应用数学和力学，第2卷第6期（1981年12月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

圆薄膜中心部份受均布载荷产生的对称变形

钱伟长　王志忠　徐尹格　陈山林

（北京清华大学）　（重庆交通学院）　（北京清华大学）

（1981年6月18日收到）

摘　要

本文给出了圆薄膜中心部份受均布载荷产生的对称弯曲变形的解，它的极限给出圆薄膜在中心集中载荷下的解．它们是 Hencky 圆薄膜解以后，第三种有关的圆薄膜解．

一、引　论

H. Hencky (1915)[1] 给出了圆薄膜在全膜受均布载荷下的解，这个薄膜解有一些计算误差曾由钱伟长（1948）予以修正[2]，并以该解为基础求得了圆薄板大挠度问题的渐近解．Алексеев (1951)[3] 给出了圆环薄膜在其中部相联的刚性圆板上受垂直的中心集中荷载所产生的变形的解，叶开沅(1954)[4] 在此基础上用摄动法求得圆环板大挠度问题的解．Hencky 和 Алексеев 所处理的问题见图 1a，b．

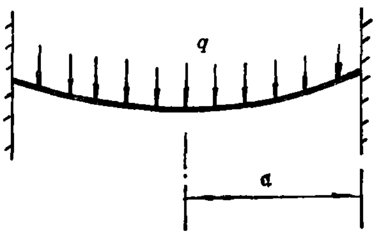

图1.a　**Hencky** 问题．

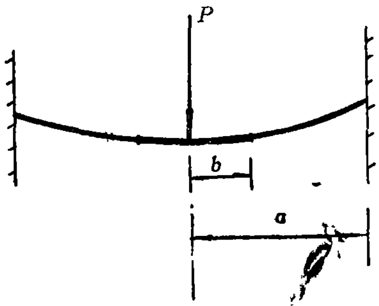

图1.b　**Алексеев** 问题．

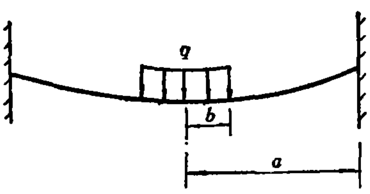

图2　圆薄膜中心部份受均布载荷的问题．

本文将处理第三个问题，即圆薄膜中心部份受均布载荷下产生的对称弯曲变形（图2）．在极限 $b\to 0$，但

$$\lim_{b\to 0} q\pi b^2 = P_0 \tag{1.1}$$

的条件下，第三个问题的极限问题是圆薄膜受集中载荷的重要问题．（1.1）式中极限 P_0 为集中载荷，本文把圆薄膜分为两部份，（1）中心均布载荷部份 ($r\leqslant b$)，

在这一部分内可以采用 Hencky 解（即级数解），（2）圆环薄膜部分（$b\leqslant r\leqslant a$），在这一部份内可以采用 Алексеев 的解．利用 $r=b$ 处和 $r=a$ 处连续条件和边界条件，可以决定一切积分常数．

二、中心均布载荷部份(r⩽b)的薄膜方程及其解

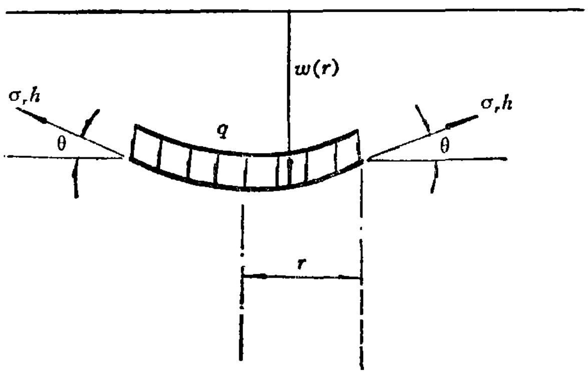

图3 圆薄膜中心部份（$r\leqslant b$）的平衡图．

设在圆薄膜中心部份取半径为 $r\leqslant b$ 的一块圆薄膜，研究这块圆薄膜在均布载荷 q 和薄膜拉应力σ_r（作用在边界上）联合作用下的平衡问题（图3）．这里有两个垂直力，均布载荷 q 的总合力 $\pi r^2 q$（其中 $r\leqslant b$），及薄膜拉应力 σ_r 所产生的垂直合力 $2\pi r h\sigma_r \sin\theta$，其中 h 为薄膜的厚度，θ 为薄膜的斜角．平衡条件为

$$2\pi r h\sigma_r \sin\theta=\pi r^2 q \qquad (2.1)$$

设薄膜在 r 处的位移为$w(r)$，见图3．则有

$$\sin\theta\cong-\frac{dw}{dr} \qquad (2.2)$$

把（2.2）代入（2.1），得平衡方程（垂直于圆膜平面的）

$$h\sigma_r\frac{dw}{dr}=-\frac{1}{2}rq \qquad (2.3)$$

在圆膜平面内，有薄膜径向应力 σ_r 和环向应力 σ_t 的作用，其平衡方程为

$$\frac{d}{dr}(rh\sigma_r)-h\sigma_t=0 \qquad (2.4)$$

设薄膜内的径向应变为 e_r，环向应变为 e_t，径向位移为 $u(r)$，垂直位移为 $w(r)$，则有大挠度问题的应变位移关系：

$$\left.\begin{aligned} e_r&=\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\\ e_t&=\frac{u}{r}\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

