

假设管道壁是绝缘, 应给出边界条件:

$$v = b = 0, \quad \text{在椭圆 } \frac{y^2}{p^2} + z^2 = 1 \text{ 上} \quad (1.3)$$

其中 $p = \frac{B}{A}$.

定义函数 $X(y, z)$:

$$X = v + b \quad (1.4)$$

从(1.1)–(1.3)式知, 它确定于下面的边值问题:

$$\epsilon \left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial X}{\partial z} = -\epsilon \quad (1.5)$$

$$X|_{z = \pm \sqrt{1 - y^2/p^2}} = 0 \quad (1.6)$$

其中 $\epsilon = M^{-1} \ll 1$.

再定义函数 $\tilde{X}(y, z)$:

$$\tilde{X} = v - b \quad (1.7)$$

易知

$$\tilde{X}(y, z) = X(y, -z) \quad (1.8)$$

所以如果求得 $X(y, z)$, 则可由(1.8)式求得 \tilde{X} , 从而求得^{*}

$$v = \frac{1}{2}(X + \tilde{X}) = \frac{1}{2}[X(y, z) + X(y, -z)] \quad (1.9)$$

$$b = \frac{1}{2}(X - \tilde{X}) = \frac{1}{2}[X(y, z) - X(y, -z)] \quad (1.10)$$

因此我们只须求边值问题(1.5)–(1.6)的解 X .

二、外 部 解

设解的外部展开式是

$$X^{(0)} \sim w_0(y, z) + \epsilon w_1(y, z) + \dots + \epsilon^i w_i(y, z) + \dots \quad (2.1)$$

将上式代入(1.5)式, 并比较等式 ϵ 的同次幂的系数, 可得到关于 w_i , ($i=0, 1, \dots$) 的递归形式的方程组:

* 文[2]中的(9)式应更正为 $v(y, z) = v(-y, z) = \frac{1}{2}[X(y, z) + X(y, -z)]$

$$b(y, z) = b(-y, z) = \frac{1}{2}[X(y, z) - X(y, -z)]$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = -1 - \Delta w_0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial z} = -\Delta w_{i-1} \quad (i=2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

这些方程是关于 w_0, w_1, \dots 的一阶方程, 根据文[4]的讨论知道, 我们应将 w_i , ($i=0, 1, \dots$) 的边界条件都给在上半椭圆弧上, 即给在退化方程[在(1.5)中令 $\varepsilon=0$ 所得的方程]的特征穿出区域的那部分边界上. 将(2.1)式代入(1.6), 并比较等式 ε 的同次幂的系数, 得

$$w_i|_{z=\sqrt{1-y^2/p^2}} = 0, \quad (i=0, 1, \dots) \quad (2.5)$$

从(2.2)和(2.5)式知

$$w_0 = 0 \quad (2.6)$$

将上式代入(2.3)式, 考虑到边界条件(2.5), 可解得 w_1 :

$$w_1 = -z + \sqrt{1 - \frac{y^2}{p^2}} \quad (2.7)$$

再将 w_1 代入(2.4)式 (取 $i=2$), 考虑到边界条件(2.5), 又解得

$$w_2 = \frac{-1}{p^2} \left(-z + \sqrt{1 - \frac{y^2}{p^2}} \right) \left(1 - \frac{y^2}{p^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (2.8)$$

这样继续下去, 可以求得

$$w_i = \int^z \frac{1}{\sqrt{1-y^2/p^2}} (-\Delta w_{i-1}) dz \quad (i=3, 4, \dots) \quad (2.9)$$

再将(2.6) — (2.9)式代回(2.1)式, 就求得 $X^{(0)}$. 如此求得的 $X^{(0)}$ 虽然形式地满足方程(1.5), 和在上半椭圆弧满足边界条件(1.6), 但在下半圆弧一般不满足边界条件(1.6), 因此我们称它为边值问题(1.5) — (1.6)的“外部解”, 它描述流动的主流(main stream). 为了补足 $X^{(0)}$ 在下半椭圆弧也满足边界条件(1.6), 在下一节将再沿该弧段构造边界层校正项.

