

# 机床基础件动态特性的有限元分析\*

何 穷            陈正定            熊焕国

(上海宝山钢铁总厂教育中心)    (上海机床研究所)    (上海业余工业大学)  
(1981年2月30日收到)

## 摘    要

本文用有限元法研究了机床基础件的动态特性, 编制了多单元动静结构分析程序, 使得能够分析各种基础件和各种计算模型。

提取矩阵特征对的方法采用迁移子空间迭代法, 它具有效率高和精度高的优点, 本程序也能在国产 TQ-16 计算机上求解其它类型复杂结构任意所要求的特征对。

## 一、引    言

机床基础件(床身、立柱、工作台、拖板、横梁等)的动态特性直接关系到产品加工精度, 一直是机床设计工作者关心的问题。由于基础件是一种较为复杂的空间结构, 以往很难进行精确的理论计算, 因此近十年来应用有限元法研究基础件的动刚度已成为国内外引人注目的课题。文 [1],[2],[3],[4] 中报导了近年来国内一些研究进展, 但这些研究往往仅限于采用一种简单单元, 计算一个具体问题, 或一次只能算出一个基本频率, 在计算模型的简化上也不尽相同。为了更有效地分析机床基础件的动刚度, 探索更合理的简化计算模型, 我们编制了面向机床等结构的多单元、多功能动、静态有限元计算程序, 该程序中已配置了十余种单元, 能满足分析各类基础件和整机的需要, 在解法上采用带有移轴和迁移功能的子空间叠代法, 能一次算出若干个基频和相应的振型。一年来, 应用该程序分别计算了各种基础件的动态特性和静态特性, 所得结果表明计算精度较高, 计算速度较快, 且与工程实测数值相符。

在分析基础件的动、静刚度过程中, 还探讨了各种简化计算模型和各种单元对计算结果的影响, 从而得出: 只要该基础件属于以承受膜应力为主的空间板系结构, 则可应用简单膜元分析其前几阶整体型振动, 这样便使问题大大简化, 计算机的内存耗费大为减少, 在小型机上也可解算较大型的问题; 另外, 对于承受纯弯曲型变形为主的构件, 采用不协调元往往可期望得到更好的结果。

## 二、自由振动方程及解法

机床基础件完全可按其实际结构离散为由膜、板、壳、杆、梁等单元组成的有限元计算模型。取各节点处位移为基本未知量, 则其自由振动有限元方程组为:

\* 钟万铨推荐。

$$[M][\ddot{u}] + [K][u] = 0 \quad (2.1)$$

其中  $[u]$  为位移列阵,  $[\ddot{u}]$  为加速度列阵,  $[K]$  为结构总刚度矩阵,  $[M]$  为结构总质量矩阵.

将各节点的位移用振幅  $X$ , 角频率  $\omega$  和初始相位角  $\varphi$  表示, 写成矩阵形式:

$$[u] = [X] \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.2)$$

由 (2.1), (2.2) 可得

$$[K][X] = \omega^2 [M][X] \quad (2.3)$$

(2.3) 是一个广义特征值问题. 由于实际结构简化后的节点总数及自由度总数可高达数百至数千, 求出其全部特征值及特征向量是困难的, 然而直接影响机床精度的主要是前几阶基频和振型, 我们认为, 对这一类问题采用子空间叠代法求解较为适宜.

子空间叠代法实质上是同时对一组初始猜测向量反复地使用李兹法和逆迭代<sup>[5]</sup>. 由机器按一定规则自动形成的由  $q$  个线性无关的  $n$  维 (自由度总数) 向量  $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_q\}$  组成一组初始猜测向量, 构成一个子空间, 通过逆迭代则使这  $q$  个向量中低阶振型部分不断扩大, 而应用李兹法则又在逆迭代过程中对该子空间作关于  $[M]$  阵的正交化处理, 这样反复迭代的结果使逐次修改后的初始猜测向量的子空间逐步地逼近原问题 ( $n$  维) 的前  $q$  阶特征向量构成的子空间, 从而找到前  $q$  阶振型和相应的基频.