应力应变关系为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r&=\frac{E}{1-\nu^2}(e_r+\nu e_t)\\ \sigma_t&=\frac{E}{1-\nu^2}(e_t+\nu e_r)\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

其中 E 为杨氏模量，ν 为泊桑比．把（2.5）代入（2.6），得

$$\left.\begin{aligned} h\sigma_r &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\nu\frac{u}{r}\right] \\ h\sigma_t &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

从(2.7)，(2.4)式，得

$$\frac{u}{r}=\frac{1}{Eh}(h\sigma_t-\nu h\sigma_r)=\frac{1}{Eh}\left[\frac{d}{dr}(rh\sigma_r)-\nu h\sigma_r\right] \tag{2.8}$$

如果把(2.8)式的u代入(2.7)式的第一式，得

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}(r^2h\sigma_r)\right]+\frac{Eh}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2=0 \tag{2.9}$$

从(2.4)到(2.9)式的详细推导，可从一般板壳理论中查得，本文从略.

(2.3)和(2.9)式，为求解σ_r，$\frac{dw}{dr}$的两个联立方程式．现在先把各种变量无量纲化:

$$\left.\begin{aligned} &Q=\frac{a^4q}{h^4E},\ W=\frac{w}{h},\ S_r=\frac{a^2\sigma_r}{Eh^2}, \\ &S_t=\frac{a^2\sigma_t}{Eh^2},\quad x=\frac{r^2}{a^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

(2.3)，(2.4)，(2.9) 化为

$$\frac{d^2}{dx^2}(xS_r)+\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2=0 \tag{2.10a}$$

$$\frac{dW}{dx}S_r=-\frac{Q}{4} \tag{2.10b}$$

$$S_t=S_r+2x\frac{dS_r}{dx} \tag{2.10c}$$

求解 (2.10a，b，c) 的边界条件为

（1） 当 $x=0$ 时，$S_r=$有限值 (2.11a)

（2） 当 $x=\alpha^2$ 时，$W_A=W_B$，$(S_r)_A=(S_r)_B$，$u_A=u_B$ (2.11b,c,d)

其中

$$\alpha=\frac{a}{b} \tag{2.12}$$

A、B代表受均布载荷区域(A)和末受载荷的圆环区域(B)交界处($r=b$)的两侧的值.

从 (2.10a，b) 中消去$\frac{dW}{dx}$，得一个只包S_r的方程

$$\frac{d^2}{dx^2}(xS_r)+\frac{Q^2}{32S_r^2}=0 \tag{2.13}$$

若将xS_r代之以$Z(x)$，即令

$$xS_r=\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{2}\right)^{2/3}Z \tag{2.14}$$

代入（2.13）式，得一非线性方程

$$\frac{d^2Z}{dx^2}=-\frac{x^2}{Z^2} \tag{2.15}$$

为了满足 $x=0$ 时的条件（2.11a），Z 应展开为 x 的幂级数.

$$Z(x)=xf(x) \tag{2.16}$$

其中 $f(x)$ 是

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2-\frac{13}{144}x^3-\frac{17}{288}x^4-\frac{37}{864}x^5-\frac{1205}{36288}x^6-\frac{219241}{8128512}x^7-\cdots\cdots \tag{2.17}$$

我们很容易证明，如果 $Z(x)$为(2.15)的解，则 $c^{-4/3}Z(cx)$ 也是(2.15)的解，其中 c 为待定积分常数. 于是（2.15）的一般解（满足边界条件（2.11a））为

$$S_r=\left(\frac{Qc}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{2c}f(cx) \tag{2.18}$$

而根据（2.8），有

$$\begin{aligned}\frac{u}{r}&=\frac{1}{Eh}\left[\frac{d}{dr}(rh\sigma_r)-\nu h\sigma_r\right]=\frac{h^2}{a^2}\left[2x\frac{dS_r}{dx}+(1-\nu)S_r\right]\\&=\frac{h^2}{2a^2c}\left(\frac{Qc}{2}\right)^{\frac{2}{3}}[2cxf'(cx)+(1-\nu)f(cx)]\end{aligned} \tag{2.19}$$

从（2.10b），有

$$\frac{dW}{dx}=-\left(\frac{Qc}{2}\right)^{1/3}[f(cx)]^{-1}=-\left(\frac{Qc}{2}\right)^{1/3}h(cx) \tag{2.20}$$

