

# 平面有限变形与转动的Moiré几何学

陈 至 达

(中国矿业学院, 1981年1月20日收到)

## 摘 要

本文论证有限变形理论<sup>[12]</sup>中的拖带坐标系描述法和近年来发展的实验应变分析的Moiré方法, 在数学基础上是同一. 因此从Moiré几何学进一步肯定文[12]提出几何场论的重要实用意义.

## 一、引 言

Hencky<sup>[1]</sup>在1925年研究塑性大变形的物性关系时, 提出采用拖带坐标系的概念, 以后, Brillouin<sup>[2]</sup>, Synge 和钱伟长<sup>[3]</sup>, Green<sup>[4]</sup>, Lodge<sup>[5]</sup>等人将此方法用于弹性力学、板壳理论、弹性液体等问题. 但它的几何意义在一般力学中阐述不足, 以致理解存在困难. 近年来, 由于实验应变分析的Moiré法发展, 使我们发现, 从理论观点分析, Moiré法本身就是大变形拖带坐标系描述法的应用. 根据Moiré云纹几何的分析同时也提供我们判断各种大变形定义合理性的一条实践途径.

许多学者(文献[6]、[7]、[8]、[9])已经指出用度规张量定义应变张量(常称为Green应变张量)是不合理的, 在平面变形情况, 定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Pa: 和 Durelli<sup>[10]</sup>指出, 以单向拉伸为例, 无论伸长多大, 只要位移函数  $u(x)$  为单值可导的, 用  $\partial u/\partial x$  一项便足以确定应变, 无须加入  $1/2(\partial u/\partial x)^2$  二次项. 另一方面, 我们注意到  $[\partial u/\partial x + 1/2(\partial u/\partial x)^2]$  和应力的乘积在物理意义上并不直接等于应变能, 目前许多文献将  $\sigma_{ij}$  定义为应变能仅是从数学形式上出发.

其他有许多大应变分量定义, 旨在消除上述缺点, 其中有如 Durelli 定义<sup>[11]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^L &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1 \\ \epsilon_y^L &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1 \\ \gamma_{xy}^L &= \arcsin \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] (1 + \epsilon_x^L)^{-1} (1 + \epsilon_y^L)^{-1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

但这组分量不构成张量.

Biot 定义<sup>[6]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \epsilon_{11} &= (1 + a_{11}) \cos \theta + a_{21} \sin \theta \\ 1 + \epsilon_{22} &= (1 + a_{22}) \cos \theta - a_{12} \sin \theta \\ \epsilon_{21} &= a_{21} \cos \theta - (1 + a_{11}) \sin \theta, \quad \epsilon_{12} = a_{12} \cos \theta + (1 + a_{22}) \sin \theta \\ \epsilon_{12} &= \epsilon_{21}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 + a_{11} + a_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

上式中  $\theta$  为转动角,  $a_{ij}$  为平面均匀变形的变换系数. 这组应变分量定义由位移梯度乘积定理导出, 定义非唯一.

以下我们将直接由 Moiré 云纹几何学建立应变分量与转动角的度量公式, 并由此解释由纯数学方法的直和分解定理所得结果的几何意义.

## 二、拖带系和云纹法的变形栅

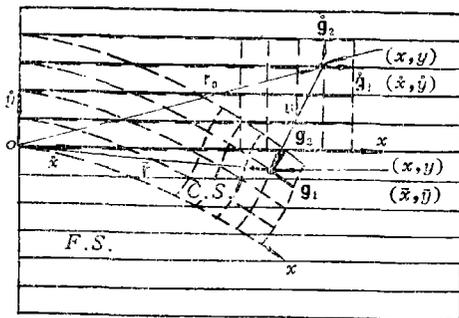


图 1

形后, 拖带坐标为  $(x, y)$  的一点移到相对于固定系坐标为  $(\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y))$  的一点 (图 1). 要注意在试件栅上一点的拖带坐标  $(x, y)$  值 (标号) 在形变过程中是不变的, 改的是它在固定系的位置坐标值.