为了保证求解的精度, 一般应取  $q$  不小于所需求前几阶基频总数  $p$  的二倍或  $p+8$ . 有了初始猜测向量  $\{x_i\}$  后, 则可按以下公式循环迭代.

$$[K][\bar{X}_k] = [M][X_{k-1}] \quad (2.4)$$

$$[K]^* = [\bar{X}_k]^T [K][\bar{X}_k] \quad (2.5)$$

$$[M]^* = [\bar{X}_k]^T [M][\bar{X}_k] \quad (2.6)$$

$$[K]^*[A_k] = [M]^*[A_k] \quad (2.7)$$

$$[X_k] = [\bar{X}_k][A_k] \quad (2.8)$$

在实现上述循环迭代过程中, 首先对  $[K]$  作 LDLT 三角分解并加以保存, 已知初始猜测向量  $[X_0]$  后, 从 (2.4) 作一次回代即可求得  $[\bar{X}_1]$ , 通过 (2.5)、(2.6) 分别求出  $[K]^*$ 、 $[M]^*$  阵在子空间上的投影矩阵  $[K]^*$ 、 $[M]^*$ , 从而将原  $n$  维问题化为 (2.7) 表示  $q$  维子空间 ( $q \ll n$ ) 的广义特征值问题, 应用修正的 QL 法<sup>[6]</sup> 可很快求得该广义特征值问题的全部特征值和特征向量, 再从 (2.8) 求得  $[X_1]$  为下一步迭代作好准备, 如此循环往复直至前后两次求得特征值之差满足一定精度为止, 从而最终求得前  $q$  阶基频和相应的振型.

分析上述过程中各步运算次数不难发现: 如果子空间取得较大则其运算工作量剧增, 其中尤以涉及子空间本身的那一个部分计算耗费极大, 为了提高子空间迭代法的计算效率, 不妨采用把  $M^{-1}$  正交化与子空间迭代法相结合的迁移子空间方法.

迁移子空间迭代法的具体步骤是: 设子空间维数为  $q$ , 初始猜测向量为  $p$  列, 若每完成一次迭代后有前  $F_0$  列已满足  $\epsilon/10$  精度, 其相应的振型记为

$$\{x_0\}^{(j)}, j=1, 2, 3, \dots, F_0 \quad (0 \leq F_0 < p)$$

在下一轮迭代前, 先将已满足上述条件的前  $F_0$  列退出迭代过程, 并从原始猜测向量中递补进  $F_0$  列, 重新组成的猜测向量记为  $\{x\}^{(j)}, j=1, 2, \dots, q$ . 显然, 在重新组成的猜测向量中必须彻底清除掉前  $F_0$  阶振型, 清除后的猜测向量为

$$\{x\}^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, q).$$

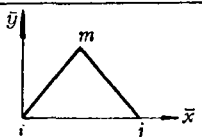
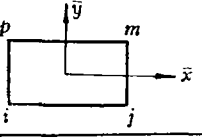
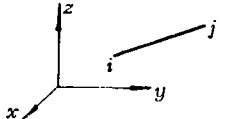

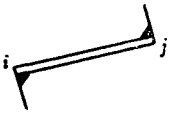
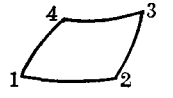
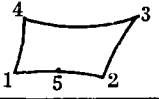
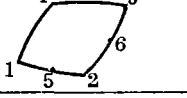
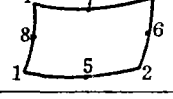
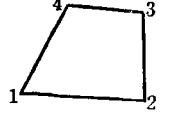
由于不同的主振型关于质量阵正交的, 即

$$\{x_0\}^{(i)T} [M] \{x_0\}^{(j)} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, F_q) \quad (2.9)$$

而在  $\{x\}^{(i)}$  中已不再含有前  $F_q$  阶振型, 故有

$$\{x_0\}^{(i)T} [M] \{x\}^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, F_q, j = 1, 2, \dots, q) \quad (2.10)$$