其中 $h(x)$ 为

$$\begin{aligned}h(x)=\frac{1}{f(x)}&=1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2+\frac{55}{144}x^3+\frac{35}{96}x^4\\&+\frac{205}{576}x^5+\frac{17051}{48384}x^6+\frac{2864485}{8128512}x^7+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{2.21}$$

积分（2.20），得

$$W=-\left(\frac{Qc}{2}\right)^{1/3}g(cx)\cdot x+A \tag{2.22}$$

其中 A 为又一待定的积分常数，$g(x)$为

$$\begin{aligned}g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x h(x)dx&=1+\frac{1}{4}x+\frac{5}{36}x^2+\frac{55}{576}x^3+\frac{7}{96}x^4\\&+\frac{205}{3456}x^5+\frac{17051}{338688}x^6+\frac{2864485}{65028096}x^7+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{2.23}$$

(2.18)及(2.19)中的待定常数 c 和 A 将通过在 $x=\alpha^2$ 处的连续条件决定.

三、圆环薄膜部份的解

设在 $b\leqslant r\leqslant a$ 中取半径为 r 的一块圆薄膜，如图 4，其中 $r\leqslant b$ 的中心部份受有均布载荷

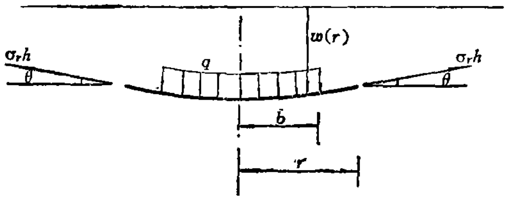

图 4 圆环薄膜部份 $b\leqslant r\leqslant a$ 的平衡图.

的作用. 载荷合力 $\pi b^2 q$ 和 r 处的薄膜拉力 $\sigma_r h$ 的平衡条件为

$$2\pi r\sigma_r h\sin\theta=\pi b^2 q \tag{3.1}$$

利用了(2.2), 可写成

$$rh\sigma_r\frac{dw}{dr}=-\frac{1}{2}b^2 q \tag{3.2}$$

也可用无量纲量写成

$$xS_r\frac{dW}{dx}=-P \tag{3.3}$$

其中 P 相当于等效的集中力

$$P=\frac{a^2b^2q}{4h^4E} \tag{3.4}$$

从(3.3)和(2.10a)中消去 $\frac{dW}{dx}$, 得求解 S_r 的方程式,

$$\frac{d^2}{dx^2}(xS_r)=-\frac{1}{2}\frac{P^2}{x^2S_r^2} \tag{3.5}$$

再将 xS_r 代之以 F, 即

$$xS_r=\left(\frac{1}{2}P^2\right)^{1/3}F(x) \tag{3.6}$$

得

$$F^2\frac{d^2F}{dx^2}=-1 \tag{3.7}$$

从(3.3)式, 得

$$\frac{dW}{dx}=-\frac{(2P)^{1/3}}{F(x)} \tag{3.8}$$

将 $\frac{dF}{dx}$ 乘(3.7)式两侧, 即得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2=-\frac{1}{F^2}\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{F}\right) \tag{3.9}$$

积分得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2=\frac{1}{F}-B\qquad(B\text{ 为待定积分常数}) \tag{3.10}$$

或

$$\frac{dF}{dx}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1-FB}{F}} \tag{3.10a}$$

开方取正值．现在引进新变量φ，令

$$F=\frac{1}{B}\sin^2\varphi \tag{3.11}$$

代入(3.10a)，得

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}B^{3/2}\frac{1}{\sin^2\varphi} \tag{3.12}$$

积分得：

$$x+k=(2B)^{-3/2}(2\varphi-\sin 2\varphi) \tag{3.13}$$

(k=待定积分常数)

以(2.10)代入(2.8)，并用(3.6)式消去xS_r，得

$$\frac{u}{r}=\left(\frac{1}{2}P^2\right)^{1/3}\frac{h^2}{a^2}\left[2\frac{dF}{dx}-(1+\nu)\frac{F}{x}\right] \tag{3.14}$$

利用(3.10a)、(3.11)、(3.13)，上式可以简化为

$$\frac{u}{r}=\frac{h^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}P^2\right)^{1/3}(2B)^{3/2}\frac{1}{B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-(1+\nu)\frac{\sin^2\varphi}{2\varphi-\sin 2\varphi-k(2B)^{3/2}}\right] \tag{3.15}$$

从(3.8)，(3.11)，(3.12)，我们有

$$dW=-\frac{(2P)^{1/3}B}{\sin^2\varphi}dx=-(2P)^{1/3}\sqrt{\frac{2}{B}}d\varphi \tag{3.16}$$

