应用数学和力学，第3卷第1期（1982年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

不受本构关系限制的守恒积分*

张 培 源

（重庆大学，1981年7月22日收到）

摘 要

Rice定义的J积分受介质本构关系的限制．本文对J积分的Rice定义加以推广，提出不受介质本构关系限制的守恒积分，并证明其具有通常J积分的性质．在弹性介质情况下，这种推广的守恒积分就是Rice定义的J积分．

一、引 言

Rice定义的J积分[1]受介质本构关系的限制．这个限制要求应力应变关系是"弹性的"，即介质存在一个状态函数w，它是应变分量的单值函数，应力分量σ_{kl}与应变分量ε_{kl}由它联系起来．

$$\sigma_{kl}=\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{1.1}$$

这个限制可以放宽到全量型弹塑性介质无卸载的情况．但在弹塑性介质的一般情况下，未必存在状态函数$w(\varepsilon_{kl})$，却又同时存在弹性区和塑性区，加载区和卸载区，因而原则上讲J积分的Rice定义已经不适用．虽然一些简单情况下的数字计算[2,3]说明，似乎Rice定义的J积分也有守恒性，但这种结论缺乏理论基础．为了拓广守恒积分的适用范围，文献[4]对Prandtl-Reuss材料提出了与围道无关的I积分．但这个守恒积分仍受限于介质的本构关系，并且未考虑弹塑性介质中应力和应变可能出现的间断性质．在弹性区与塑性区，塑性加载区和卸载区之间存在弱间断；在某些情况下，还会出现强间断，即应力应变本身发生跳跃．因而与围道无关的守恒积分在一般情况下应计及这些情况．针对以上问题，本文把Rice定义推广，提出不受应力应变关系限制，只与应力场、位移场的最终状态有关的守恒积分．分析证明，这样拓广的一种守恒积分具有与一般J积分相同的主要性质．在弹性介质的特殊情况下，它与Rice定义的J积分相同．

为简明计，下面仅以二维形式叙述推广的这个守恒积分的定义及主要性质．

---

* 罗祖道推荐．

二、弹塑性裂纹体内的应力场和位移场

研究裂纹体在Lagrange直角坐标系oxy内的平面二维问题．设介质不受体积力和体积力矩的作用；应变是弱小的；裂纹面是与y轴垂直的平面贯穿区域．在外力和其他外加因素的作用下，物体内形成应力场σ_{kl}，位移场u_k和应变场ε_{kl}

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{kl}=\sigma_{kl}(a;\ x,\ y),\ u_k=u_k(a;\ x,\ y)\\&\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{kl}(a;\ x,\ y)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

式中a——裂纹参数（长度）；x，y——物质坐标．

又设D是挖去了裂纹前缘T邻域的物体所占区域，S为其边界；$S_k(k=1,\ 2,3,\ \cdots n)$为域$D$内按段光滑的有向曲线，如图1中$AB$，$BC$和$DA$等．用$D_S$表示$D$中排除了曲线$S_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots n)$的区域．

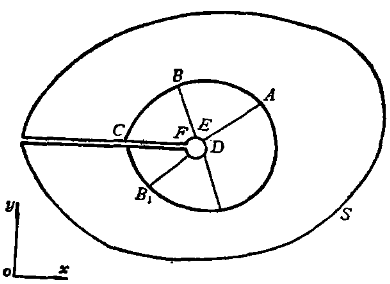


图1 区域D.

一般而言，在D上σ_{kl}，u_k和ε_{kl}总满足如下条件：

1． 在D上σ_{kl}是静力允许的，即在D_S上σ_{kl}可微且满足

$$\sigma_{kl,k}=0,\quad \sigma_{kl}=\sigma_{lk},\quad (x,\ y)\subset D_S\tag{2.2}$$