表 1

类型	特点	单元简图	特点
简单膜元	三角形		常应变
	矩形		线性应变
	空间杆		常应变
板	三角形板		按希克霍夫假定离散化
	带刚臂梁		两端刚臂与梁可成任意角度
平面等参元	四点		$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$
	五点		$u = \sum_{i=1}^5 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^5 N_i v_i$
	六点		$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i$
	八点		$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i$
不协调元			$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + (1 - \xi^2) u_5 + (1 - \eta^2) u_6$ $v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + (1 - \xi^2) v_5 + (1 - \eta^2) v_6$

并且不难构造 
$$\{x\}^{(i)} = \{\bar{x}\}^{(i)} - \sum_{k=1}^{F_0} \alpha_{ki} \{x_0\}^{(k)} \quad (2.11)$$

显然，只要定出  $\alpha_{ki}$ , ( $k=1, 2, \dots, F_0$ ) 即可求出已清除前  $F_0$  阶振型的下一轮猜测向量. 在等式 (2.11) 两边同时前乘  $\{x_0\}^{(i)T}[M]$ :

$$\{x_0\}^{(i)T}[M] \{x\}^{(i)} = \{x_0\}^{(i)T}[M] \{\bar{x}\}^{(i)} - \sum_{k=1}^{F_0} \alpha_{ki} \{x_0\}^{(i)T}[M] \{x_0\}^{(k)} \quad (2.12)$$

由 (2.9), (2.10) 和 (2.12) 我们求得

$$\{x_0\}^{(i)T}[M] \{\bar{x}\}^{(i)} - \alpha_{ij} \{x_0\}^{(i)T}[M] \{x_0\}^{(i)} = 0$$

就可得到:

$$\alpha_{ij} = \frac{\{x_0\}^{(i)T}[M] \{\bar{x}\}^{(i)}}{\{x_0\}^{(i)T}[M] \{x_0\}^{(i)}} \quad (i=1, 2, \dots, F_0) \quad (2.13)$$

将  $\alpha_{ij}$  代入 (2.11) 中即可完全确定参加下一轮迭代的猜测向量  $\{x\}^{(i)}$ . 反复使用上述过程就实现了“迁移”，即可求出所需的全部固有频率和振型.

在计算实际结构动态特性时，往往由于有限元计算模型考虑欠周，会保留某些局部刚体可动性，或者由于结构本身存在刚度大小相差悬殊的两部分联接，或者为了计算无支承下的结构自由振动都会遇到  $[K]$  的奇异和病态. 为了克服这一困难，采用了移轴技术，即将原