三、边界层校正项

在下半椭圆弧的邻域引入局部坐标系 (r, θ) :

$$y = pr \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (3.1)$$

在局部坐标系下, 方程(1.5)和边界条件(1.6)分别具有形式:

$$\begin{aligned} L_* X \equiv & \left[a(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2b(r, \theta) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + c(r, \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + d(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} \right. \\ & \left. + e(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] X + \left[\alpha(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \beta(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] X = -1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

和

$$X|_{r=1} = 0 \quad (3.3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a(\theta) &= \frac{\sin^2 \theta}{p^2} + \cos^2 \theta, & b(r, \theta) &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{1}{p^2} - 1 \right) \\ c(r, \theta) &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{p^2} + \sin^2 \theta \right) & d(r, \theta) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\cos^2 \theta}{p^2} + \sin^2 \theta \right) \\ e(r, \theta) &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \\ \alpha(\theta) &= \cos \theta & \beta(r, \theta) &= \frac{-\sin \theta}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

下面, 再采用作者在文[3]中提出的多重尺度法, 沿下半椭圆弧构造边界层校正项。
引入具有多重尺度的三变量:

$$f = \frac{g(r, \theta)}{\varepsilon}, \quad \xi = r, \quad \eta = \theta \quad (3.5)$$

将关于 r 和 θ 的偏导数, 代换成关于 f , ξ 和 η 的偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \varepsilon^{-1} \left(g_r \frac{\partial}{\partial f} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} &= \varepsilon^{-2} \left[g_r g_\theta \frac{\partial^2}{\partial f^2} + \varepsilon \left(g_\theta \frac{\partial^2}{\partial f \partial \xi} + g_r \frac{\partial^2}{\partial f \partial \eta} + g_{r\theta} \frac{\partial}{\partial f} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right] \end{aligned}$$

其中 $g_r \equiv \frac{\partial g}{\partial r}$, 等等; 将 r 和 ξ 分别替换以 θ 和 η , 则得到 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$; 将 θ 和 η 分别替换以 r 和 ξ , 则得到 $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$. 在三变量 f , ξ 和 η 下, (3.2) 中的微分算子 L_ε 可以展开成

$$L_\varepsilon \equiv \varepsilon^{-1} (K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2) \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} K_0 &\equiv (a g_r^2 + 2 b g_r g_\theta + c g_\theta^2) \frac{\partial^2}{\partial f^2} + (a g_r + \beta g_\theta) \frac{\partial}{\partial f} \\ K_1 &\equiv a \left(2 g_r \frac{\partial^2}{\partial f \partial \xi} + g_{rr} \frac{\partial}{\partial f} \right) + 2 b \left(g_\theta \frac{\partial^2}{\partial f \partial \xi} + g_r \frac{\partial^2}{\partial f \partial \eta} + g_{r\theta} \frac{\partial}{\partial f} \right) \\ &\quad + c \left(2 g_\theta \frac{\partial^2}{\partial f \partial \eta} + g_{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial f} \right) + d g_r \frac{\partial}{\partial f} + e g_\theta \frac{\partial}{\partial f} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ K_2 &\equiv a \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 b \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + c \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + d \frac{\partial}{\partial \xi} + e \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned}$$

设边界层校正项的展开式具有形式:

$$V \sim \varepsilon [v_0(f, \xi, \eta) + \varepsilon v_1(f, \xi, \eta) + \dots + \varepsilon^i v_i(f, \xi, \eta) + \dots] \quad (3.7)$$

代入 (3.2) 所对应的齐次方程: $L_\varepsilon V \equiv 0$, 再比较等式的 ε 同次幂的系数, 则得到关于 v_i ($i=0, 1, \dots$) 的递归形式的方程组:

$$(a g_r^2 + 2 b g_r g_\theta + c g_\theta^2) \frac{\partial^2 v_0}{\partial f^2} + (a g_r + \beta g_\theta) \frac{\partial v_0}{\partial f} = 0 \quad (3.8)$$

$$(ag^2 + 2bg_0g_0 + cg_0^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial f^2} + (ag_0 + \beta g_0) \frac{\partial v_1}{\partial f} = -K_1 v_0 \quad (3.9)$$

$$(ag^2 + 2bg_0g_0 + cg_0^2) \frac{\partial^2 v_i}{\partial f^2} + (ag_0 + \beta g_0) \frac{\partial v_i}{\partial f} = -(K_1 v_{i-1} + K_2 v_{i-2}) \quad (i=2,3,\dots) \quad (3.10)$$

从方程 (3.8) 可看出, 若取待定函数 $g(r, \theta)$ 是下面非线性方程:

$$ag^2 + 2bg_0g_0 + cg_0^2 = ag_0 + \beta g_0 \quad (3.11)$$

满足条件

$$g \Big|_{z = -\sqrt{1-y^2/p^2}} = 0 \quad (3.12)$$

$$g > 0, \text{ 在下半圆弧的邻域} \quad (3.13)$$

的解, 则方程 (3.8) 化为常系数方程:

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial f^2} + \frac{\partial v_0}{\partial f} = 0 \quad (3.14)$$

具有在下半圆弧的邻域按指数规律衰减的解:

$$v_0 = h_0(\xi, \eta) e^{-f} = h_0(r, \theta) \exp \left[(1-r) \frac{p^2 \cos \theta}{\sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta} \right] \quad \left(|\theta| > \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.15)$$

其中 h_0 是 ξ 和 η 的任意函数, 将在下一步骤中确定.