在S_k和S上，满足毗连介质的平衡条件

$$T_k=\sigma_{lk}\cdot n_l,\qquad (x,\ y)\subset S_i\text{ 或 }S\tag{2.3}$$

式中n_l——S_k或S法线的方向余弦；T_k——S或S_i正侧上的应力矢量．

2． 在D上，u_k-ε_{kl}是几何相容的，即在D上u_k连续，在D_S上有连续的应变场

$$\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k})\tag{2.4}$$

线段S_k可以相应于弹性区、塑性加载区、塑性卸载区和卸载后的加载区等之间的界线．按塑性理论的一般原理[5]，横越曲线S_k时，应力应变可以是连续的，对坐标的变化率可以不连续，这就是“弱间断”的情况．对于理想塑性材料，有时应力应变本身也未必连续，这是“强间断”的情况[6]．下面用$[A]_{S_i}$表示定义在曲线S_i邻域的量A，由S_i的负法线一侧的取值$A[S_i]$通过S_i到正法线一侧取值为$A[-S_i]$而产生的跳跃，即

$$[A]_{S_i}=A[S_i]-A[-S_i]\tag{2.5}$$

三、J积分的一般定义及守恒性

1． 在空间oxy中引入按段光滑的封闭曲线Γ，使$\Gamma\subset\bar{D}$．这里$\bar{D}$为区域D与其边界之和集．曲线Γ或者不围绕裂纹前缘T，或者围绕裂纹前缘T，分别称之为第Ⅰ类和第Ⅱ类围道．用D_Γ表示D在Γ内的部分区域．

定义 把位移场u_k和应力场σ_{kl}的、在封闭曲线Γ上的如下积分记作$J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]$

$$J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]\equiv\int_\Gamma\left(Bn_x-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)ds-\sum_{S_i\subset D_\Gamma}\int_{S_i}T_i\left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right]_{S_i}ds\tag{3.1}$$

式中$B=B(a;\ x,\ y)$满足方程

$$\frac{\partial B(a;\ x,\ y)}{\partial x}=\sigma_{kl}(a;\ x,\ y)\cdot\frac{\partial \varepsilon_{kl}(a;\ x,\ y)}{\partial x}\qquad (x,\ y)\subset D_S \tag{3.2}$$

特别是当 Γ 为第Ⅱ类围道时，称 $J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]$ 为位移场 u_k 和应力场 σ_{kl} 的 J 积分.

2. 首先引入两个辅助命题.

引理 1 存在函数 $B(a;\ x,\ y)$，使满足方程(3.2)且在域 D 上连续.

事实上，用 $y=\text{const}.$ 和 S_i 总可以把 D 分割成有限个数单连通子域 $D_k(k=1,\ 2,\ \cdots m)$，如图 2 所示. 方程 (3.2) 在各 D_k 上有连续的解 $B_k(a;\ x,\ y)$存在. 对任意连续函数 $f_k(y)$，函数 B_k+f_k 也是满足方程 (3.2) 的连续函数. 调整 $f_k(y)$，总可以构成在 D 上连续的函数 $B(a;\ x,\ y)$，使其在各 D_k 上与 B_k+f_k 相同.

引理 2 在空间 oxy 中，如果封闭曲线 $\gamma\ (\subset\bar{D})$的内部不含 S_k 和前缘 T 的邻域，则

$$J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \gamma]=0$$

证明 由式 (2.2)、(2.3) 和 Green 定理，据定义 (3.1)，注意到其中$\left[\frac{\partial u_l}{\partial x}\right]_{S_i}=0$，此引理易于证明.

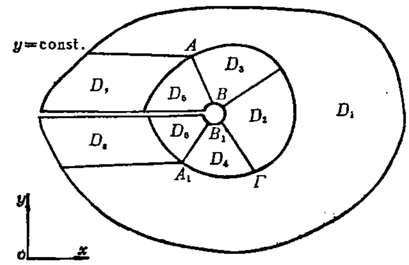


图2 域D分割成D_k.

