应用数学和力学，第2卷第5期（1981年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

圆板非线性理论的一种摄动解

周 焕 文

（武汉大学数学系，1981年1月29日收到）

摘 要

用摄动法分析了几种非线性圆板问题，其所选用的摄动参数，不是某一预先给定的力学量，而是从某些方程中求解得出，这个方法是钱伟长以中心挠度为参数的摄动法的延伸.

一、前 言

用摄动方法求解非线性问题时，摄动参数的合理选择是很重要的．在1947年，钱伟长在求解圆板大挠度问题时，提出了一个以中心挠度为参数的摄动法[1]．这个方法在固体力学中得到很多的应用，特别是求解非线性问题时十分有效[2],[3]．最近，钱伟长在著作[9]中指出：中心挠度并非唯一的摄动参数，它对均匀载荷的问题而言，似乎是较好的，但是它有中心区域凹陷的限制．有没有其它的参数的选择，能扩大这个选用范围呢？

本文是在这个提示之下，用待定参数法选择摄动参数，避免挠度函数在圆板中心区域出现凹陷.

二、基 本 方 程

我们讨论受均布荷载q作用下的等厚圆薄板，它的平衡方程可以写成[4]：

$$r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2N_r\right)+\frac{Eh}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2=0 \tag{2.1,a}$$

$$D\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw}{dr}=N_r\frac{dw}{dr}+\frac{1}{2}qr \tag{2.1,b}$$

$$N_t=r\frac{dN_r}{dr}+N_r \tag{2.1,c}$$

这是关于横向挠度w与径向薄膜应力N_r的非线性常微分方程组，其中的h是板的厚度，E是弹性模量，D是抗弯刚度，

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

μ是泊松比.

为了唯一确定上述方程的解，还需给出边界条件．我们讨论下面两类：

（Ⅰ）$q \neq 0$

边界条件为[5]：

当$r=a$时，

$$w=0 \tag{2.2,a}$$

$$D\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right)=-k_2\frac{dw}{dr} \tag{2.2,b}$$

$$N_r=-\frac{k_1}{Eh}\left[r\frac{dN_r}{dr}+(1-\mu)N_r\right] \tag{2.2,c}$$

当$r=0$时，

$$N_r\text{为有限值，} \tag{2.2,d}$$

$$\frac{dw}{dr}\text{为有限值．} \tag{2.2,e}$$

在上述条款中，k_1与k_2是给定的常数：

（1）$k_1=\infty$，$k_2=\infty$，固定夹紧； (2.3,a)

（2）$k_1=0$，$k_2=\infty$，可移夹紧； (2.3,b)

（3）$k_1=\infty$，$k_2=0$，简单铰链支承； (2.3,c)

（4）$k_1=0$，$k_2=0$，简单支承． (2.3,d)

（Ⅱ）$q=0$

边界条件给定为：

当$r=a$时，

$$w=0 \tag{2.4,a}$$

$$-D\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right)=M \tag{2.4,b}$$

$$N_r=0 \tag{2.4,c}$$

当$r=0$时，

$$N_r\text{为有限值；} \tag{2.4,d}$$

$$\frac{dw}{dr}\text{为有限值．} \tag{2.4,e}$$

现在，对上述方程及边界条件中的一些力学量进行无量纲化变换，令

$$x=r^2/a^2 \tag{2.5,a}$$

$$\beta=\sqrt{12(1-\mu^2)}\,\frac{w}{h} \tag{2.5,b}$$

$$F=\frac{a^2}{D}N_r \tag{2.5,c}$$

式中a是圆板半径．

变后的方程（2.1,a）与（2.1,b）可以写成：

$$\frac{d^2}{dx^2}x\frac{d\beta}{dx}=\frac{1}{4}F\frac{d\beta}{dx}+p \tag{2.6,a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}xF+\frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2=0 \tag{2.6,b}$$

这里的p是无量纲荷载，

$$p=\frac{qa^4}{16Eh^4}\left[12\left(1-\mu^2\right)\right]^{\frac{3}{2}} \tag{2.7}$$