积分得

$$W=-(2P)^{1/3}\sqrt{\frac{2}{B}}(\varphi+R) \tag{3.17}$$

式中R为待定积分常数．

又从(3.6)、(3.11)、(3.13)得

$$S_r=\left(\frac{1}{2}P^2\right)^{1/3}\frac{F(x)}{x}=\left(\frac{1}{2}P^2\right)^{1/3}(2B)^{3/2}\frac{1}{B}\frac{\sin^2\varphi}{2\varphi-\sin 2\varphi-k(2B)^{3/2}} \tag{3.18}$$

(3.15)、(3.17)、(3.18)为用φ表示u/r，W，S_r在$a^2\leqslant x\leqslant 1$中的表达式，(3.13)为$(\varphi,x)$的关系式，其中$B$，$R$，$k$，为待定的积分常数．只要$B$、$R$、$k$决定，在圆环薄膜内的位移和应力便都决定了．

四、决定积分常数c，A，B，R，k

我们假设圆薄膜边界固定，那末决定待定积分常数的条件为(2.11b,c,d)，以及在$x=1$处W，u的边界固定条件，即

当$x=1$时，　　$W=0$，$\frac{u}{r}=0$　　(4.1)

除此而外，如果称$x=1$处的φ为φ_1，$x=a^2$处的φ为φ_a，则从(3.13)有

$$1+k=(2B)^{-3/2}(2\varphi_1-\sin 2\varphi_1) \tag{4.2a}$$

$$\alpha^2+k=(2B)^{-3/2}(2\varphi_a-\sin 2\varphi_a) \tag{4.2b}$$

这是在 k，B 决定后，决定 φ_1，φ_a 的两个条件.

从(3.17)式，条件(4.1)决定出

$$R=-\varphi_1 \tag{4.3}$$

由条件(4.1)并使用了(4.2a)以后，(3.15)式给出

$$\frac{\sin^3\varphi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{(2B)^{3/2}}{1+\nu} \tag{4.4}$$

类似地，(2.11b，c，d)给出

$$A-\left(\frac{Qc}{2}\right)^{1/3}g(c\alpha^2)\alpha^2=-(2P)^{1/3}\sqrt{\frac{2}{B}}(\varphi_a-\varphi_1) \tag{4.5}$$

$$\frac{h^2}{2a^2c}\left(\frac{Qc}{2}\right)^{2/3}[2c\alpha^2f'(c\alpha^2)+(1-\nu)f(c\alpha^2)]$$

$$=\frac{h^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}P^2\right)^{1/3}(2B)^{3/2}\frac{1}{B}\left[\frac{\cos\varphi_a}{\sin\varphi_a}-\frac{(1+\nu)\sin^2\varphi_a}{(2B)^{3/2}\alpha^2}\right] \tag{4.6}$$

$$\left(\frac{Qc}{2}\right)^{2/3}\frac{1}{2c}f(c\alpha^2)=\frac{1}{B}\left(\frac{1}{2}P^2\right)^{1/3}\frac{1}{\alpha^2}\sin^2\varphi_a \tag{4.7}$$

注意到

$$\frac{4P}{Q}=\frac{b^2}{a^2}=\alpha^2 \tag{4.8}$$

则(4.5)—(4.7)还可以进一步简化，我们得

$$A=\left(\frac{Q\alpha^4}{2}\right)^{1/3}\left[(c\alpha^2)^{1/3}g(c\alpha^2)-\frac{1}{\alpha^{2/3}}\sqrt{\frac{2}{B}}(\varphi_a-\varphi_1)\right] \tag{4.9a}$$

$$(c\alpha^2)^{-1/3}[2c\alpha^2f'(c\alpha^2)+(1-\nu)f(c\alpha^2)]$$

$$=\alpha^{2/3}\sqrt{8B}\left[\frac{\cos\varphi_a}{\sin\varphi_a}-(1+\nu)\frac{\sin^2\varphi_a}{(2B)^{3/2}\alpha^2}\right] \tag{4.9b}$$

$$(c\alpha^2)^{-1/3}f(c\alpha^2)=\frac{1}{B}\alpha^{-4/3}\sin^2\varphi_a \tag{4.9c}$$

从(4.9b，c)中消去 $\sin\varphi_a$，得

$$(c\alpha^2)^{-1/3}[2c\alpha^2f'(c\alpha^2)+2f(c\alpha^2)]=2\alpha^{2/3}(2B)^{1/2}\frac{\cos\varphi_a}{\sin\varphi_a} \tag{4.10}$$

(4.2a)，(4.2b)，(4.4)，(4.9a，c)，(4.10)为决定 φ_1，φ_a，k，B，A，c 的六个方程式，其中 α^2 为已给参数.