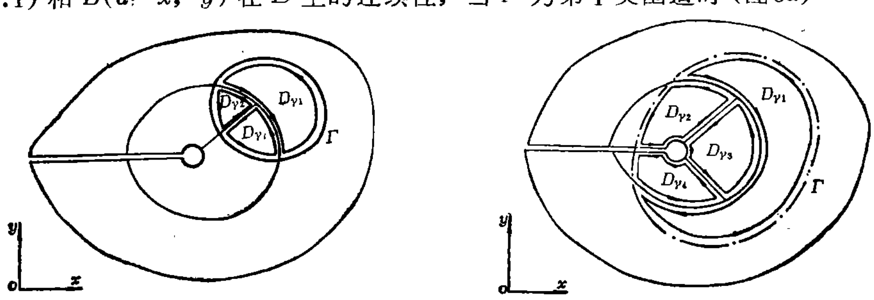
3. $J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]$的守恒性：

$$J[u_k,\sigma_{kl};\ \Gamma]=\begin{cases}0 & \Gamma\text{为第Ⅰ类围道}\\ \text{const}. & \Gamma\text{为第Ⅱ类围道}\end{cases} \tag{3.3}$$

证明 对封闭曲线 Γ 所围的区域 D_Γ，总可以用 Γ、$S_i(i=1,\ 2,\ \cdots n)$ 和一些补助线段将其分割成有限个单连通子区域 D_{γ_i}，每一个 D_{γ_i} 的内部都不含曲线 S_i 和裂纹前缘 T 的邻域. 这里 D_{γ_i} 表示以 γ_i 为边界的区域. 利用引理 2，在 D_Γ 内作和，得到

$$\sum_{\gamma_i\subset D_\Gamma} J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \gamma_i]=0$$

由定义 (3.1) 和 $B(a;\ x,\ y)$ 在 D 上的连续性，当 Γ 为第Ⅰ类围道时 (图3a)



a. Γ为第Ⅰ类围首　　b. Γ为第Ⅱ类围道

图 3 D_Γ 内的子区域 D_{γ_i}.

$$\sum_{\gamma_i\subset D_\Gamma} J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \gamma_i]=J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]=0$$

这就是第一个结论. 当 Γ 为第Ⅱ类围道时 (图 3b)

$$\sum_{\gamma_i\subset D_\Gamma} J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \gamma_i]=J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]-J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma']=0$$

式中 Γ' 为与 Γ 不同的另一条第Ⅱ类围道. 由此得到第二个结论：

$$J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]=J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma']$$

值得着重指出的是，这个命题的叙述和证明不涉及介质本构关系的任何具体形式.

四、能量意义及与Rice定义的关系

1．引入记号 $K[\dot{u}_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]$

$$K[\dot{u}_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]\equiv\int_{\Gamma}T_k\dot{u}_k ds+\sum_{S_i\subset D_\Gamma}\int_{S_i}T_k[\dot{u}_k]_{S_i}ds-$$

$$-\iint_{D_\Gamma}\sigma_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}dxdy \tag{4.1}$$

式中

$$\dot{u}_k\equiv\frac{\partial}{\partial a}u_k(a;\ x,\ y),\ \dot{\varepsilon}_{kl}\equiv\frac{\partial}{\partial a}\varepsilon_{kl}(a;\ x,\ y) \tag{4.2}$$

可以证明

$$K[\dot{u}_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]=\begin{cases}0 & \Gamma\text{为第 I 类围道}\\ \text{const.} & \Gamma\text{为第 II 类围道}\end{cases}$$

事实上，对不含前缘 T 邻域的区域 D_Γ，$\dot{u}_k$ 可以作为虚位移，由虚功原理，根据 σ_{kl} 的静力可能性质及 $\dot{u}_k$-$\dot{\varepsilon}_{kl}$ 的几何相容性质，易于证明第一个结论．再用复合围道原理不难证明第二个结论．

2．如 Rice[7] 那样，引入裂纹前缘的伴随坐标系 ox_1y_1（图 4）

$$x_1=x-a,\qquad y_1=y \tag{4.3}$$

由式 (4.2) 得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_k(a;\ x,\ y)&=\frac{\partial}{\partial a}u_k(a;\ x_1,\ y_1)-\frac{\partial}{\partial x}u_k(a;\ x,\ y)\\ \dot{\varepsilon}_{kl}(a;\ x,\ y)&=\frac{\partial}{\partial a}\varepsilon_{kl}(a;\ x_1,\ y_1)-\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{kl}(a;\ x,\ y)\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