变换后的边界条件为：

（Ⅰ） $p\neq0$

当$x=1$时，

$$\beta=0 \tag{2.8,a}$$

$$\frac{d\beta}{dx}+k_\beta\frac{d^2\beta}{dx^2}=0 \tag{2.8,b}$$

$$F+k_F\frac{dF}{dx}=0 \tag{2.8,c}$$

其中

$$k_\beta=\frac{2}{1+\mu+k_2a/D} \tag{2.9,a}$$

$$k_F=\frac{2}{1-\mu+Eh/k_1} \tag{2.9,b}$$

当$x=0$时，

$$F\text{为有限值；} \tag{2.8,d}$$

$$\frac{d\beta}{dx}\text{为有限值.} \tag{2.8,e}$$

（Ⅱ） $p=0$

当$x=1$时，

$$\beta=0 \tag{2.10,a}$$

$$2\frac{d^2\beta}{dx^2}+(1+\mu)\frac{d\beta}{dx}=m \tag{2.10,b}$$

$$F=0 \tag{2.10,c}$$

其中

$$m=-\frac{a^2\sqrt{12(1-\mu^2)}}{2Dh}M \tag{2.11}$$

当$x=0$时，

$$F\text{为有限值，} \tag{2.10,d}$$

$$\frac{d\beta}{dx}\text{为有限值.} \tag{2.10,e}$$

以下各小节的内容将是在边界条件(2.8)—(2.11)限制下对方程组（2.6）求其摄动解.

三、固定夹紧圆板

考虑方程（2.6,a）与(2.6,b)，令

$$\theta=\frac{d\beta}{dx} \tag{3.1}$$

则方程组（2.6）变成

$$\frac{d^2}{dx^2}x\theta = \frac{1}{4}F\theta+p \tag{3.2,a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}xF=-\frac{1}{2}\theta^2 \tag{3.2,b}$$

取常数p及函数θ与F的渐近式为

$$p=\alpha_1\varepsilon+\alpha_3\varepsilon^3+\alpha_5\varepsilon^5+\cdots\cdots \tag{3.3,a}$$

$$\theta=\theta_1\varepsilon+\theta_3\varepsilon^3+\theta_5\varepsilon^5+\cdots\cdots \tag{3.3,b}$$

$$F=F_2\varepsilon^2+F_4\varepsilon^4+F_6\varepsilon^6+\cdots\cdots \tag{3.3,c}$$

上述式中的ε是一个待定参数，当α_1、α_3……等常数被确定之后，ε的值就可以从方程(3.3,a)中求解得出.

将渐近式（3.3）代入微分方程组（3.2），比较ε的幂，令同幂的系数相等，得到

$$\frac{d^2}{dx^2}x\theta_{2i-1}=\frac{1}{4}\sum_{k=0,1,2}^{i-1}F_{2k}\theta_{2(i-k)-1}+\alpha_{2i-1} \tag{3.4,a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}xF_{2i}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1,2}^{i}\theta_{2k-1}\theta_{2(i-k)+1} \tag{3.4,b}$$

$$i=1,2,3,\cdots\cdots$$

$$F_0\equiv 0 \tag{3.4,c}$$

这一节讨论固定夹紧边界条件，其渐近式是：

当$x=1$时，

$$\theta_{2i-1}=0 \tag{3.5,a}$$

$$2\frac{dF_{2i}}{dx}+(1-\mu)F_{2i}=0 \tag{3.5,b}$$

当$x=0$时，

θ_{2i-1}为有限的， (3.5,c)

F_{2i}为有限的. (3.5,d)