从(4.9c)，(4.10)消去 B，得

$$\cos\varphi_a=\frac{1}{\sqrt{2}}(c\alpha^2)^{-1/2}[f(c\alpha^2)]^{1/2}[c\alpha^2f'(c\alpha^2)+f(c\alpha^2)] \tag{4.11}$$

这是 $c\alpha^2$ 的函数，所以，它的解可以写成

$$\varphi_a=\Phi(c\alpha^2) \tag{4.12}$$

由(4.9c)得到

$$2Ba^{4/3}=2\frac{\sin^2\Phi}{f(ca^2)}(ca^2)^{1/3}=M(ca^2) \tag{4.13}$$

把(4.12)，(4.13)代入(4.2a，b)和(4.4)，得

$$1+k=a^2M^{-3/2}[2\varphi_1-\sin 2\varphi_1] \tag{4.13a}$$

$$a^2+k=a^2M^{-3/2}[2\Phi-\sin 2\Phi] \tag{4.13b}$$

$$\frac{\sin^3\varphi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{M^{3/2}}{(1+\nu)a^2} \tag{4.13c}$$

称

$$M^{-3/2}[2\Phi-\sin 2\Phi]=M_1(ca^2) \tag{4.14}$$

M_1 也是 ca^2 的函数，于是从(4.13b)有

$$k=a^2(M_1-1) \tag{4.15}$$

把(4.15)代入(4.13a)，得

$$\frac{1}{a^2}=1-M_1+M^{-3/2}(2\varphi_1-\sin 2\varphi_1) \tag{4.16}$$

从(4.13c)解出 $\frac{1}{a^2}$，得

$$\frac{1}{a^2}=(1+\nu)\frac{\sin^3\varphi_1}{\cos\varphi_1}M^{-3/2} \tag{4.17}$$

由(4.16)和(4.17)显然可得

$$2\varphi_1-\sin 2\varphi_1-(1+\nu)\frac{\sin^3\varphi_1}{\cos\varphi_1}=(M_1-1)M^{3/2} \tag{4.18}$$

只要 ca^2 已给，$(M_1-1)M^{3/2}$ 即可计算，(4.18)就是求解 φ_1 的一个代数方程. 当 φ_1 计算求得后，可以从(4.17)中求得 a^2 值，从而从已给 ca^2 值中求得 c 值，从(4.9a)中求得 $\left(\frac{2}{Qa^4}\right)^{1/3}A$，从(4.13)中求得 B. 这就求得了所有积分常数.

从(2.21)式，看到最大挠度在中心处($x=0$)，即

$$W_m=A=\left(\frac{Qa^4}{2}\right)^{1/3}\rho(ca^2) \tag{4.19}$$

其中

$$\rho(ca^2)=(ca^2)^{1/3}g(ca^2)-\frac{2}{\sqrt{M}}(\varphi_a-\varphi_1) \tag{4.20}$$

在利用了(2.10)以后，(4.19)可以写成众所常见的形式

$$\frac{a^4q}{k^4E}=\frac{2}{a^4}\left(\frac{1}{\rho}\right)^3\left(\frac{w_m}{h}\right)^3 \tag{4.21}$$

五、数 值 计 算

现以 $ca^2=0.3$ 为例，进行数值计算，从(2.17)我们可以求得

$$\left.\begin{aligned} f(0.3)&=0.831950 \\ f'(0.3)&=-0.633106 \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

从（4.11）

$$\cos\varphi_a=\frac{1}{\sqrt{2}}(0.3)^{-1/2}(0.831950)^{1/2}[0.3\times(-0.633106)+0.831950]$$
$$=0.755997 \tag{5.2}$$

从而得

$$\varphi_a=\Phi=0.713620 \tag{5.3}$$

由（4.13）得

$$M(0.3)=2\frac{\sin^2 0.713620}{0.831950}(0.3)^{1/3}=0.689539 \tag{5.4}$$

从（4.14）得

$$M_1(0.3)=(0.689539)^{-3/2}[1.427240-\sin 1.427240]=0.764134 \tag{5.5}$$

把 M，M_1 代入（4.18），并取 $\nu=0.3$

$$2\varphi_1-\sin 2\varphi_1-1.3\frac{\sin^3\varphi_1}{\cos\varphi_1}=-0.135053 \tag{5.6}$$

可用逐步逼近法求解上式

$$\varphi_1=1,\qquad 2-\sin 2-1.3\frac{\sin^3 1}{\cos 1}=-0.342884$$

$$\varphi_1=0.9,\qquad 1.8-\sin 1.8-1.3\frac{\sin^3 1.8}{\cos 1.8}=-0.179052$$

$$\varphi_1=0.89,\qquad 1.78-\sin 1.78-1.3\frac{\sin^3 0.89}{\cos 0.89}=-0.167348$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1=0.87,\quad 1.74-\sin 1.74-1.3\frac{\sin^3 0.87}{\cos 0.87}=-0.145924 \\ \varphi_1=0.86,\quad 1.72-\sin 1.72-1.3\frac{\sin^3 0.86}{\cos 0.86}=-0.136134 \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