在实验 Moiré 法中, 采用二组栅格, 一组称为标准栅或固定栅, 它相当于理论上的固定参考系. 另一组为贴附在试件上的变形栅, 它相当于理论上的拖带参考系<sup>[12]</sup>. 当试件栅变形, 它和标准栅条纹相干出现云纹图.

拖带系 (简称为 C. S.) 在初始时, 假和固定系 (简称为 F. S.) 重合. 变形体中点的拖带坐标  $(x, y)$  就以初始时和它重合的固定系坐标  $(\bar{x}, \bar{y})$  来标定:  $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ . 试件变

## 三、由变形栅几何确定大变形应变分量

当单向拉伸时, 拖带系相对于固定系 (C. S. 相对于 F. S.) 作直线运动. 见图 2, 设在 A 点 (对 F. S. 的点坐标为  $\bar{x}_A$  点) 的条纹级数为  $m$ ; 在 B ( $\bar{x}_B$ ) 点的条纹级数为  $m - 1$ . AK 设

为  $\delta$

$$\delta = \bar{x}_A - \bar{x}_B = (\bar{x}_A - x_A) - (\bar{x}_B - x_B) + (x_A - x_B) = u_A - u_B + \delta_0 \quad (3.1)$$

$x_A$ 和 $x_B$ 是变形后位于 $\bar{x}_A$ 和 $\bar{x}_B$ 点的拖带坐标. 位移 $u_A = \bar{x}_A - x_A$ ,  $u_B = \bar{x}_B - x_B$ ;  $\delta_0$ 是 $\delta$ 线段的原长. 令 $\lambda$ 表示单位伸长量,  $A$ 点相对于 $B$ 的线性位移为栅格的一个节距 $a$ . 因此, 可得

$$\delta = (\pm|\lambda| + 1)\delta_0 = a + \delta_0 \quad (3.2)$$

在 $|\lambda|$ 前之负号代表压缩的情形.

以变形后的位形为基准, 正应变定义为

$$\epsilon = \frac{\delta - \delta_0}{\delta} = \frac{a}{\delta} = \pm \frac{|\lambda|}{1 \pm |\lambda|} = \frac{\Delta u}{\Delta s_x} \quad (3.3)$$

上式中 $\delta$ 为条纹间距:  $\Delta s_x = \bar{x}_A - \bar{x}_B = \delta$ ,  $\Delta u = u_A - u_B$ , 上述定义不论是小变形或大变形均适用. 再加入 $1/2(\Delta u/\Delta s_x)^2$ 项作为应变分量可见是多余的.

### 正应变与转动的复合

当拖带系(C. S.)有任意转动和正应变发生(图3). 任取一点 $o$ 为原点考察, 初始时, 拖带系和固定系(F. S.)重合, 拖带系变换后位在 $x'oy'$ , 设拖带系的转动角为 $\theta$ , 规定逆时针转向为正, 原长为 $\Delta y$ 之线段伸长后为 $\Delta y'$ . 按照大变形正应变定义(3.3),

$$\Delta y = \Delta y'(1 - \epsilon_y)$$

$A'$ 点相对于固定系的 $v$ 位移包含有变形与转动影响二项, 所以有

$$\Delta v_A = \bar{y}_A - y_A = -\Delta y(1 - \cos \theta) + (\Delta y' - \Delta y) \cos \theta$$