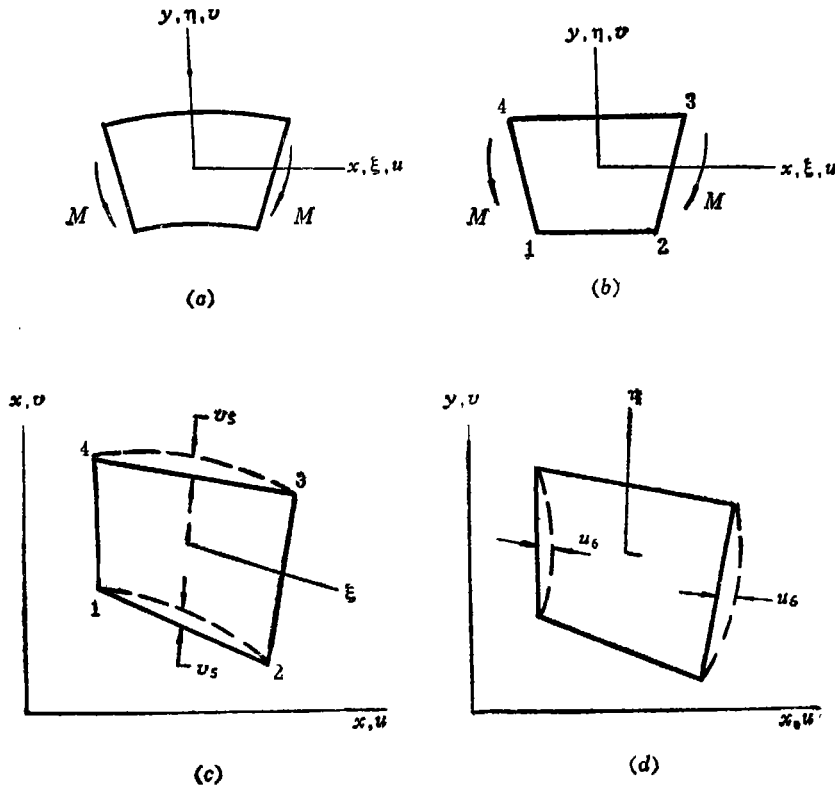


图 1 不协调元.

广义特征值问题(2.3)改写为如下形式:

$$([K] + \beta[M])[X] = (\omega^2 + \beta)[M][X] \quad (2.14)$$

$\beta$ 为任意选取的正数(一般取成与原问题第一阶基频同数量级)而(2.14)又可表为:

$$[\tilde{K}][X] = \lambda[M][X] \quad (2.15)$$

这里 $[\tilde{K}] = [K] + \beta[M]$ , 为正定对称阵. 不难证明, (2.15)的特征向量与(2.3)的特征向量相同, 而从求得的特征值 $\lambda_i$ 中减去 $\beta$ 即为原问题的 $\omega_i^2$ 之值. 在计算过程中, 当对 $[K]$ 作LDLT分解时发现其某阶主子式为零时, 或在子空间迭代过程中发现 $[K]$ 病态时则可立即自动进行移轴以保证计算继续进行.

由于上述解法中, 对 $[K]$ 已作LDLT分解, 则结构的静刚度问题:

$$[K][u] = [f] \quad (2.16)$$

只要形成右端荷载项进行一次回代即可完成<sup>[9]</sup>.

### 三、单 元 谱

我们根据机床结构的特点, 在程序中共采用了十种单元, 详见表1. 现对这十种单元分为四类, 简单介绍如下:

第一类单元(三角形、矩形膜和杆)属于协调元, 其中三角形为常应变单元, 而矩形元则由于采用高一级的位移函数往往有较好的精度和收敛速度, 空间杆元一般可用来描述筋或支撑杆. 总之, 这类单元可应用于以承受面内膜力为主的空间板系结构, 例如一般机床的闭式, 开式床身, 立柱等.

第二类单元(三角形板和梁), 考虑了弯曲效应, 可用作更精细的分析, 但由于这类单元每一个节点均为六个自由度, 往往导致问题的总未知数剧增, 对计算机容量要有更高要求.

第三类单元(四节点, 五节点, 六节点和八节点的等参元)属于线性协调平面元, 由于这类单元的组成节点数分别有四、五、六、八四种, 有利于按实际结构形状布置节点, 而且对于作局部改型后的计算, 只要适当地更换一下单元类型, 仍可沿用原有数据, 给计算带来很大方便.

众所周知, 线性等参元亦是属于协调元, 应用这类单元分析结构纯弯曲状态是很不适宜的. 例如对于纯弯曲变形的梁, 图1(a), 表示其实际变形状态, 而(b)则为四点协调等参元情况, 可见实际梁中四角点处剪应变均为零, 而按协调元计算则不为零, 即这种协调元的刚度“过硬”, 为了克服这种寄生剪切的影响, 按文[8]可将协调等参元的位移函数作适当修改, 增加上两项, 即在四点等参元上加上内部自由度, 其中 $u_5, u_6$ 的几何意义见图1(c), (d). 更改后的位移函数为:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + (1-\xi^2)u_5 + (1-\eta^2)u_6 \quad (3.1)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + (1-\xi^2)v_5 + (1-\eta^2)v_6 \quad (3.2)$$

显然, 这种单元是不协调的.

