

L形和十形截面杆的抗扭刚度

陈宜周 陈宜亨

(西北工业大学) (西安交通大学)

(叶开沅推荐, 1981年6月16日收到)

摘 要

本文是作者前三篇论文的一个继续^[1-3]。利用调和函数延拓方法, L形和十形截面杆的抗扭刚度很容易求得。数值结果如表1-3所示。

一、引 言

早在1965年, 作者在一篇科研报告中提出一种调和函数延拓方法。已经表明, 这一方法对于某类 Saint-Venant 扭转和弯曲问题是十分有效的。近几年来, 以此方法为基础已发表了三篇论文^[1-3]。作为进一步发展, 陈宜亨把本方法推广到下列情况, 即把考虑的区域分成几个矩形子区域时, 区域内含有几个内节点的情况^[4]。从我们的实践经验可知, 这一方法是所有同一类型方法中的最好的一个。

因为L形和十形截面经常用于工程实际, 从而我们讨论L形和十形截面杆的 Saint-Venant 扭转问题如下。再者, 可把本文看成论文^[1-3]的继续。

二、L形截面杆的抗扭刚度*

代替扭转共轭函数 $\Psi(x, y)$ ^[5, 6], 引入一个新的调和函数 $\Phi(x, y)$ 如下:

$$\Phi(x, y) = 2\Psi(x, y) \quad (2.1)$$

从而, 函数 $\Phi(x, y)$ 的定解方程为

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = 0, \quad \Phi|_l = x^2 + y^2 \quad (2.2)$$

式中 l 为考虑区域的周界 (参看图1和图2)。显然, 扭转刚度可表为

$$J = \iint_R (\Phi - x^2 - y^2) dx dy \quad (2.3)$$

式中 R 为截面占有的积分区域 (参看图1和图2)。

现在解决具体的定解问题。

* 参看图1。

对于图 1 所示的杆件截面, 我们可沿线段 AD 和 GD 作假想分割, 这时可得三个矩形子区域. 我们把这三个区域记成 F_I , F_{II} , F_{III} , 并把相应的三个调和函数分别记成 Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} .

在线段 GD 和 AD 上引入两个待定函数 $f(x)$ 和 $g(y)$, 并令

$$\begin{aligned}\Phi(x, c) &= c^2 + ax + f(x), \quad (0 \leq x \leq a), \quad \text{即在线段 } GD \text{ 上} \\ \Phi(a, y) &= a^2 + cy + g(y), \quad (0 \leq y \leq c), \quad \text{即在线段 } AD \text{ 上}\end{aligned}\quad (2.4)$$

注意, a, b, c, d 为图 1 中截面的尺寸, 而 x, y 是变量.

此外, Fourier 系数 f_n , g_n 和修正 Fourier 系数 F_n , G_n 写成下式

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{F_n}{n} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n=1, 2, \dots \\ g_n &= \frac{G_n}{n} = \frac{2}{c} \int_0^c g(y) \sin \frac{n\pi y}{c} dy, \quad n=1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.5)$$

注意, 引入修正 Fourier 系数 F_n , G_n 只不过是今后书写形式的简便.

易于证明, 由式 (2.2) 和 (2.4), 方程 (2.2) 在区域 $ABCD$ (F_I), $OADG$ (F_{II}) 和 $GDEF$ (F_{III}) 上分别有解如下