用拉格朗日插值公式，把 $N=-0.135053$ 代入下式

$$\varphi_1^{(1)}=0.87\left(\frac{N+0.136134}{-0.145924+0.136134}\right)+0.86\left(\frac{N+0.145924}{-0.136134+0.145924}\right)$$
$$=0.858896 \tag{5.8}$$

以 $\varphi_1^{(1)}=0.858896$ 求得

$$1.717792-\sin 1.717792-1.3\frac{(\sin 0.858896)^3}{\cos 0.858896}=-0.135088 \tag{5.9}$$

可见 -0.135053 和 -0.135088 相差很少了，设

$$\varphi_1=\varphi_1^{(1)}+\triangle\varphi_1^{(1)} \tag{5.10}$$

则 (5.6) 式可写成

$$2\varphi_1^{(1)}-\sin 2\varphi_1^{(1)}-1.3\frac{\sin^3\varphi_1^{(1)}}{\cos\varphi_1^{(1)}}+\Big[2-2\cos 2\varphi_1^{(1)}-3.9\sin^2\varphi_1^{(1)}$$

$$-1.3\frac{\sin^4\varphi_1^{(1)}}{\cos^2\varphi_1^{(1)}}\Big]\triangle\varphi_1^{(1)}=-0.135053 \tag{5.11}$$

利用了 (5.9) 以后，上式化为

$$\Big[2-2\cos 2\varphi_1^{(1)}-3.9\sin^2\varphi_1^{(1)}-1.3\frac{\sin^4\varphi_1^{(1)}}{\cos^2\varphi_1^{(1)}}\Big]\triangle\varphi_1^{(1)}=0.000035 \tag{5.12}$$

把 $\varphi_1^{(1)}=0.858896$ 代入上式，求得

$$\triangle\varphi_1^{(1)}=-0.000038 \tag{5.13}$$

所以有

$$\varphi_1^{(2)}=0.858896-0.000038=0.858858 \tag{5.14}$$

于是有

$$\varphi_1^{(2)}=0.858858$$

$$2\varphi_1^{(2)}-\sin 2\varphi_1^{(2)}-1.3\frac{\sin^3\varphi_1^{(2)}}{\cos\varphi_1^{(2)}}=-0.135053 \tag{5.15}$$

这就求得了 φ_1 的解（即 (5.6) 式的解)，即

$$\varphi_1=0.858858 \tag{5.16}$$

从 (4.17) 式，求得 α^2 值，

$$\alpha^2=\frac{1}{1+\nu}\frac{\cos\varphi_1}{\sin^3\varphi_1}M^{3/2}=\frac{1}{1.3}\frac{\cos 0.858858}{\sin^3 0.858858}(0.689539)^{3/2}$$

$$=0.663064 \tag{5.17}$$

$$\alpha=0.814287 \tag{5.18}$$

于是 c 为

$$c=\frac{c\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{0.3}{0.663064}=0.452445 \tag{5.19}$$

从 (4.15) 式求 k 值

$$k=\alpha^2(M_1-1)=0.663064\times(0.764134-1)=-0.156394 \tag{5.20}$$

从 (4.13) 式，求 B 值

$$B=\frac{1}{2}M(\alpha^2)^{-2/3}=\frac{1}{2}\times0.689539\times(0.663064)^{-2/3}=0.453411 \tag{5.21}$$

又从 (2.22) 式，我们计算 $g(c\alpha^2)$，得

$$g(0.3)=1.090859 \tag{5.22}$$

从(4.20)，计算$\rho(c\alpha^2)=A\Big/\left(\frac{Q\alpha^4}{2}\right)^{1/3}$

$$\rho(0.3)=(0.3)^{\frac{1}{3}}\times1.090859-\frac{2}{\sqrt{0.689539}}(0.713620-0.858858)=1.080065 \tag{5.23}$$

我们还可以用相同的方法，计算其它 $c\alpha^2$ 值的情况，但是 $c\alpha^2$ 值既有上限，又有下限．其上限为均布载荷的情况，即计算所得的 $\alpha^2\leqslant 1$，当 $\alpha^2=1$ 时，就是 Hencky 的均布载荷解．反之，其下限为集中载荷解的情况，即计算所得的 $\alpha^2\geqslant 0$．当 $\alpha^2=0$ 时，我们可以设 $\pi b^2q=P_0$ 或 $P_0=\pi a^2q\alpha^2$．

先研究 Hencky 解的情况．根据钱伟长的计算（1948）[4]，当 $\nu=0.3$ 时

$$c=0.390,\qquad \alpha^2=1 \tag{5.24}$$

设取 $c\alpha^2=0.390$，有

$$f(0.39)=0.772389\qquad f'(0.39)=-0.692615 \tag{5.25}$$

而

$$\cos\varphi_\alpha=0.499813 \tag{5.26}$$

$$\Phi=\varphi_\alpha=1.047414 \tag{5.27}$$

于是计算得：

$$M(0.39)=1.419227\qquad M_1(0.39)=0.726910 \tag{5.28}$$

而决定 φ_1 的方程为

$$2\varphi_1-\sin 2\varphi_1-1.3\frac{\sin^3\varphi_1}{\cos\varphi_1}=-0.461725 \tag{5.29}$$