将 (3.15) 式代入 (3.9) 式, 并令其右端等于零, 则得到确定 h_0 的微分方程:

$$\begin{aligned} (\alpha - 2ag_0 - 2bg_0) \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + (\beta - 2bg_0 - 2cg_0) \frac{\partial h_0}{\partial \eta} \\ - (ag_{0r} + 2bg_{0\theta} + cg_{0\theta\theta} + dg_0 + eg_0) h_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

以及关于 v_1 的微分方程:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial f^2} + \frac{\partial v_1}{\partial f} = 0$$

可求得在下半圆弧的邻域按指数规律衰减的解为

$$v_1 = h_1(\xi, \eta) e^{-f} = h_1(r, \theta) \exp \left[(1-r) \frac{p^2 \cos \theta}{\sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta} \right] \quad \left(|\theta| > \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.17)$$

其中 h_1 是任意函数.

这样继续下去可以求得

$$v_i = h_i(\xi, \eta) e^{-f} = h_i(r, \theta) \exp \left[(1-r) \frac{p^2 \cos \theta}{\sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta} \right] \quad \left(|\theta| > \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.18)$$

其中 h_i 确定于微分方程:

$$\begin{aligned} (\alpha - 2ag_0 - 2bg_0) \frac{\partial h_i}{\partial \xi} + (\beta - 2bg_0 - 2cg_0) \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \\ - (ag_{0r} + 2bg_{0\theta} + cg_{0\theta\theta} + dg_0 + eg_0) h_i = -e^f K_2 v_{i-1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

($i=1, 2, \dots$)

为了补足 $X^{(0)}$ 在下半圆弧也满足边界条件 (1.6), 我们应将 v_i ($i=0, 1, \dots$) 的边界条件给成

$$v_i|_{z=-\sqrt{1-y^2/p^2}} = -\tilde{w}_{i+1}|_{r=1}, \quad (i=0, 1, \dots) \quad (3.20)$$

即

$$h_i|_{\varepsilon=1} = -\tilde{w}_{i+1}|_{r=1}, \quad \left(|\theta| > \frac{\pi}{2}\right) (i=0, 1, \dots) \quad (3.21)$$

其中 $\tilde{w}_i(r, \theta)$ 是 $w_i(y, z)$ 在局部坐标系中的表示式. 从关于 $h_i, (i=0, 1, \dots)$ 的微分方程(3.16)和(3.17), 以及关于 $h_i, (i=0, 1, \dots)$ 的边界条件(3.21), 可以逐步地求得 $h_i, (i=0, 1, \dots)$, 从而求得 V . 因此边值问题(1.5) — (1.6)的解的渐近展开式是

$$X \sim \left\{ \begin{array}{l} e\left(-z + \sqrt{1 - \frac{y^2}{p^2}}\right) + \varepsilon^2 \left[\frac{-1}{p^2} \left(-z + \sqrt{1 - \frac{y^2}{p^2}}\right) \left(1 - \frac{y^2}{p^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right] + \dots \\ + e^1 \int_{\sqrt{1-y^2/p^2}}^z (-\Delta w_{i-1}) dz + \dots \\ \text{在下半椭圆弧邻域外面的外部区域} \\ \\ e\left(-z + \sqrt{1 - \frac{y^2}{p^2}}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{-1}{p^2} \right) \left(-z + \sqrt{1 - \frac{y^2}{p^2}}\right) \left(1 - \frac{y^2}{p^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + \dots \\ + e^1 \int_{\sqrt{1-y^2/p^2}}^z (-\Delta w_{i-1}) dz + \dots \\ + \varepsilon [h_0(r, \theta) + \varepsilon h_1(r, \theta) + \dots + \varepsilon^i h_i(r, \theta) + \dots] e^{-\frac{g(r, \theta)}{\varepsilon}} \\ \text{在下半椭圆弧邻域, 但不包括端点 } P_1 \text{ 和 } P_2 \text{ 的邻域, 在这两点, 边界的} \\ \text{切线与 } \mathbf{B}_0 \text{ 平行.} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

其中 $h_i, (i=0, 1, \dots)$ 确定于微分方程(3.16)、(3.17), 以及边界条件(3.21); $g(r, \theta)$ 是非线性微分方程(3.11)满足条件(3.12) — (3.13)的解. 由于上面给出的渐近展开式在边界的 P_1 和 P_2 点上有奇性, 所以需要在这些点的邻域重新构造边界层校正项. 关于这问题, 我们将在另一文中详细讨论.