根据边界条件，可从方程组（3.4）中求出函数θ_{2i-1}与F_{2i}，例如

$$\theta_1=\frac{1}{2}\alpha_1(x-1) \tag{3.6,a}$$

$$F_2=\frac{5-3\mu}{96(1-\mu)}\alpha_1^2-\frac{1}{8}\alpha_1^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{12}x^3\right) \tag{3.6,b}$$

$$\theta_3=-\frac{1}{2}\alpha_3+\frac{(77-37\mu)\alpha_1^3}{46080(1-\mu)}+\frac{1}{2}\alpha_3x-\frac{\alpha_1^3}{96(1-\mu)}\left[\frac{5-3\mu}{16}x-\frac{11-9\mu}{48}x^2+\frac{5-5\mu}{48}x^3-\frac{1-\mu}{32}x^4+\frac{1-\mu}{240}x^5\right] \tag{3.6,c}$$

$$F_4=\frac{1}{4}\alpha_1\alpha_3\left[\frac{5-3\mu}{12(1-\mu)}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{12}x^3\right]$$

$$-\frac{\alpha_1^4}{192(1-\mu)}\left[\frac{2109-2260\mu+599\mu^2}{40320(1-\mu)}-\frac{77-37\mu}{960}x\right.$$

$$+\frac{227-127\mu}{2880}x^2-\frac{13-9\mu}{288}x^3+\frac{8-7\mu}{480}x^4-\frac{13-13\mu}{2880}x^5$$

$$\left.+\frac{17-17\mu}{20160}x^6-\frac{1-\mu}{23440}x^7\right] \tag{3.6,d}$$

$$\theta_5=-\frac{1}{2}\alpha_5+\frac{77-37\mu}{15360(1-\mu)}\alpha_1^2\alpha_3-\frac{403865-376491\mu+89050\mu^2}{20321280}\alpha_1^5$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_5x-\frac{3}{64}\alpha_1^2\alpha_3\left[\frac{5-3\mu}{24(1-\mu)}x-\frac{11-9\mu}{72(1-\mu)}x^2+\frac{5}{72}x^3-\frac{5}{240}x^4+\frac{1}{360}x^5\right]$$

$$+\frac{\alpha_1^5}{1536(1-\mu)}\left\{\frac{6913-7432\mu+1975\mu^2}{161280(1-\mu)}x-\frac{9585-12592\mu+3875\mu^2}{241920(1-\mu)}x^2\right.$$

$$+\frac{1795-2730\mu+955\mu^2}{69120(1-\mu)}x^3-\frac{3015-1955\mu}{230400}x^4+\frac{1677-1323\mu}{345600}x^5$$

$$\left.-\frac{327-303\mu}{241920}x^6+\frac{643-643\mu}{2257920}x^7-\frac{235-235\mu}{5806080}x^8+\frac{10-10\mu}{3628800}x^9\right\} \tag{3.6,e}$$

上述式中的α_1、α_3与α_5是待定的量．我们令函数θ_3的表示式中的常数项为零，用以决 定α_3；令函数θ_5的表示式中的常数项为零，用以决定α_5，即

$$\alpha_3=\frac{77-37\mu}{23040(1-\mu)}\alpha_1^3 \tag{3.7.a}$$

$$\alpha_5=\frac{117887-124933\mu+31422\mu^2}{15571353600(1-\mu^2)}\alpha_1^5 \tag{3.7.b}$$

将（3.7,a）与（3.7,b）代入（3.3,a），得到

$$p=\alpha_1\varepsilon+\frac{77-37\mu}{23040(1-\mu)}\alpha_1^3\varepsilon^3+\frac{117887-124933\mu+31422\mu^2}{15571353600(1-\mu)^2}\alpha_1^5\varepsilon^5 \tag{3.8}$$

同样，代入(3.3,b)，并积分一次，得到

$$\beta(x)=\beta(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\alpha_1\varepsilon-\frac{1}{96(1-\mu)}\left[\frac{73-53\mu}{960}x^2-\frac{11-9\mu}{144}x^3\right.$$

$$\left.+\frac{5-5\mu}{192}x^4-\frac{1-\mu}{160}x^5+\frac{1-\mu}{1440}x^6\right]\alpha_1^3\varepsilon^3-\left[\frac{206151-272989\mu+93326\mu^2}{435997900800(1-\mu)^2}x^2\right.$$

$$+\frac{1383-2084\mu+757\mu^2}{2229534720(1-\mu)^2}x^3-\frac{32-51\mu+20\mu^2}{21233664(1-\mu)^2}x^4+\frac{93-70\mu}{88473600(1-\mu)}x^5$$

$$-\frac{723-606\mu}{1592524800(1-\mu)}x^6+\frac{327-303\mu}{2601123840(1-\mu)}x^7-\frac{643-643\mu}{27745320960(1-\mu)}x^8$$

$$\left.+\frac{235-235\mu}{80263249920(1-\mu)}x^9-\frac{10-10\mu}{55738368000(1-\mu)}x^{10}\right]\alpha_1^5\varepsilon^5 \tag{3.9}$$

