判别函数定号性和变号性的几个定理及其对睡陀螺轴运动条件稳定性的应用*

戈 正 铭

（上海交通大学工程力学系，1980年7月21日收到）

摘 要

本文给出判别函数定号性和变号性的几个定理并给出其对睡陀螺轴运动条件稳定性的应用，从而得出睡陀螺轴运动条件稳定的必充条件．它与章动角稳定和运动方程全部变量稳定的必充条件吻合．

一、判别函数定号性和变号性的几个定理

应用 Ляпунов 直接法时，需要判别函数是定号、常号或变号，现给出下列几个判别函数定号性和变号性的定理：

定理 1：令 $V_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个偶次的 m 次常号型，$V_{m+2}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 $m+2$ 次型，当 V_m 等于零时与 V_m 的常号取同号且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时等于零，于是函数

$$U(x_1,x_2,\cdots,x_n)=V_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)+V_{m+2}(x_1, x_2,\cdots,x_n)+V^*(x_1, x_2,\cdots,x_n) \tag{1.1}$$

是与 V_m 同号的定号函数，这里 V^* 是高于 $m+2$ 次的诸项之和．

证明：为确定计，令 V_m 是常正的并当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足下列方程时等于零：

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,k<n) \tag{1.2}$$

于是由于 V_m 是齐次型，我们有

$$V_m(\lambda x_1', \lambda x_2',\cdots,\lambda x_n')=\lambda^m V_m(x_1',x_2',\cdots,x_n')=0 \tag{1.3}$$

这里 λ 是任意常数．这意味着，在通过点 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 和坐标原点的直线上 V_m 总是等于零．因此方程（1.2）表示 n 维欧氏空间中顶点在原点的超锥面（hyperconical surface），通过原点的平面和直线是其特例．在这些超锥面上，$V_m=0$ 且 $V_{m+2}>0$．

令

$$\left.\begin{aligned} &x_s=\rho\alpha_s \quad (s=1,2,\cdots,n)\\ &\rho=+\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\\ &\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2=1 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

---

* 叶开沅推荐．

于是 (1.1) 成为

$$U(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\rho^m V_m(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+\rho^{m+2}\left[V_{m+2}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+\frac{V^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\rho^{m+2}}\right] \tag{1.5}$$

当 ρ 足够小时，因为 $V^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是高于 $m+2$ 阶的无穷小量，所以当 $V_{m+2}\neq 0$ 时括号内两项之和的符号决定于 V_{m+2}. 类似地，U 的符号当 $V_m\neq 0$ 时决定于 V_m 的符号.

中心在原点的球面

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\rho^2 \tag{1.6}$$

与超锥面 (1.2) 的交集形成闭区域 R，在其上 $V_m=0$，$V_{m+2}>0$. 因为 R 是有界的，而 V_{m+2} 是连续函数，所以在球面上我们总可以找到包含 R 的带形闭区域 C，在其上 $V_{m+2}>0$. 取 C 的边界的每一点与坐标原点的联线为母线，以原点为顶点，我们可以作出以 C 为底的圆锥 H，在其内和其边界 (除原点外) 上 $V_{m+2}>0$. 这是因为如果 $(x_1'',x_2'',\cdots,x_n'')$ 是 C 的一点，于是由于 V_{m+2} 是齐次型 [见 (1.3) 式]，所以在通过该点和原点的整根直线 (除原点外) 上总有 $V_{m+2}>0$. 既然 $V_{m+2}+V^*$ 的符号决定于 V_{m+2} 的符号，所以在 H 内和其边界(除原点外) 上有 $V_{m+2}+V^*>0$. 同时我们知道 $V_m\geqslant 0$，所以在 H 内和其边界上 (除原点外) 有 $U=V_m+V_{m+2}+V^*>0$.

根据给定条件，在球面 (1.6) 所形成的球体的，除圆锥 H 之外的其它地方，$V_m>0$ 且 V_m 的符号决定 U 的符号，因此在那里亦有 $U>0$. 于是在半径为 ρ 的球体内，U 总大于零，仅在原点变为零，所以是定正函数. 当 V_m 是常负函数时，证明完全相同.

