应用数学和力学，第2卷第5期（1981年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

用于枪炮射表整体解析逼近的一列基函数*

黄文奇

（华中工学院，1980年5月5日收到）

摘要

本文提出用于枪炮射表整体解析逼近的一列基函数．在一个具体型号的火炮的射表上作出的数值试验表明效果良好．这列基函数对于其它型号枪炮射表的逼近应该同样有参考价值．

为得出这列基函数而提出的开拓与不变性的分析方法，在数学模型工作中对于其它许多表函数的整体解析逼近应该同样有参考价值．

电子计算机可以用于控制枪炮作自动瞄准．这里的一个基本问题是对于射表的逼近．射表是一张以数值形式给出的二元函数表．自变量为水平距离 d 及垂直距离 H．函数为高角 α．它指出，如欲击中水平距离为 d，垂直高度为 H 的目标，为了克服重力的影响，枪炮管的仰角应比目标的高低角 $\varepsilon=\sin^{-1}\dfrac{H}{\sqrt{d^2+H^2}}$ 高出多少．（见图1）

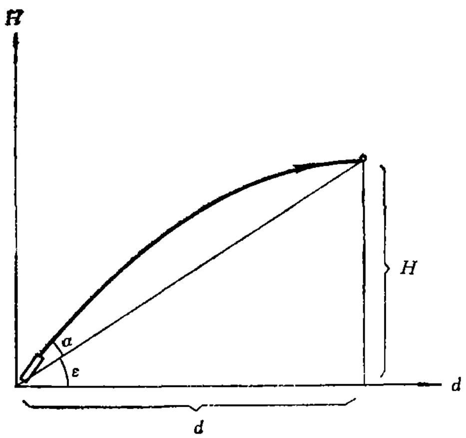

图1

由于空气阻力与重力的交互作用，在客观上函数 $\alpha(d,H)$ 不能由理论力学算出．它的形式异常复杂．

表函数 $\alpha(d,H)$ 是由整理实验数据而来，数据量很大．由于不能将它储存入计算机，因此希望能找到它的一个近似的解析表达式．当然，我们希望这是一个精度很高的整体的解析表达式．

显然，对于每个具体型号的枪炮而言，函数 $\alpha(d,H)$ 都是充分光滑的．因此，根据函数逼近理论中的 Weierstrass 定理，似乎取函数级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij}d^iH^j \tag{1}$$

---

* 李灏推荐．

中的有限项即可作为表函数的近似解表达式．它是整体的．同时，在适当地选取诸项 d^iH^j，并配以适当的相应系数 C_{ij} 后，逼近的精度亦应是相当高的．其中系数 C_{ij} 可按最小二乘法，由表函数 $\alpha(d,H)$ 的数据得出．

然而实际计算发现，在函数 $\alpha(d,H)$的形式十分复杂，d、H 的数据跨度又大的情况下，舍入误差的存在使得这个考虑不能实现．一个仅具有理论上的完备性的基函数系，在逼近中需要很多项才能到达必要的精度．而项度一多则方次必高，使数据的跨度变得越来越大．于是舍入误差的积累变得越来越严重，以致于在远远还未达到必要的逼近精度以前，无论再怎样添加（1）式中的函数项，逼近的精度已不能再有所提高了．

为了改变这种状况，有如下两条出路：一、分片逼近；（这样作，肯定可以提高逼近的精度，但是所得出的表达式在使用的时候计算过程变得复杂，同时需要事先储存入计算机中的数据量也相应地增加．）二、分析表函数 $\alpha(d,H)$ 的性质，寻求较为贴切的逼近基函数系以提高逼近的效率．这种方案一般很难实现．寻求这种‘贴切’的基函数列需要有很好的针对性与相当的技巧．然而，有时也还是有若干考虑能有助于实现这个方案．这种方案一旦实现，效果必然会是相当理想的．一种考虑就是分析同类数学模型中普遍存在的光滑性，对称性，周期性，相似性，守恒性等等，然后利用这些分析出来的性质，对基函数系加以自然的选择．

分析一张具体的表函数 $\alpha(d,H)$，其中 d、$H>0$，我们很难得出什么有用的性质．为了便于分析，我们不局限于直接考虑这个数值表函数，而先考虑这个数值表函数所要近似表现的那个客观存在的在力学上具有精确意义的函数 $\alpha(d,H)$．为了进一步分析此函数 $\alpha(d,H)$ 的性质，我们还可以想象着自然的延拓，将 d、H 开拓为可取正值亦可取负值．这种开拓，从实战角度来看，当然是毫无意义、没有价值的．我们不可能旋转炮管，使其从瞄准前方而仰过头去瞄准后方；我们更不能使炮口朝着地下．但是，在抛开具体的技术困难之后，从纯粹的数学与力学的角度考虑，这种延拓是具有确切含义的．（见图 2）