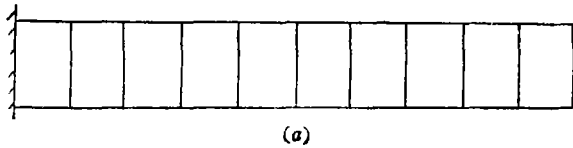
采用这种不协调的第四类单元分析结构纯弯曲时静态变形有明显的优点, 文[8]中已作叙述, 我们应用这类单元分析结构纯弯曲型的振动特性也发现有明显的优点.

#### 四、算例及讨论

为了考核程序的可靠性及精度, 探讨各种单元对计算结果的影响, 分别作了如下一些算例.

##### 1) 悬臂梁的自由振动

图2所示悬臂梁, (a)为粗网格, (b)为中网格, 材料为铸铁, 所得结果见表2.



其解析解根据文[10]分别取为:

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EIg}{A\sigma}} \text{ 周/秒 (横振)}$$

其中  $f_n$ ——第  $n$  阶自振频率;  $k_n$ —— $n$  阶自振频率的系数  $k_1=1.875$ ,  $k_2=4.694$ ;  $L$ ——梁的长度;  $E$ ——弹性模量;  $I$ ——梁的断面惯性矩;  $g$ ——重力加速度;  $A$ ——梁的断面面积;  $\sigma$ ——材料的比重.

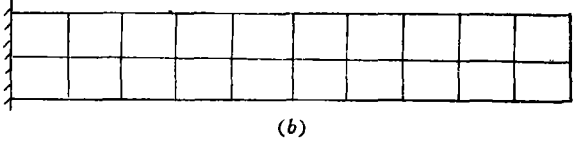


图2 悬臂梁.

$$f_i = \frac{i}{4L} \sqrt{\frac{Eg}{\sigma}} \text{ 周/秒 (纵振)}$$

其中  $i$ ——第  $i$  阶纵振频率的阶数;  $f_i$ ——第  $i$  阶纵振频率值.

表2 悬臂梁的自由振动

结 果		一 阶 (横振)	二 阶 (横振)	三 阶 (纵振)	子空间叠代次数
情 况		Hz	Hz	Hz	
矩形膜元	粗网格(10个单元)	115	599	1027	4
	中网格(20个单元)	78	468	1038	6
三角形膜元 (文)[2]	中网格(40个单元)	107.6	619	1033	
	细网格(160个单元)	79.7	473.7	1039.2	
四点不协调元 (10个单元)		64	319	1048	
解 析 解		67	419.9	1037.2	

从表2中结果可见: (1) 本程序精度较高, 按中网格计算所得之值已与文[2]中细网格所得之值相当接近, 计算次数也较少. (2) 对于这一类问题应用不协调元更为精确, 因为不协调元的位移函数更能反映梁的振动型态.

为了进一步研究其振型及精度, 还对图3所示尺寸的另一悬臂梁作了计算, 其结果与SAP-5计算值比较见表3, 各阶振型完全吻合.

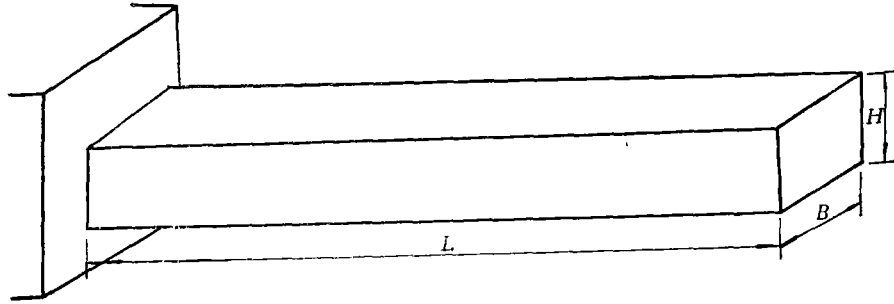


图3 方形截面悬臂梁.