$$\begin{aligned}\Phi_I(x, y) &= a^2 + (2a+b)(x-a) + cy - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8b^2 \Delta_n}{\pi^3 n^3} \frac{\text{ch}(n\pi(y-c/2)/b)}{\text{ch}(n\pi c/2b)} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8c^2 \Delta_n}{\pi^3 n^3} \frac{\text{sh}(n\pi(x-a)/c)}{\text{sh}(n\pi b/c)} \sin \frac{n\pi y}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{n} \frac{\text{sh}(n\pi(a+b-x)/c)}{\text{sh}(n\pi b/c)} \sin \frac{n\pi y}{c} \\ &\quad (a \leq x \leq a+b, 0 \leq y \leq c)\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{II}(x, y) &= ax + cy - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8a^2 \Delta_n}{\pi^3 n^3} \frac{\text{sh}(n\pi(c-y)/a)}{\text{sh}(n\pi c/a)} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8c^2 \Delta_n}{\pi^3 n^3} \frac{\text{sh}(n\pi(a-x)/c)}{\text{sh}(n\pi a/c)} \sin \frac{n\pi y}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n} \frac{\text{sh}(n\pi y/a)}{\text{sh}(n\pi c/a)} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{n} \frac{\text{sh}(n\pi x/c)}{\text{sh}(n\pi a/c)} \sin \frac{n\pi y}{c}, \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq c)\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{III}(x, y) &= c^2 + ax + (2c+d)(y-c) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8d^2 \Delta_n}{\pi^3 n^3} \frac{\text{ch}(n\pi(x-a/2)/d)}{\text{ch}(n\pi a/2d)} \sin \frac{n\pi(y-c)}{d} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8a^2 \Delta_n}{\pi^3 n^3} \frac{\text{sh}(n\pi(y-c)/a)}{\text{sh}(n\pi d/a)} \sin \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n} \frac{\text{sh}(n\pi(c+d-y)/a)}{\text{sh}(n\pi d/a)} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ &\quad (0 \leq x \leq a, c \leq y \leq c+d)\end{aligned}\quad (2.8)$$

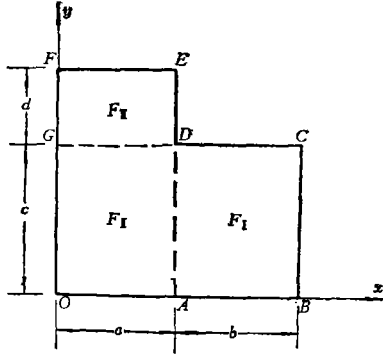


图 1 L形截面.

上式中

$$\Delta_n = (1 - (-1)^n) / 2 \quad (2.9)$$

按照 Duhem 定理^[7], 即调和函数的一个延拓定理, 沿着分割线, 应有

$$\left. \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} \right|_{x=a}, \quad (0 \leq y \leq c) \text{ 即沿着线段 } AD \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial y} \right|_{y=c} = \left. \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial y} \right|_{y=c}, \quad (0 \leq x \leq a) \text{ 即沿着线段 } GD \quad (2.11)$$

若把式(2.6)–(2.8)代入上述方程, 并把等式两侧展成 Fourier 级数, 便得 G_m , F_m 的无限方程组

$$\begin{aligned} G_m = \frac{1}{X_m} \left\{ \frac{4c(a+b)}{\pi^2 m} \Delta_m - 2U(a, c, m) - 4U(b, c, m) \Delta_m \right\} \\ - \frac{8c^2 \Delta_m}{\pi^2 m^2 X_m} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(m\pi a/c)} + \frac{1}{\operatorname{sh}(m\pi b/c)} \right) + \frac{2ma}{\pi c X_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} F_n}{n^2 + (ma/c)^2} \\ m=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} F_m = \frac{1}{Y_m} \left\{ \frac{4a(c+d)}{\pi^2 m} \Delta_m - 2U(c, a, m) - 4U(d, a, m) \Delta_m \right\} \\ - \frac{8a^2 \Delta_m}{\pi^2 m^2 Y_m} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(m\pi c/a)} + \frac{1}{\operatorname{sh}(m\pi d/a)} \right) + \frac{2mc}{\pi a Y_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} G_n}{n^2 + (mc/a)^2} \\ m=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

式中 X_m , Y_m , $U(a, c, m)$ 为

$$X_m = \operatorname{cth} \frac{m\pi a}{c} + \operatorname{cth} \frac{m\pi b}{c} \quad m=1, 2, \dots$$

$$Y_m = \operatorname{cth} \frac{m\pi c}{a} + \operatorname{cth} \frac{m\pi d}{a} \quad m=1, 2, \dots$$

$$U(a, c, m) = \frac{ac}{\pi^2 m} \left(1 - \frac{2c}{\pi m a} \operatorname{th} \frac{\pi m a}{2c} \right) \quad (2.14)$$