例: $V_m(x_1,x_2)=V_2=(x_1+x_2)^2$

$V_{m+2}(x_1,x_2)=V_4=-x_1x_2^3+x_1^4$

$f(x_1,x_2)=x_1+x_2=0$

将 $x_1=-x_2$ 代入 V_4，$V_4=2x_2^4$. 定理得到满足，所以

$U(x_1,x_2)=V_2+V_4+V^*$

是定正的.

与定理 1 的证明类似，可以证明下列二定理:

定理 2：设我们有函数 $U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$:

$$U(x_1,x_2,\cdots,x_n)=V_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{p=1}^{r}V_{m+p}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+V_s(x_1,x_2,\cdots,x_n)+V^*(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad (m=2,4,6,\cdots;\ r=1,2,3,\cdots;\ s>m+2r) \tag{1.7}$$

这里 V_m 是常号 m 次偶次型，它在变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足方程组

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,k<n) \tag{1.8}$$

时取零值; $V_{m+1},\cdots,V_{m+r}$ 分别是 $m+1$ 次，$\cdots$，$m+r$ 次型，而且它们在 V_m 取零值的区域 B 内有同时都取零值的子域 D; V_s 是奇次型时它在子域 D 内不总取零值，V_s 是偶次型时它在子域 D 内可取与 V_m 的常号相异号的值，V^* 是高于 s 次的诸项之和，于是 U 是变号函数.

例 1：设 $n=4$，$V_m=V_2=(x-y)^2$，$V_{m+1}=V_3=(x-y)^3$，$V_{m+2}=V_4=(x-y)^2(x+y)^2$

$+(z-w)^4$，$V_{m+3}=V_5=(x-y)^5$，$V_{m+r}=V_{2+4}=V_6=(x-y)^2(y+w+z)^4+(z-w)^4(x^2+w^2)^2(r=4)$，$V_s=V_9=x^9-2x^5z^4+y^9$. 现在 B 区域是 $x-y=0$ 所代表的四维欧氏空间中的三维超平面(超锥面的特例)，D区域是 $x-y=0$，$z-w=0$ 所代表的四维欧氏空间中的二维超平面. 将 $x=y$，$z=w$ 代入 V_9，可得 $V_9=2y^9-2y^5w^4$，此时它显然不总为零，定理 2 的条件完全满足，所以

$$U=V_2+V_3+V_4+V_5+V_6+V_9+V^*$$

是变号函数.

例 2：设 $n=4$，$m=2$，$r=4$，$s=10$，

$$V_m=V_2=(x-y)^2$$
$$V_{m+1}=V_3=(x-y)(8xw-7yz)$$
$$V_{m+2}=V_4=(x-y)(3xy^2-5wyz)+(z-w)^4$$
$$V_{m+3}=V_5=(x-y)(x^2yz+y^3wx+9w^3x^2)$$
$$V_{m+r}=V_6=(x-y)^2(y+w+3z)^4+(z-w)^4(x^2+w^2)$$
$$V_s=V_{10}=x^{10}-2x^5y^5+z^{10}$$

现在区域 B 是由 $x-y=0$ 所表示的三维超平面，区域 D 是 $x-y=0$，$z-w=0$ 所表示的二维平面.

将 $x=y$，$z=w$ 代入 V_3，V_4，V_5，V_6，它们都取零值，代入 V_{10} 可得 $V_{10}=-y^{10}+z^{10}$，它显然可取负值，定理 2 的条件完全满足，所以

$$U=V_2+V_3+V_4+V_5+V_6+V_{10}+V^*$$

是变号函数.

定理 3：设我们有

$$U(x_1,x_2,\cdots,x_n)=V_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{\gamma=1}^{r}V_{m+2\gamma}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$+V_{m+2r+2s}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+V^*(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$(m=2,4,6,\cdots;\ r=1,2,3\cdots;\ s=0,2,4,6,\cdots) \tag{1.9}$$

这里 V_m 是 m 次常号型，它在变量满足 (1.8) 式时取零值；$V_{m+2},\cdots,V_{m+2r}$ 分别是与 V_m 同号的 $m+2$ 次，$\cdots$，$m+2r$ 次常号型，而且它们在 V_m 取零值的区域 B 内有同时都取零值的子域 D；$V_{m+2r+2s}$ 是 $m+2r+2s$ 次型，它在子域 D 内总与 V_m 的常号取同号且仅在原点取零值，V^* 是高于 $m+2r+2s$ 次的诸项之和. 于是 U 为定号函数.