其解为

$$\varphi_1=1.047669 \tag{5.30}$$

而 α^2 则为

$$\alpha^2=\frac{1}{1.3}\ \frac{\cos 1.047669}{\sin^3 1.047669}(1.419227)^{3/2}=0.999548 \tag{5.31}$$

$$\alpha=0.999774 \tag{5.31a}$$

这已经精确到 99.95%．从而得

$$c=\frac{c\alpha^2}{\alpha^2}=0.390176 \tag{5.32a}$$

$$k=0.999548(0.726910-1)=-0.272966 \tag{5.32b}$$

$$B=\frac{1}{2}\times 1.419227\times(0.999548)^{-2/3}=0.709828 \tag{5.32c}$$

$$g(0.39)=1.126749 \tag{5.32d}$$

$$\rho(0.39)=0.823647 \tag{5.32e}$$

从（5.31a）可以看到，$c\alpha^2=0.39$ 确已非常接近全膜受均布载荷的极限情况．实际的 $c\alpha^2$ 只是略大于 0.39 而已．在极限条件下，$\Phi=\varphi_\alpha$ 和 φ_1 应该相等．这时（4.20）式还原为载荷均布的 $\rho(c\alpha^2)$ 表达式，对均布载荷而言，有

$$\rho(c\alpha^2)_{\text{均布载荷}}=(c\alpha^2)^{1/3}g(c\alpha^2)\big|_{\alpha=1} \tag{5.33}$$

$c\alpha^2$ 的下限相当于集中载荷的解．在此，下限相当于 $\Phi\geqslant 0$（亦即 $\alpha^2\geqslant 0$）．略经计算，我们求得 $c\alpha^2=0.234159$，此时有

$$f(0.234159)=0.872409,\qquad f'(0.234159)=-0.596749 \tag{5.34}$$

$$\cos\varphi_a=\sqrt{\frac{0.872409}{2\times0.234159}}(-0.234159\times0.596749+0.872409)$$

$$=1.000002 \tag{5.35}$$

$$\varphi_a=0 \tag{5.36}$$

于是，从（4.13）得到

$$M=2\frac{\sin^2\Phi}{f(ca^2)}(ca^2)^{1/3}\cong2(ca^2)^{1/3}\frac{1}{f(ca^2)}\Phi^2=0 \tag{5.37}$$

又由（4.14）

$$M_1(ca^2)=M^{-3/2}(2\Phi-\sin2\Phi)\cong\frac{1}{2^{3/2}}\frac{[f(ca^2)]^{3/2}}{(ca^2)^{1/2}}\cdot\frac{4}{3}$$

$$=0.793814 \tag{5.38}$$

（4.18）可以写成

$$2\varphi_1-\sin2\varphi_1-1.3\frac{\sin^3\varphi_1}{\cos\varphi_1}=0 \tag{5.39}$$

显然有解 $\varphi_1=0$，并用拉格朗日插值法求得另一解 $\varphi_1=0.348500$，第一种解 $\varphi_1=\varphi_a=0$，这不代表集中力的解，当 $\varphi_1=0.348500$ 才是本题的解．其它积分常数为

$$k=0,\quad a^2=0,\quad B=0 \tag{5.40}$$

但在这样的条件下，$\rho(ca^2)$ 变成无穷大．不过，我们从（4.17）看到

$$M^{1/2}=\sin\varphi_1\left[\frac{(1+\nu)a^2}{\cos\varphi_1}\right]^{1/3} \tag{5.41}$$

而（4.20）变成

$$\rho(ca^2)=(ca^2)^{1/3}g(ca^2)-\frac{2}{\sin\varphi_1}\left[\frac{\cos\varphi_1}{(1+\nu)a^2}\right]^{1/3}(\varphi_a-\varphi_1) \tag{5.42}$$

于是，我们有

$$\frac{2\pi}{a^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)^3=\frac{2\pi}{\left[(ca^2)^{1/3}g(ca^2)a^{2/3}-2\left(\frac{\cos\varphi_1}{1+\nu}\right)^{1/3}\frac{\varphi_a-\varphi_1}{\sin\varphi_1}\right]^3} \tag{5.43}$$

在 $a\to0$ 的极限状态下，$(ca^2)^{1/3}g(ca^2)$ 仍是有限的，而 $\varphi_a\to0$，$\varphi_1\to0.348500$（根据（5.39）的解）．于是（5.43）可以写成

$$\lim_{a\to0}\frac{2\pi}{a^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)^3=\frac{\pi(1+\nu)\sin^3\varphi_1}{4\varphi_1^3\cos\varphi_1}=1.0221 \tag{5.44}$$