若把式(2.6)–(2.8)代入式(2.3)中, 便得 L形截面杆的抗扭刚度如下式

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{6} \{ bc(b^2 + c^2) + ac(a^2 + c^2) + ad(a^2 + d^2) \} - \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{32}{\pi^6 n^6} \left\{ b^4 \operatorname{th} \frac{n\pi c}{2b} + d^4 \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2d} \right\} \\ - \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{16}{\pi^6 n^6} \left\{ c^4 \left(\operatorname{th} \frac{n\pi b}{2c} + \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2c} \right) + a^4 \left(\operatorname{th} \frac{n\pi c}{2a} + \operatorname{th} \frac{n\pi d}{2a} \right) \right\} \\ + \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} \left\{ G_n c^2 \left(\operatorname{th} \frac{n\pi a}{2c} + \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2c} \right) + F_n a^2 \left(\operatorname{th} \frac{n\pi c}{2a} + \operatorname{th} \frac{n\pi d}{2a} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

现在可把上述方法总结如下.

对于图1所示截面的扭转杆, 我们可先解出方程组(2.12)和(2.13), 把得到的关于 F_n 和 G_n 的解代入到式(2.15)中, 最后便得抗扭刚度的值.

若在式(2.12), (2.13)和(2.15)中截取前15项, 所得的结果如表1和表2所示.

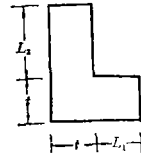


表 1 A 值表 $J=A\left(\frac{L_1}{t}, \frac{L_2}{t}\right) \cdot t^4$

L_2/t \ L_1/t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.5	0.5016									
1.0	0.6776	0.8544								
1.5	0.8462	1.0244	1.1835							
2.0	1.0134	1.1817	1.3561	1.5280			对称			
2.5	1.1802	1.3685	1.5277	1.6948	1.8316					
3.0	1.3471	1.5254	1.6945	1.8617	2.0285	2.1951				
3.5	1.5140	1.6823	1.8614	2.0286	2.1953	2.3620	2.5287			
4.0	1.6809	1.8593	2.0285	2.1855	2.3623	2.5290	2.6957	2.8623		
4.5	1.8480	2.0263	2.1954	2.3626	2.5294	2.6961	2.8627	3.0294	3.1961	
5.0	2.0151	2.1935	2.3626	2.5298	2.6965	2.8632	3.0299	3.1966	3.3663	3.5299

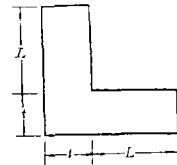


表 2 B 值表 $J=B\left(\frac{L}{t}\right) \cdot t^4$

L/t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
B 值	0.2040	0.2763	0.3517	0.4272	0.5015	0.5745	0.6461	0.7165	0.7860	0.8544
L/t	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
B 值	0.9231	0.9909	1.0585	1.1258	1.1832	1.2599	1.3268	1.3937	1.4605	1.5280
L/t	2.5	3.0	2.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
B 值	1.8616	2.1951	2.5287	2.8623	3.1961	3.5299	3.8632	4.1974	4.5320	4.8669
L/t	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10				
B 值	5.2020	5.5379	5.8740	6.2105	6.5477	6.8852				

三、十形截面杆的抗扭刚度*

对于图2所示的截面情况, 方程(2.2)和(2.3)仍为正确, 这里的推导和上节完全类同, 故把整个计算方法简述如后.

今在分割线上引入待定函数 $g(x)$ (或 $g(y)$), 又令

$$\Phi(\pm t, y) = 2t^2 + g(y), \quad (-t \leq y \leq t), \quad \text{即在线段 } AB \text{ 和 } CD \text{ 上}$$

$$\Phi(x, \pm t) = 2t^2 + g(x), \quad (-t \leq x \leq t), \quad \text{即在线段 } BC \text{ 和 } AD \text{ 上} \quad (3.1)$$

再令

* 参看图2.