结果有

$$\epsilon_y = \frac{\Delta v}{\Delta s_y} + (1 - \cos \theta) \quad (3.4)$$

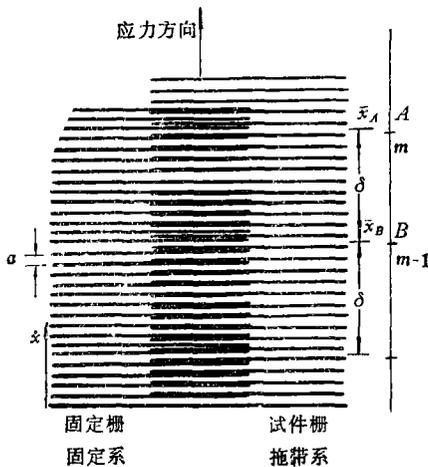


图 2

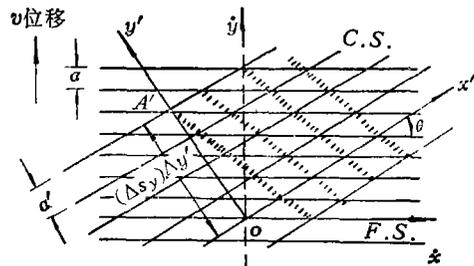


图 3

同理在水平位移 $u$ 场测量中, 消去转动影响的正应变分量:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta u}{\Delta s_x} + (1 - \cos \theta) \quad (3.5)$$

公式(3.4)和(3.5)的结果和文[12]中的数学结论一致, 由此直观解释了理论的含意.

### 角应变和平均转动的度量

在C. S.中一点邻域的平均转动和角应变是通过该点的二条正交线段交角的变化来度量. 在文[12]中导得的平均转角和角应变公式之几何意义可由图4得到说明.

在图4中, 取 $o$ 点邻域考察, 通过 $o$ 初始的二条正交微元线段, 变换后位于 $ox'$ 、 $oy'$ 位

置. 平均转角  $\theta$  通过它的正弦值  $\sin \theta$  度量; 实际上它是  $\sin \theta_1$  与  $\sin \theta_2$  之平均值 (图 4)

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta v}{\Delta s_x} - \frac{\Delta u}{\Delta s_y} \right) = \frac{1}{2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (3.6)$$

$\Delta s_x$ 、 $\Delta s_y$  是沿  $C.S.$  的  $x$ 、 $y$  轴微元线段长度.

在文[12]中的角应变通过正弦值  $\sin \gamma$  度量, 实际上它是  $\sin \theta_1$  和  $\sin \theta_2$  差之平均值

$$\epsilon_{xy} = \sin \gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta v}{\Delta s_x} + \frac{\Delta u}{\Delta s_y} \right) = \frac{1}{2} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \quad (3.7)$$

当运动为刚性的,  $\Delta v / \Delta s_x = -\Delta u / \Delta s_y$ 、 $\epsilon_{xy} = 0$ .

以上结果导出下列一组大变形与大转动的应变分量与转动角计算公式:

$$\left\{ \begin{aligned} \|\epsilon_{ij}\| &= \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta u}{\Delta s_x} + (1 - \cos \theta) & \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta v}{\Delta s_x} + \frac{\Delta u}{\Delta s_y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta v}{\Delta s_x} + \frac{\Delta u}{\Delta s_y} \right) & \frac{\Delta v}{\Delta s_y} + (1 - \cos \theta) \end{pmatrix} \\ \sin \theta &= \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta v}{\Delta s_x} - \frac{\Delta u}{\Delta s_y} \right) \end{aligned} \right. \quad (3.8a, b)$$

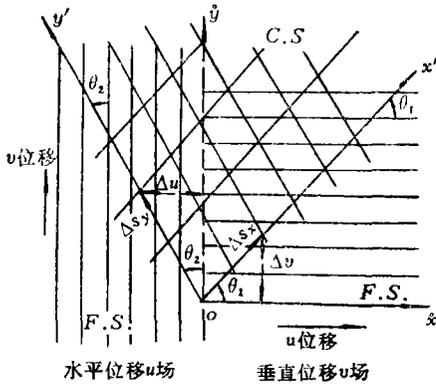


图 4

式(3.8b)之正负号系计及转动正向规定, 如规定逆时针转向为正, 则取正号. 在变形过程中, 当位移  $u$ 、 $v$  连续变动,  $\theta$  角是连续唯一决定的. 应变分量  $\epsilon_{ij}$ , 则不受转向正负之影响.

在一点无穷小邻域, 取  $\text{Lim } \Delta s_x \rightarrow 0$ ,  $\Delta s_y \rightarrow 0$ , (3.8a, b) 式就以微商形式表达. 它和位移梯度分解定理所得应变张量的物理分量形式上完全一致 [见附录]. 这提供了我们研究大变形和有限转动的一个非常有价值的合理途径.