四、一些特殊情形

1. 若我们只要求作出解的准确到 ε 量级的渐近近似式, 可取函数^[8]

$$g(r, \theta) = \int_1^r \frac{\alpha(\theta)}{a(\theta)} dr = (r-1) \frac{p^2 \cos \theta}{\sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta} \quad \left(|\theta| > \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.1)$$

作为非线性方程(3.11)满足条件(3.12) — (3.13)的近似解, 并只需写出 K_0 :

$$K_0 = ag^2 \frac{\partial^2}{\partial f^2} + ag \frac{\partial}{\partial f} = \frac{\alpha^2}{a} \left(\frac{\partial^2}{\partial f^2} + \frac{\partial}{\partial f} \right) \quad (4.2)$$

因为在下半椭圆弧的 ε 邻域成立

$$g_\varepsilon = O(\varepsilon)$$

又在该邻域的外部区域成立

$$g_0 \frac{\partial v_0}{\partial f} = \left[- \int_1^r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{a}{a} \right) dr \right] h_0(r, \theta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_1^r \frac{a}{a} dr} = O(\varepsilon)$$

故

在此情形, 我们可取(3.15)式中的任意函数 h_0 为

$$h_0(r, \theta) = -\tilde{w}_1|_{r=1} = 2 \cos \eta \quad \left(|\eta| > \frac{\pi}{2} \right)$$

因此边界层校正项准确到 ε 量级的近似式为

$$V \sim \varepsilon 2 \cos \theta \exp \left[\frac{-1}{\varepsilon} (r-1) \frac{p^2 \cos \theta}{\sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta} \right] \quad \left(|\theta| > \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.3)$$

2. 特例地, 对于圆形截面管道, 有 $p=1$, 于是解的外部展开式是

$$\begin{aligned} X^{(0)} &\sim \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots + \varepsilon^l w_l + \dots \\ &= \varepsilon (-z + \sqrt{1+y^2}) + \varepsilon^2 [-(-z + \sqrt{1-y^2})(1-y^2)^{-\frac{3}{2}}] + \dots \\ &\quad + \varepsilon^l \int_{\sqrt{1-y^2}}^z (-\Delta w_{l-1}) dz + \dots \end{aligned}$$

它的准确到 ε^2 量级的近似式, 曾先后被Gold^[4], Shercliff^[5]和Roberts^[2]等从不同的观点导出.

在(3.23)的第二括号中, 令 $p=1$, 则得到边界层校正项的渐近展开式. 它的准确到 ε 量级的近似式, 可于(4.3)式中令 $p=1$ 得出, 与Roberts^[2]依据物理假设导出的近似式是一致的.

注1. 从(4.3)式可以看出, 边界层的厚度是随 ε 和 θ 而改变, 当 $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ 时, 它的厚度趋向无穷大. 所以由上面各式给出的边界层项, 在 P_1 和 P_2 点(见图1)的邻域无效, 在这些点的邻域需重新构造边界层校正项.

注2. 从上面讨论的过程中可以看到, 对于其他形式截面的管道, 本方法仍然适用, 只需在构造边界层校正项时, 采用其他适当形式的局部坐标以代替(3.1).

参 考 文 献

1. Hunt, J. C. R. & Stewartson, K., Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts, **I**, *J. Fluid Mech.*, 23, 3(1965), 563—581.
2. Roberts, P. H., Singularities of Hartmann layers, *Proc. Royal Soc. Series A*, 300, 22(1967), 94—107.
3. 江福汝, 关于边界层方法, 应用数学和力学, 2, 5 (1981), 461—474.
4. Gold, R. R., Magnetohydrodynamic pipe flow, Part 1, *J. Fluid Mech.*, 13.4(1962), 505—512.
5. Shercliff, J. A., Magnetohydrodynamic pipe flow, Part 2. High Hartmann number, *J. Fluid Mech.*, 13, 4(1962), 513—518.

An Application of the Method of Multiple Scales to Magnetohydrodynamic Flow

Jiang Fu-ru

(Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

In this paper we study the flow of an incompressible conducting fluid along an elliptic duct imposed in a uniform magnetic field. In case Hartmann number of the flow is sufficiently large, the method of multiple scales is adopted for constructing the asymptotic approximation of solution up to any order. Our method can also be applied to study the magnetohydrodynamic flow along any duct whose cross-section has smooth boundary.