本定理是定理 1 的推广.

例：设 $n=4$，$m=2$，$r=2$，$s=2$.

$$V_m=V_2=(x-y)^2,\quad V_{m+2}=V_4=(x-y)^2(2x+3y)^2+(z-w)^4$$
$$V_{m+2r}=V_6=(x-y)^2(y+2w+z)^4+(z-w)^4(x^2+w^2)^2$$
$$V_{m+2r+2s}=V_{10}=x^{10}+2x^5y^5+z^{10}$$

现在区域 B是$x-y=0$ 所表示的在四维空间中的三维超平面，区域 D是$x-y=0$和 $z-w=0$ 所表示的二维平面. 将 $x=y$ 及 $z=w$ 代入 V_4，V_6 可得 $V_4=V_6=0$；代入 V_{10} 可得$V_{10}=3y^{10}+w^{10}$，它总取正值，而只在 $x=y=z=w=0$ 时才等于零. 定理 3 的条件完全满足，所以

$$U=V_2+V_4+V_6+V_{10}+V^*$$

是定正函数.

二、睡陀螺轴运动条件稳定的必充条件的证明

睡陀螺的运动稳定性是一个经典问题，自从1865年 H. B. Маиевский[1]首先研究这个问题之后，一百多年来不少作者[2-5]都从不同方面用不同方法研究过这个问题. 特别是 J. L. Synge[6,7]给出了章动角稳定的充分必要条件. 1946 年 H. Г. Четаев[8]根据 Ляпунов 直接法得到睡陀螺轴条件稳定的充分条件. 1954 年 Четаев 进而得出运动无条件稳定的充分条件[9]. 本文作者在 Четаев 1954 年工作的基础上在 1963 年得出运动方程全部变量稳定的必充条件[10]. 下面本文在 Четаев 1946 年工作的基础上，根据（一）的定理得出睡陀螺轴条件稳定的必充条件，它与章动角稳定的必充条件和运动方程全部变量稳定的必充条件完全吻合. 有些作者[11-13]曾忽视 $C^2\omega^2=4Amga$ 的情况，认为稳定的必充条件是 $C^2\omega^2>4Amga$，这是错误的.

睡陀螺的运动考虑作一个重刚体的定点运动. 惯性坐标系 $oxyz$ 的原点与该定点重合，x 轴铅垂朝上. 与陀螺固结的动坐标系的轴 $o\eta,o\zeta,o\xi$ 与陀螺在固定点 o 的惯性主轴重合. 相应的转动惯量是 A，B，C. 我们有

$$A=B,\qquad \xi=a,\qquad \eta=0,\qquad \zeta=0 \tag{2.1}$$

这里 ξ，η，ζ 是陀螺重心的相对坐标，a 是一个正数.

陀螺轴$o\xi$的位置可以由角α和β决定，这里 $\alpha=(J,x)$，$\beta=(J,\xi)$，而oJ是$o\xi$轴在坐标平面oxy上的投影. 我们知道，$(\eta,\ y)=\alpha,(\zeta,z)=\beta$. 令$\varphi$是陀螺绕 $o\xi$ 轴的转角，陀螺的角速度矢量是:

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2+\vec{\omega}_3 \tag{2.2}$$

这里$\omega_1=\dot{\alpha}$，$\omega_2=\dot{\beta}$，$\omega_3=\dot{\varphi}$. $\vec{\omega}$在惯性主轴$o\xi$，$o\eta$，$o\zeta$ 上的投影是

$$p=\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta,\ \ q=-\dot{\beta},\ \ r=\dot{\alpha}\cos\beta \tag{2.3}$$

陀螺的动能T可由下式决定:

$$2T=Cp^2+A(q^2+r^2)=C(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta)^2+A(\dot{\beta}^2+\dot{\alpha}^2\cos^2\beta) \tag{2.4}$$

陀螺的势能是

$$\Pi=mga\cos\gamma=mga\cos\alpha\cos\beta \tag{2.5}$$

这里 $\gamma=(x,\ \xi)$，以 φ，α，β 为拉格朗日坐标，我们可以写出陀螺运动的三个拉格朗日方程式，其中之一可积分一次，得到初积分

$$Cp=\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta=\text{const} \tag{2.6}$$