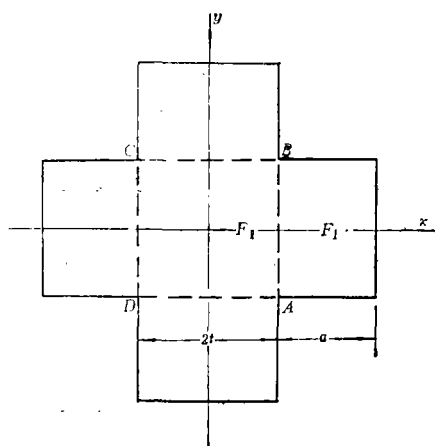


图2 +字形截面.

式中

$$X_m = \text{th} \frac{m\pi}{2} + \text{cth} \frac{m\pi a}{2t} \quad m=1, 3, 5 \quad (3.4)$$

又 U 函数的定义仍如式 (2.14) 所示.

把得到的解 (未具体写出) 代入到式 (2.3) 中, 便得+形截面杆的抗扭刚度

$$J = \frac{1}{3} (16t^4 + 16t^3a + 4ta^3) - \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{128}{\pi^5 n^5} \left(8t^4 \text{th} \frac{n\pi a}{4t} + a^4 \text{th} \frac{n\pi t}{a} \right) - \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{32G_n t^2}{\pi^2 n^3} \left(\text{th} \frac{n\pi}{2} + \text{th} \frac{n\pi a}{4t} \right) \quad (3.5)$$

所得的数值结果如表 3 所示.

表 3 C 值表 $J = C \left(\frac{a}{2t} \right) \cdot (2t)^4$ (见图 2)

$a/2t$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
C 值	0.2836	0.4691	0.6700	0.869	1.0589	1.2374	1.4056	1.5654	1.7184	1.8663
$a/2t$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
C 值	2.0105	2.1517	2.2909	2.4285	2.5649	2.7005	2.8355	2.9701	3.1043	3.2383
$a/2t$	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
C 值	3.906	4.5737	5.2408	5.9080	6.5754	7.2432	7.9113	8.5797	9.2489	9.9188
$a/2t$	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10				
C 值	10.589	11.261	11.932	12.606	13.280	13.955				

参 考 文 献

1. Chen Yi-zhou (陈宜周), Solutions of torsion crack problems of a rectangular bar by harmonic function continuation technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 13 (1980), 193—212.
2. 陈宜周, 带裂纹矩形截面杆抗扭刚度和第三型应力强度因子的计算方法, 西北工业大学论文选(上), (1979), 161—176.
3. 陈宜周, 带裂纹角钢形截面杆抗扭刚度和第三型应力强度因子的计算, 固体力学学报, 2, (1981), 110—116.
4. 陈宜亨, 论 Laplace 方程 Dirichlet 问题的一个有限元模式 (待发表) (1980).
5. Sikołnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, (1956).
6. Budak, B. Y., Samarskii, A. A. and Tikhonov, A. N., *A Collocation of Problems on Mathematical Physics*, Pergamon Press, (1964).
7. 吴新谋, 《数学物理方程》, 2 (1958), 177.
8. 钱伟长等, 《弹性柱体的扭转理论》, 科学出版社, (1958).

On the Torsional Rigidity for Bars with L- and + -Cross-Section

Chen Yi-zhou

(Division of Solid Mechanics, North-western Polytechnical University, Xian)

Chen Yi-heng

(Division of Solid Mechanics, Xian Chiao-tung University, Xian)

Abstract

This paper is a continuation of the senior author's previous papers¹⁻³.

Using the harmonic continuation technique, the torsional rigidity for bars with L- and + -cross-section can be easily found. Numerical results are shown in Tables 1-3 respectively.