其中

$$\beta(0)=\frac{1}{4}\alpha_1\varepsilon+\frac{58-38\mu}{276480(1-\mu)}\alpha_1{}^3\varepsilon^3+\frac{71331887-91019479\mu+29273168\mu^2}{247210809753600(1-\mu)^2}\alpha_1{}^5\varepsilon^5 \tag{3.10}$$

而$\alpha_1\varepsilon$的值可从（3.8）中求出.

值得指出，利用本文的方法来选择α_3、α_5……等等的值时，可使挠度函数w/h在板中心不出现凹陷．这是因为，我们在决定α_3、α_5时，是令θ_3与θ_5的常数项为零，这个办法同样适用于决定α_7、α_9,…….因此，θ_3、θ_5、θ_7、……的常数项均为零．如果将诸θ_i代入(3.3,b)，则得到

$$\theta=-\frac{1}{2}\alpha_1\varepsilon+xf(\varepsilon,x) \tag{3.11}$$

这里的$f(\varepsilon,\ x)$是关于ε与x的正幂级数．如果对上式积分一次，则有

$$\beta(x)=\beta(0)-\frac{1}{2}\alpha_1\varepsilon x+x^2\varphi(\varepsilon,x) \tag{3.12}$$

此处的$\varphi(\varepsilon,x)$是关于ε与x的正升幂级数．将（2.2,c）代入(2.5,b)，并利用(2.5,a)，得到

$$\frac{w}{h}=\frac{w(0)}{h}-\frac{\alpha_1\varepsilon}{2\sqrt{12(1-\mu^2)}}\frac{r^2}{a^2}+\frac{1}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\frac{r^4}{a^4}\varphi\left(\varepsilon,\frac{r^2}{a^2}\right) \tag{3.13}$$

从这里很显然看出，w/h对r/a的一次导数是在中心点（$r=0$）为零，二次导数在中心点小于零，这就说明w/h在中心点具有极大值，即是说不出现凹陷．

四、一些受均布荷载作用的圆板的中心挠度和载荷的关系

在文献[7]与[6]中，讨论了圆板在均布载荷作用下的中心挠度和载荷的关系，把均布载荷q与中心挠度$w(0)/h$之间的近似关系写成如下的形式：

$$B\frac{qa^4}{Eh^4}=\frac{w(0)}{h}+A\left[\frac{w(0)}{h}\right]^3 \tag{4.1}$$

对于不同的边界条件，A与B取不同的值．当采用本文的方法选择α_3、α_5、α_7……等等的值时，对于固定夹紧边界，通过（3.8）与（3.10），可以求得

$$B=\frac{3}{16}(1-\mu^2) \tag{4.2,a}$$

$$A=\frac{1+\mu}{360}(173-73\mu) \tag{4.2,b}$$

对于可移夹紧边界，用同样的办法，可以求得

$$p=\alpha_1\varepsilon+\frac{37}{23040}\alpha_1{}^3\varepsilon^3 \tag{4.3,a}$$

与

$$\beta(0)=\frac{1}{4}\alpha_1\varepsilon+\frac{38}{276480}\alpha_1{}^3\varepsilon^3 \tag{4.3,b}$$

从而求得

$$B=\frac{3}{16}(1-\mu^2) \tag{4.4,a}$$

$$A=\frac{73}{360}(1-\mu^2) \tag{4.4,b}$$

以上两种结果与用钱伟长以中心挠度为摄动参数的摄动法求得的结果是完全相同的[1],[3].