对应于循环坐标 φ，其余两个方程是

$$\left.\begin{aligned}&A\ddot{\beta}+A\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta-C\omega\dot{\alpha}\cos\beta=mga\sin\beta\cos\alpha\\&A\ddot{\alpha}\cos\beta-2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta+C\omega\dot{\beta}=mga\sin\alpha\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

这两个方程可以看作干扰 α，β，$\dot{\alpha}$，$\dot{\beta}$ 的四个一阶的受干扰的运动微分方程. 而零解

$$\alpha=\beta=\dot{\alpha}=\dot{\beta}=0 \tag{2.8}$$

对应于未受干扰运动.

(2.7)的两个初积分是

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}A(\dot{\alpha}^2\cos^2\beta+\dot{\beta}^2)+mga(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const} \\ W_2 &= A(\dot{\beta}\sin\alpha-\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta\sin\beta)+C\omega(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const} \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

由于W_1和W_2都不是定号函数，按照Четаев的办法，我们构成 Ляпунов 函数如下：

$$V=W_1-\lambda W_2=\text{const} \tag{2.10}$$

这里λ是一个常数，选得使V成为定号函数．现在我们将给出可以选到λ的条件从而得到稳定的充分条件．

函数V展成 α，β，$\dot{\alpha}$，$\dot{\beta}$的幂级数：

$$V=V_2+V_4+V^* \tag{2.11}$$

这里

$$V_2=\frac{1}{2}[A\dot{\alpha}^2+2A\lambda\dot{\alpha}\beta+(C\omega\lambda-mga)\beta^2]$$

$$+\frac{1}{2}[A\dot{\beta}^2-2A\lambda\dot{\beta}\alpha+(C\omega\lambda-mga)\alpha^2] \tag{2.12}$$

$$V_4=\left[mga\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{4}+\frac{\alpha^4}{24}+\frac{\beta^4}{24}\right)-\frac{1}{2}A\dot{\alpha}^2\beta^2\right]$$

$$-\lambda\left[A\left(\frac{\dot{\alpha}\beta\alpha^2}{2}+\frac{2\dot{\alpha}\beta^3}{3}-\frac{\alpha^3\dot{\beta}}{6}\right)+C\omega\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{4}+\frac{\alpha^4+\beta^4}{24}\right)\right] \tag{2.13}$$

其中V^*是六次及六次以上诸项的总和．当条件

$$C^2\omega^2>4Amga \tag{2.14}$$

成立时，我们只要选取 λ，使得

$$\frac{C\omega-\sqrt{C^2\omega^2-4Amga}}{2A}<\lambda<\frac{C\omega+\sqrt{C^2\omega^2-4Amga}}{2A} \tag{2.15}$$

这时就有

$$A\lambda^2-C\omega\lambda+mga<0 \tag{2.16}$$

或

$$\begin{vmatrix} A & \pm A\lambda \\ \pm A\lambda & C\omega\lambda-mga \end{vmatrix}>0 \tag{2.17}$$

为确定计，我们选取

$$\lambda=\frac{C\omega}{2A} \tag{2.18}$$

显然是满足(2.15)式的，这样，根据Sylvester定理和判定函数定号性的引理[14]，V是关于变量$\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta}$的定正函数．同时由于$V$是方程组的初积分，所以$\frac{dV}{dt}=0$．根据Ляпунов关于运动稳定的定理，可知这时运动是稳定的，而(2.14)式是运动稳定的充分条件．这就是Четаев 得出的结果．

但是当

$$C^2\omega^2 = 4A\,mga \tag{2.19}$$

时，我们不能选到λ使得V_2成为定正函数，只能选λ使V_2成为常正. 此时由

$$A\lambda^2 - C\omega\lambda + mga = 0 \tag{2.20}$$

可得

$$\lambda = \frac{C\omega}{2A} \tag{2.21}$$

其形式与(2.14)式相同，但由于ω的数值不同，因而(2.14)式与(2.21)式中的λ的数值也是不同的. 将(2.21)式代入(2.12)式可得

$$V_2 = \frac{1}{2}A\left(\dot{\alpha} + \frac{C\omega\beta}{2A}\right)^2 + \frac{1}{2}A\left(\dot{\beta} - \frac{C\omega\alpha}{2A}\right)^2 \tag{2.22}$$