作为应变张量的必要与充分条件之一是当变形体作刚性运动时,  $\epsilon_{ij} = 0$ , ( $i, j = 1, 2$ ); 反之, 当

$\epsilon_{ij} = 0$ , ( $i, j = 1, 2$ ), 变形体之运动变换必为刚性的. 以下我们证明(3.8a, b)满足这个条件.

1) 当变形体作刚性运动时, 位移函数:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 - 1 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad ds_x = dx, \quad ds_y = dy \quad (3.9)$$

由公式(3.8a, b), 易证在此条件下:

$$\epsilon_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2), \quad \theta = \theta_0$$

2) 反之, 如  $\epsilon_{ij} = 0$ . 在公式(3.8a, b)中取  $\text{Lim } \Delta s_x \rightarrow 0$ ,  $\Delta s_y \rightarrow 0$ , 要求下列条件成立:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \cos \theta) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + (1 - \cos \theta) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \theta \quad (3.10)$$

从以上诸式消去  $\theta$ , 得出下列非线性偏微分方程:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 1, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right)^2 = 1 \quad (3.11)$$

易证下列  $u$ 、 $v$  函数为上述微分方程之解

$$\left. \begin{aligned} u &= (\cos \alpha - 1)x - \sin \alpha \cdot y + c_1 \\ v &= \sin \alpha \cdot x + (\cos \alpha - 1)y + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

其中  $c_1, c_2$  为任意常数,  $\alpha$  是与  $x, y$  无关的常数.  $\alpha$  可由 (3.10) 决定:  $\alpha = \theta$ . 因此我们得到刚性运动变换函数.

以上的论证使我们相信  $\epsilon_{ij}$  是合理的应变度量. 有下列特点

(1) 是在拖带系 (C. S.) 中定义的, 消除了转动的影响. 这个定义是非线性的.

(2) 由此定义推断, Cauchy 微小应变分量适用的范围, 不但要求位移梯度微小, 同时要求平均转角  $\theta$  微小,  $\cos \theta \simeq 1$ .

#### 四、附 言

因为大应变分量是在拖带系中定义的. 为了决定  $\Delta u / \Delta s_x, \Delta v / \Delta s_x$  等导数值, 较为方便的方法是在试件栅格之外, 再刻上粗格明线 (可用红线), 沿这些线计算  $\Delta s_x, \Delta s_y$  之近似值. 进一步近似计算可取  $\Delta s_x \simeq \Delta x, \Delta s_y \simeq \Delta y$ , 结果仍可保持一定精确度. 实验方法不在本文讨论范围, 将另文论述. 一篇可参考的早期论文参见 [15].

#### 附录 (参考 [12])

符号:

$x'$  —— 拖带系 (C. S.) 坐标,

$\hat{x}'$  —— 固定系 (F. S.) 坐标,

$\bar{x}'$  —— 在 C. S. 中一点  $x'$  变换后在 F. S. 中的坐标,

$\hat{g}_i, g_i$  —— 变形前后在 C. S. 中一点的基矢 (尺规),

$r_0, \bar{r}$  —— 变形体中一点变换前后的位矢,

$R'_i$  —— 转动张量的分量,

$X'_i$  —— 应变张量的分量,

$$g_i = (R'_i + X'_i) \hat{g}_i, \quad d\hat{x}' = (R'_i + X'_i) dx'^i$$

$$\left( d\hat{x}' = \hat{g}'_i \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \hat{x}'^i} d\hat{x}'^i, \quad \text{当 } \hat{g}'_i \text{ 系为卡氏系, } d\hat{x}' = d\bar{x}' \right)$$

应变张量  $X$ , 物理分量

$$\hat{X}'_i = \frac{1}{2} (\hat{u}'_i |_j + \hat{u}'_j |'_i) - (1 - \cos \vartheta) \hat{L}'_k \hat{L}'^k$$