对于简单铰链支承与简单支承边界，我们只给出A、B的数值结果，分别是：
$\mu=0.3$时，

$$A=1.8958 \qquad 0.2872 \tag{4.5,a}$$
$$B=0.6956 \qquad 0.6956 \tag{4.5,b}$$

$\mu=0.25$时，

$$A=1.9039 \qquad 0.3025 \tag{4.6,a}$$
$$B=0.7383 \qquad 0.7383 \tag{4.6,b}$$

在这些结果中，简单铰链支承情况与文献[7]用钱伟长摄动法得的结果相同；简单支承情况，B的数值与文献[7]的计算值是相同的，但A的数值不同，文献[7]中算得的A值是$A=0.2986(\mu=0.3)$，$A=0.3129(\mu=0.25)$.

五、沿边界均匀分布力矩的圆板

在方程（2.6,a）中，设

$$p=0 \tag{5.1}$$

同时，令

$$\theta=\frac{d\beta}{dx} \tag{5.2}$$

则方程组（2.6）变成

$$\frac{d^2}{dx^2}x\theta=\frac{1}{4}F\theta \tag{5.3,a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}xF=-\frac{1}{2}\theta^2 \tag{5.3,b}$$

相应的边界条件(2.10,a)—(2.10,e)是：
当$x=1$时，

$$\beta=0 \tag{5.4,a}$$

$$2\frac{d\theta}{dx}+(1+\mu)\theta=m \tag{5.4,b}$$

$$F=0 \tag{5.4,c}$$

当$x=0$时，

$$F,\ \theta\text{取有限值}. \tag{5.4,d}$$

现在，我们假定常数m及函数θ与F取渐近式：

$$m=m_1\varepsilon+m_3\varepsilon^3+m_5\varepsilon^5+\cdots\cdots \tag{5.5,a}$$

$$\theta=\theta_1\varepsilon+\theta_3\varepsilon^3+\theta_5\varepsilon^5+\cdots\cdots \tag{5.5,b}$$

$$F=F_2\varepsilon^2+F_4\varepsilon^4+F_6\varepsilon^6+\cdots\cdots \tag{5.5,c}$$

上述式中的参数ε是待定的，当m_1、m_3、……被确定之后，参数ε可以从方程（5.5,a）中求解得出.

将渐近式（5.5,a）—（5.5,c）代入微分方程组（5.3）及边界条件(5.4)，比较参数ε的幂，令同幂的系数相等，我们得到微分方程组：

$$\frac{d^2}{dx^2}x\theta_{2i-1}=\frac{1}{4}\sum_{R=0,1,2}^{i-1}F_{2k}\theta_{2(i-k)-1} \tag{5.6,a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}xF_{2i}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1,2}^{i}\theta_{2k-1}\theta_{2(i-k)+1} \tag{5.6,b}$$

$$i=1,2,3,\cdots\cdots$$

$$F_0\equiv 0 \tag{5.6,c}$$

边界条件：

当$x=1$时，

$$\beta_i=0 \tag{5.7,a}$$

$$2\frac{d\theta_i}{dx}+(1+\mu)\theta_i=m_i \tag{5.7,b}$$

$$F_j=0 \tag{5.7,c}$$

当$x=0$时，

$$F_j,\ \theta_i\text{取有限值}. \tag{5.7,d}$$

$(i=1,3,5,\cdots\cdots;\ j=2,4,6,\cdots\cdots)$

根据边界条件，可从方程组（5.6）中求出函数θ_{2i-1}与F_{2i}，例如

$$\theta_1=\frac{m_1}{1+\mu} \tag{5.8,a}$$

$$F_2=\frac{1}{4}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^2(1-x) \tag{5.8,b}$$

$$\theta_3=\frac{1}{16}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^3\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2\right) \tag{5.8,c}$$

$$F_4=\frac{1}{64}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^4\left[\frac{5}{18}-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{18}x^3\right] \tag{5.8,d}$$

$$\theta_5=\frac{1}{256}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^5\left[\frac{5}{36}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{90}x^4\right] \tag{5.8,e}$$

$$F_6=\frac{1}{1024}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^6\left[\frac{713}{5400}-\frac{5}{54}x^2-\frac{5}{72}x^3+\frac{1}{30}x^4-\frac{1}{300}x^5\right] \tag{5.8,f}$$

$$\theta_7=\frac{1}{4096}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^7\left[\frac{713}{10800}x+\frac{5}{108}x^2-\frac{7}{432}x^3-\frac{29}{1440}x^4\right.$$
$$\left.+\frac{19}{2700}x^5-\frac{64}{1134}x^6\right] \tag{5.8,g}$$