把式 (4.4) 代入式 (4.1)，因为 $\frac{\partial}{\partial a}u_k(a;\ x_1,\ y_1)$ 作为虚位移是几何相容的，虚功原理成立

$$\int_{\Gamma}T_k\frac{\partial u_k}{\partial a}(a;\ x_1,\ y_1)ds+\sum_{S_i\subset D_\Gamma}\int_{S_i}T_k\left[\frac{\partial u_k}{\partial a}(a;\ x_1,\ y_1)\right]_{S_i}ds$$

$$=\iint_{D_\Gamma}\sigma_{kl}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial a}(a;\ x_1,\ y_1)dxdy$$

再由定义 (3.1) 可得

J 的能量意义：

$$K[\dot{u}_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma]=J[u_k,\ \sigma_{kl};\ \Gamma] \tag{4.5}$$

3．当应力场和位移场只有弱间断时，

$$\left[\frac{\partial u_k}{\partial x}\right]_{S_i}=0$$

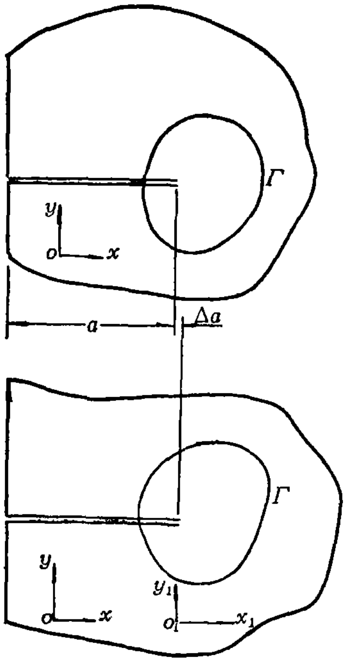


图4 坐标系 ox_1y_1

这时，定义 (3.1) 可简化成为

$$J[u_k, \ \sigma_{kl}; \ \Gamma] \equiv \int_\Gamma \left(Bn_x - T_k \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) ds \tag{4.6}$$

4. 在弹性条件下，介质存在一个应变分量的单值函数 w，使式 (1.1) 成立，这时方程(3.2) 的解可以取作

$$B = w$$

由于 σ_{kl} 和 ε_{kl} 无间断线，因此定义 (3.1) 和 Rice 定义等价.

五、结　语

由普遍形式(3.1)定义的积分 $J[u_k, \ \sigma_{kl}; \ \Gamma]$是由裂纹体中最终应力场 σ_{kl} 和最终位移场u_k 确定的守恒积分．这种定义较之 J 积分的 Rice 定义更有普遍性．在弹塑性裂纹体应力应变关系的任意条件下，具有守恒性和能量意义，因而不受介质本构关系和加载方式的限制．在特殊情况下，当介质材料存在状态函数 w 时，这种定义与 Rice 定义等价．

本文得到上海交通大学罗祖道教授的帮助和指导．作者在此致谢．

参 考 文 献

1. Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, 35 (1968), 379.
2. Sumpter, J. G., Turner, C. E., *Intern. J. Fract.*, 9 (1973), 320.
3. 欧阳鬯，用增量法求解非线性断裂力学问题，北京断裂力学交流会第二次会议文集，(1977)，277.
4. 王自强，J 积分和弹塑性断裂准则，（同上），363.
5. Качанов, Л. М., «塑性理论基础»,(1959), 61.
6. 高玉臣，力学学报，(1980)，48.
7. Rice, J. R., Liebowitz, H., (ed.) *Fracture*, 2 (1973), 210.

A Conservative Integral Independent of the Constitutive Relation

Zhang Pei-yuan

(Chongqing University, Chongqing)

Abstract

The J-integral defined by Rice depends on the constitutive relation of mediums. In the present paper, a conservative integral independent of the constitutive relation of mediums is defined in order to extend Rice's definition of the J-integral. Its main properties which are similar to those of the prevailing J-integral are proved. In the case of the elastic mediums, the extensive conservative integral is the same with Rice's J-integral.