$L=100\text{mm}$                        $B=H=10\text{mm}$   
 $E=2 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$                $\mu=0.3$   
 $\rho=7.8 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^3$

表 3                                      与 SAP-5 计算值比较

阶数	频率 Hz	方法	解析解	SAP-5 (梁元)	矩形膜元	不协调元	相对解析解误差%	
							SAP-5	不协调元
一阶弯曲	810		810	791	942	814	2	0.3
二阶弯曲	5060		5060	4596	5589	4875	9	3.6
一阶纵振	12500		12500	11750	12457	12580	1.7	0.6
三阶弯曲	14150		14150	12480	12435	12871	11	9
四阶弯曲	27800		27800	20180	26165	25457	27	15

2) 中空立柱的自由振动

为了进一步考核本程序求解空间结构的精度，曾对图4所示立柱作了相应计算，材料为有机玻璃 ( $E=29400 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu=0.37$ ,  $\rho=0.00118 \text{ kg/cm}^3$ ) 表4分别列出了模型顶端一侧每边作同方向10kg力时的静态变形及前五阶自振频率值，并分别与文[2]，文[3]所列结果、B. B. Камиская等的解析解、上海市机床研究所的激光实测值作了比较。

从表4中可见：(1)程序计算结果可靠，完全可用于各类机床基础件的计算；(2)使用简单膜元与使用壳元计算结果前n阶固有频率和振型完全一致，可见对于以承受膜力为主的板系结构，使用膜元模型分析其整体型前n阶自振频率是完全可行的，文[11]中曾讨论过在静态计算中两类单元模型比较，同样证明对于这一类结构完全可用膜元模型分析其静态变形。

3) 镗床立柱的自由振动

T4145坐标镗床立柱的结构简图如图5所示，共分为91个节点，104个单元，所得各阶固有频率值见表5，上机时间为廿分钟(TQ--16机)，叠代次数为5次，计算值与实测值基本相符，其各阶振

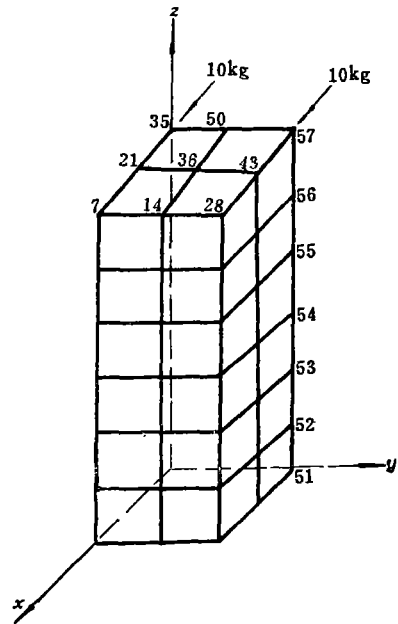


图4 中空立柱单元划分(下底面固定).

型也完全一致。

表 4

中空立柱计算结果

结果 情况	节点号	静 态 变 形 (mm)			基 频 Hz
		$u$	$v$	$w$	
膜 元	51	0	0	0	$f_1=317$
	52	-0.02213	0.00549	0.01737	$f_2=317$
	53	-0.05732	0.00466	0.03117	$f_3=656$
	54	-0.10529	0.00347	0.04190	$f_4=876$
	55	-0.16235	0.00234	0.04964	$f_5=1216$
	56	-0.22523	0.00117	0.05441	
	57	-0.29739	-0.00018	0.05674	
壳 元	51	0	0	0	$f_1=310$
	52	-0.02197	0.00546	0.01735	$f_2=323$
	53	-0.05717	0.00466	0.03114	$f_3=655$
	54	-0.1051	0.00347	0.04189	$f_4=824$
	55	-0.16208	0.00235	0.04960	
	56	-0.2248	0.00116	0.05442	
	57	0.2983	0.00002	0.05696	
文[3] 壳 元	51	0	0	0	$f_1=323$
	53	-0.04881	0.00504	0.02577	
	55	-0.13883	0.00179	0.04190	
	57	-0.25251	-0.00012	0.04715	
文[2] 三角形膜元 (细网格)	57	-0.281			
	37	-0.281			
解 析 解	57	-0.314			
实 测 值	57	-0.300			$f_1=345$