平均转动角  $\vartheta$ , 物理分量

$$\sin \vartheta = \pm \frac{1}{2} [(\hat{u}'_1 |_2 - \hat{u}'_2 |'_1)^2 + (\hat{u}'_2 |_3 - \hat{u}'_3 |'_2)^2 + (\hat{u}'_3 |_1 - \hat{u}'_1 |'_3)^2]^{1/2}$$

转轴方位  $L$ , 物理分量

$$\hat{L}'_i = \frac{1}{2 \sin \vartheta} (\hat{u}'_i |_j - \hat{u}'_j |'_i)$$

平面变形 ( $\hat{g}'_i$  系为卡氏系)

$$ds_0^2 = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j, \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

$$\hat{L}_2^1 = 1, \quad \hat{L}_3^2 = \hat{L}_1^3 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \|\hat{X}_i^j\| &= \begin{bmatrix} \hat{X}_1^1 & \hat{X}_1^2 \\ \hat{X}_2^1 & \hat{X}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial x^1} + (1 - \cos \vartheta) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial x^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial x^2} \right) & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial x^2} + (1 - \cos \vartheta) \end{bmatrix} \\ \sin \vartheta &= \pm \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial x^2} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial x^1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-1})$$

$$ds^1 = \sqrt{g_{11}} dx^1, \quad ds^2 = \sqrt{g_{22}} dx^2$$

$$\left. \begin{aligned} \|\hat{X}_i^j\| &= \begin{bmatrix} \hat{X}_1^1 & \hat{X}_1^2 \\ \hat{X}_2^1 & \hat{X}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial s^1} + (1 - \cos \vartheta) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial s^1} + \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial s^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial s^1} + \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial s^2} \right) & \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial s^2} + (1 - \cos \vartheta) \end{bmatrix} \\ \sin \vartheta &= \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial s^2} - \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial s^1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-2})$$

## 参 考 文 献

1. Hencky, H., Die Bewegungsgleichungen beim nichtstationären fließen plastischer Massen, *ZAMM*, 5, (1925), 144—146.
2. Brillouin, L., *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité*, Paris, (1938).
3. Synge, J. L. and Chien W. Z., The intrinsic theory of elastic shells and plates, Theodore von Kármán Anniversary volume, (1941).
4. Green, A. E. and Zerna, W., Theory of elasticity in general co-ordinates in the mechanics of continuous media, *Phil. Mag.*, 47, (1950), 313—336.
5. Lodge, A. S., *Body Tensor Fields in Continuum Mechanics*, Academic Press, (1974).
6. Biot, M. A., *Mechanics of Incremental Deformation*, John Wiley, (1965).
7. Swainger, K. H., Saint-Venant's and Filon's finite strain definitions non-linear in disolacement gradients, *Nature*, 164, (1949), 53.
8. Brinkmann, G., Über die nichtlinearen Glieder in Verschiebungs-Dehnungsgesetz *Ing. Arch.* 32, (1963), 77—80.
9. John, F., Rotation and strain *Comm. Pure and Appl. Math.*, 14, (1961), 391—413.
10. Park, V. J. and Durelli, A. J., On the definition of strain and their use in Large-strain analysis, *Exp. Mech.*, 7, (1967), 279—280.
11. Durelli, A. J., Visual representation of the kinematics of the continuum, Second SESA Int. Cong. on Exp. Mech., The William M. Murray Lecture, (1965).
12. 陈至达, 连续介质有限变形力学几何场论, *力学学报*, 2期(1979), 107—117.
13. 陈至达, 实验应力分析补充讲义, 中国矿业学院北京研究生部, (1980).
14. 姜复本, Moiré方法(中文), 清华大学工程力学系印, (1980).
15. 陈至达, 固体在温度影响下的大变形测量, 中国矿业学院研究报告, (1964).

## The Moiré Geometry of Plane Finite Strain and Rotation

Chen Zhi-da

*(China Institute of Mining Technology)*

### Abstract

We justify in this paper that the foundation of **mathematical theory<sup>(12)</sup>** of finite deformation by method of co-moving coordinate is identical to the Moiré method in experimental mechanics. Hence, the important practical value of the theory is further ascertained.