这是常正函数，当

$$\left.\begin{aligned} f_1(\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta}) &= \dot{\alpha} + \frac{C\omega\beta}{2A} = 0 \\ f_2(\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta}) &= \dot{\beta} - \frac{C\omega\alpha}{2A} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

时，$V_2 = 0$；当上式不成立而$\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta}$不全为零时，$V_2$永远为正. 今将

$$\dot{\alpha} = -\frac{C\omega\beta}{2A},\quad \dot{\beta} = \frac{C\omega\alpha}{2A} \tag{2.24}$$

代入（2.13）式，并利用（2.19）式可得

$$V_4 = \frac{mga}{8}(\alpha^2 + \beta^2)^2 \tag{2.25}$$

显然，此时V_4总取正值，且仅在$\alpha = \beta = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$时等于零. 所以$V$满足（一）的定理1的条件，从而得出结论，$V$是定正函数. 当$C^2\omega^2 = 4Amga$时运动是稳定的. 这样就证明，陀螺轴运动条件稳定的充分条件是

$$C^2\omega^2 \geqslant 4Amga \tag{2.26}$$

容易证明，当$C^2\omega^2 < 4Amga$时，（2.7）式的第一次近似方程的特征方程将具有带正实部的根，这样，根据Ляпунов的第一次近似理论[14]，知道这时运动是不稳定的. 最后得到结论：睡陀螺轴运动条件稳定的必充条件是

$$C^2\omega^2 \geqslant 4Amga \tag{2.27}$$

参 考 文 献

1. Маневский, Н. В., *О Влиянии Вращательного Движения на Полет Продолговатых Снарядов в Воздухе*, Спб., (1865).
2. Routh, E. J., *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Dover publication, (1955).
3. Жуковский, Н. Е., О Прочности Движения, (1882), Собр. Соч. 1, ОГИЗ, (1948), 67—160.
4. Klein, F., On the stability of a sleeping top, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Ser. 2, Ⅲ, (1897), 129—132, 292.
5. Grammel, R., Die Stabilität der Standeschen Kreiselbewegungen *Mathematische Zeitschrift*, 6, (1920), 124—142.
6. Synge, J. L. and Griffith, B. A., *Principles of Mechanics*, second edition, (1949), 440.
7. Synge, J. L., Classical Mechanics, Handbuch der Physik, Band Ⅲ/Ⅰ (1960), 90.
8. Четаев, Н. Г., Об устойчивости вращательных движений, Снаряда, *ПММ*, 10, 1, (1946), 135—138.
9. Четаев, Н. Г., Об устойчивости вращания твердого тела с одной неподвижной точкой в случае лагранжа, *ПММ*, 18, 1, (1954), 123—124.
10. 戈正铭, Lagrange 铅垂陀螺运动无条件稳定的充分必要条件, 上海交通大学学报, 1979年, 第1期.
11. Лойцянский, Л. Г., Лурье, А. И., *Курс Теоретический Механики*, (1948), 中译本(高等教育出版社) 下册第二分册, 372—373; 1955 年俄文本 (Гостехиздат出版) 下册, 572—573.
12. Румянцев, В. В., К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки, *ПММ*, 19, 3, (1957), 339—346.
13. Магнус, К., Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе, *ПММ*, 22, 2, (1958), 173—178.
14. Малкин, И. Г., *Теория Устойчивости Движения*, Наука, Москва, (1966).

Some Theorems for Determining the Definiteness and Changeability of Sign of Functions and the Application to the Conditional Stability of the Motion of the Axis of a Sleeping Top

Ge Zheng-ming

(Teaching and Research Section of General Mechanics, Department of Engineering Mechanics, Shanghai Chiao-Tung University, Shanghai)

Abstract

This paper gives some theorems for determining the definiteness and changeability of sign of functions as well to the application to the axis of a sleeping top. The necessary and sufficient condition of the conditional stability of the motion is obtained, which coincides with that of the stability of nutation angle and also with that of the stability of total variables in the equations of motion.