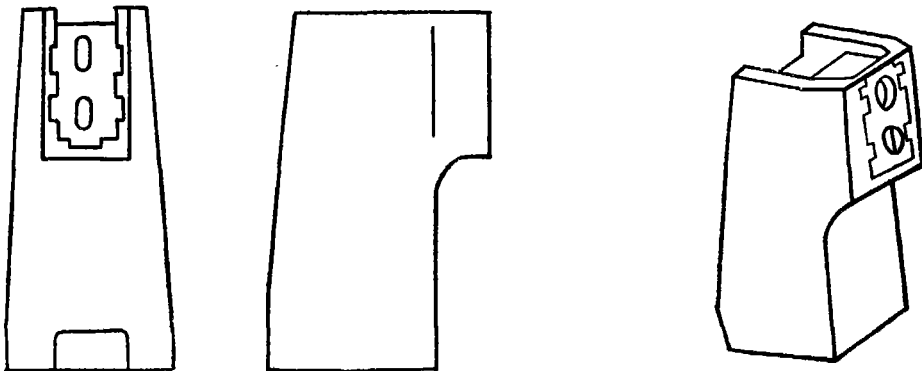


图 5 T4145 镗床立柱示意图。



表 5 T4145 镗床立柱自由振动计算结果

基 频 阶 数	方 法 Hz	计算值	实测值	误差
		一 阶	99.3	105
二 阶	137.9	127	8%	
三 阶	183.4	167	9%	
四 阶	292.4			
五 阶	422.3			

本课题得到钟万勰教授，杨礼求工程师的支持和指导，特此致谢。

## 参 考 文 献

1. Sato, H., Kuroda, Y. and Sagara, M., Development of finite element method for vibration analysis of machine tool structure and its application, Proc. 14th MTDR, (1974).
2. 袁景侠, 冯辛安, 魏兆正, 用子空间迭代法的有限元法计算机床大件的振动, 大连工学院学报, 1(1980).
3. 孙靖民, 王新荣, 机床大件的静、动刚度的有限元法计算, 哈尔滨工业大学学报, 2 (1980).
4. 温文源, 葛巧琴, 虞尔九, 潘新陆, 机床结构件振动特性的有限元法计算研究, 南京工学院学报, 1(1980).
5. Klaus-Jürgor Wilson, *Numerical Method in Finite Element Analysis*, (1976).
6. Wilkinson, *Linear Algebra*, (1971).
7. 钟万勰, 林家浩, 程耿东, 田玉山, 振动力学特征值问题的研究及其在构架式基础动力计算中的应用, 1978年教育部高等院校“计算结构力学学术交流论文集”。
8. Cook, Robert, D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, (1973).
9. 陈正定, 刘万春, 熊焕国, 机床大件静刚度有限元法分析, 上海机械, 10(1980).
10. S. A. 托贝斯, 《机床振动学》. (1965).
11. 陈正定, 熊焕国, 空间板系结构有限元分析中的一般壳元及膜元, 第一届全国计算力学学术交流论文, (1980).

## Finite Element Study of Dynamic Characteristics of Main Components of Machine Tools

He Qiong

*(Educational Center of Shanghai Bao-shan Steel Plant, Shanghai)*

Cheng Zheng-ding

*(Shanghai Machine Tool Research Institute, Shanghai)*

Xiong Huan-guo

*(Shanghai Part-time Technical University, Shanghai)*

### Abstract

Dynamic characteristics have been studied for main components of machine tools by finite element method. The multi-element static and dynamic structural analysis program makes possible the analysis of main components in various computing models.

The eigen pairs are solved by the transfer sub-space iterative method with the advantages of high efficiency and precision. The program can be executed on the China-made computer TQ-16 and arbitrary sets of eigen pairs for the treatment of dynamic characteristics of complex structures of various kinds are thus obtained.