表 1 为本文的计算结果．

图 5 代表 a 和 $\frac{2\pi}{a^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)^3$ 的曲线图．

其中 $\frac{2\pi}{a^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)^3$ 代表 $\frac{a^2P_0}{h^4E}$ 和 $\left(\frac{w_m}{h}\right)^3$ 的比．

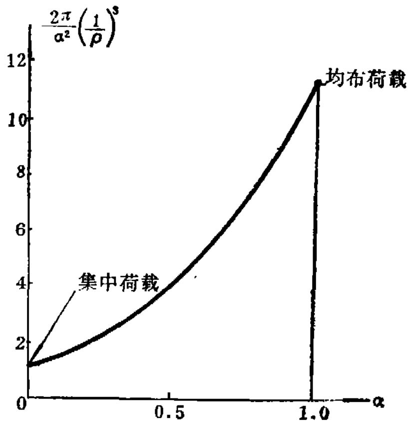

图 5 $\frac{\pi a^2b^2q}{h^4E}\Big/\left(\frac{w_m}{h}\right)^3=\frac{2\pi}{a^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)^3$ 和 a 的关系曲线．

表 1　　中心部分受均布载荷的圆薄膜计算

$c\alpha^2$	φ_a	φ_1	α	c	k	B	$\rho(c\alpha^2)$	$\frac{2\pi}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)^3$
0.3901	1.0477	1.0478	0.9999	0.3902	−0.2731	0.7101	0.8235	11.2528
0.39	1.0474	1.0477	0.9998	0.3902	−0.2730	0.7098	0.8236	11.2500
0.38	1.0176	1.0324	0.9864	0.3905	−0.2618	0.6853	0.8386	10.9507
0.37	0.9866	1.0162	0.9719	0.3917	−0.2503	0.6601	0.8555	10.6260
0.36	0.9541	0.9989	0.9559	0.3940	−0.2384	0.6341	0.8747	10.2747
0.35	0.9199	0.9803	0.9384	0.3975	−0.2262	0.6072	0.8967	9.8955
0.34	0.8839	0.9603	0.9190	0.4026	−0.2134	0.5794	0.9222	9.4870
0.33	0.8457	0.9385	0.8974	0.4098	−0.2002	0.5503	0.9519	9.0475
0.32	0.8049	0.9146	0.8731	0.4197	−0.1863	0.5198	0.9869	8.5751
0.31	0.7611	0.8883	0.8457	0.4334	−0.1718	0.4876	1.0288	8.0673
0.30	0.7136	0.8589	0.8143	0.4525	−0.1564	0.4534	1.0801	7.5209
0.29	0.6615	0.8255	0.7777	0.4795	−0.1400	0.4167	1.1444	6.9316
0.28	0.6035	0.7868	0.7343	0.5193	−0.1225	0.3766	1.2280	6.2929
0.27	0.5375	0.7409	0.6812	0.5819	−0.1033	0.3323	1.3427	5.5941
0.26	0.4599	0.6839	0.6130	0.6919	−0.0820	0.2818	1.5143	4.8154
0.25	0.3629	0.6082	0.5169	0.9358	−0.0571	0.2218	1.8194	3.9048
0.24	0.2222	0.4863	0.3493	1.9676	−0.0255	0.1412	2.6687	2.7101
0.2342	0.0186	0.3487	0.014015	1192.4127	−0.000041	0.0725	30.4903	1.1286
0.234159	0	0.3485	0	∞	0	0	∞	1.0221

参 考 文 献

1. Hencky, H., Über den Spannungszustand in kreisunden Platten mit Verschwindender Biegungssteifigkeit、*Zeit*, *f*. *Math*. *u*、*Physik*, 63 (1915)、311—317.
2. Chien Wei-zang (钱伟长) . Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection, 清华大学理科报告, 第五卷第一期, (1948), 也见《弹性圆薄板大挠度问题》,科学出版社. (1954) , 第1—22页
3. Алексеев. С. А., Кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенномудиску, инженерный сборник 10 (1951), 71—80.
4. 叶开沅, 环形薄板大挠度问题, 见《弹性圆薄板大挠度问题》科学出版社, (1954), 第56—57页,

The Symmetrical Deformation of Circular Membrane under the Action of Uniformly Distributed Loads in Its Central Portion

Chien Wei-zang　　Wang Zhi-zhong　　Xu Yin-ge
(*Tsinghua University, Beijing*) (*Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing*)
Chen Shan-lin
(*Tsinghua University, Beijing*)

Abstract

This paper presents the solutions of symmetrical deformation of circular thin membrane under the action of uniformly distributed loads in its center portion. Its limiting case is the solution of circular membrane under concentrated load at center. This solution is the third solution of circular membrane problems after the Hencky's famous solution.