同第三节一样，上述式子的求得，是利用了θ_3、θ_5与θ_7的表示式中的常数项为零，并利用它来决定m_3、m_5与m_7，

$$m_3=\frac{2+\mu}{48}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^3 \tag{5.9,a}$$

$$m_5=\frac{7+3\mu}{5120}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^5 \tag{5.9,b}$$

$$m_7=\frac{92957+37397\mu}{1857945600}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^7 \tag{5.9,c}$$

将这些值代入(5.5,a)，得到

$$m=(1+\mu)\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)\varepsilon+\frac{2+\mu}{48}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^3\varepsilon^3+\frac{7+3\mu}{5120}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^5\varepsilon^5+\frac{92957+37397\mu}{1857945600}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^7\varepsilon^7+\cdots \tag{5.9,d}$$

同第三节的理由一样，利用本文的方法来决定m_3、m_5与m_7等值时，可使挠度函数w/h在板中心不出现凹陷．

将θ_i代入(5.5,b)，并积分一次，再利用边界条件(5.7,a)，可以得到

$$-\beta(0)=\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)\varepsilon+\frac{7}{576}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^3\varepsilon^3+\frac{283}{921600}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^5\varepsilon^5+\frac{52651}{5202247680}\left(\frac{m_1}{1+\mu}\right)^7\varepsilon^7+\cdots\cdots \tag{5.10}$$

从（5.9,d）与（5.10）两式中消去参数ε，可以得到边界分布折合弯矩（$-m$）与折合中心挠度$\beta(0)$的关系：

$$-m=(1+\mu)\beta(0)+\frac{17+5\mu}{576}[\beta(0)]^3-\frac{11+26\mu}{691200}[\beta(0)]^5+\frac{47813+35129\mu}{78033715200}[\beta(0)]^7 \tag{5.11}$$

如果将（5.11）中的有关量值变换成文献[8]的符号，则本文的（5.11）相当于[8]中的(4.4)．两式比较，包括关于$\beta(0)$五次幂在内的前三项是完全相同的，而七次幂项则是不相同．

参考文献

1. Chien W. Z. (钱伟长), Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, 7, 2, (1947), 102—113.
2. Schmidt, R., Finite deflections of a loosely clamped circular plate loaded at its center, *Industrial Mathematics*, 23, Part 1, (1973), 45—51.
3. Schmidt, R., Moderately large deflection of a loosely clamped circular plate under a uniformly distributed load, *Industrial Mathematics*, 25, Part 1, (1975), 17—28
4. 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅，《弹性圆薄板大挠度问题》，中国科学院出版，（1954年）．
5. 钱伟长、叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，第10卷第3期，（1954年9月）．

6. Timoshenko. S. and Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. (1959).
7. Schmidt, R., Several perturbation solutions in the nonlinear theory of circular plates and membranes. *Industrial Mathematics*, 25, Part 2, (1975).
8. 叶开沅、刘人怀、张传智、徐一帆，弹性圆底扁球壳在边缘均布力矩作用下的非线性稳定问题，应用数学和力学，第1卷第1期，（1980年）.
9. 钱伟长，《奇异摄动理论》.《即将出版》

A Perturbation Solution in the Nonlinear Theory of Circular Plates

Chou Huan-wen
(*Wuhan University, Wuhan*)

Abstract

In this paper, we analyzed some problems of nonlinear circular plates by means of perturbation method. The perturbation parameters chosen here are obtained from solving the equations and are not certain mechanical quantities given precedently. This is an extension of W. Z. Chien's perturbation method, which uses the central deflection as the perturbation parameter.