将延拓后的 d 及 H 分别记为 x 与 z，则原来的表函数 $\alpha(d,H)$ 就是现在这个理论上的函数 $\alpha(x,z)$在第一象限的一张数值表．

对于函数 $\alpha(x,z)$ 我们容易分析出它的周性期与对称性，同时它仍然保持充分的光滑性．

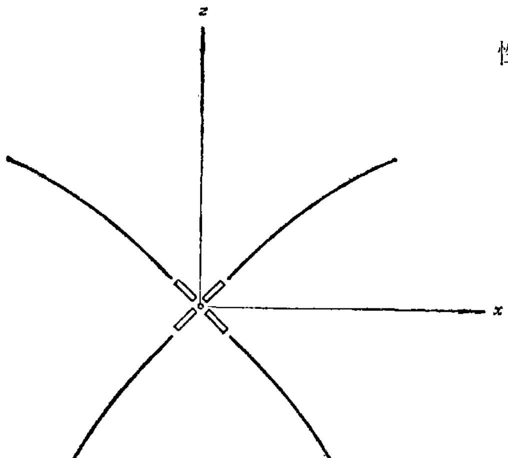

图 2

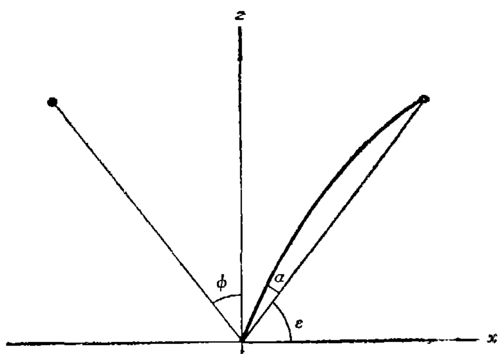

图 3

利用这些性质．我们即可选取一列较为“贴切”的逼近基函数．

为便于分析，在（x,z）平面上引进变量 D、ϕ（见图3） 其中$D=\sqrt{x^2+z^2}$，即目标至炮位的距离；ϕ 为从 z 轴方向右旋至目标矢径的角度．在此参数系中，α 为欲击中目标炮管须自目标矢径方向右旋的角度．

在这样的坐标系与参量的选取之下，我们可写出高角函数 α 的反对称性质

$$\alpha(D,\phi)=-\alpha(D,-\phi) \tag{2}$$

此种反对称性质的根源在于重力场是均匀的且其方向则沿着 z 轴的相反方向．

我们还可写出高角函数 α 的周期性

$$\alpha(D,\phi)=\alpha(D,\phi+2\pi) \tag{3}$$

此周期性质的根源纯粹基于参数系统的合适选取．

由（2）、（3）二式，利用 Fourier 理论可得展式

$$\alpha(D,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(D)\cdot\sin n\phi \tag{4}$$

其中 $a_n(D)$ 表示 D 的一元函数．

引进高低角 $\varepsilon=\phi+\frac{\pi}{2}$．它的几何意义为自 x 轴正向右旋至目标矢径的角度．认定α为D、ε的函数，于是由（4）式得出

$$\alpha(D,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}[b_{2i-1}(D)\cos(2i-1)\varepsilon+b_{2i}(D)\sin 2i\varepsilon] \tag{5}$$

其中 $b_{2i-1}(D)$，$b_{2i}(D)$表示 D 的一元函数．

注意（5）式中的 $\cos(2i-1)\varepsilon$ 与 $\sin 2i\varepsilon$ 都可表成如下形式

$$\cos\varepsilon\cdot\left[C_0+\sum_{j=1}^{n}C_j\sin^j\varepsilon\right] \tag{6}$$

其中 n 为正整数，C_0、C_j 为实的绝对常数．

再利用 Weierstrass 逼近定理，将（5）式中的 $b_{2i-1}(D)$与 $b_{2i}(D)$写成 D 的级数形式，于是得出

$$\alpha(D,\varepsilon)=\cos\varepsilon\cdot\sum_{i,j=0}^{\infty}C_{ij}D^i\sin^j\varepsilon \tag{7}$$

其中 C_{ij} 为实常数．

于是．逼近射表的基函数列可选为

$$\cos\varepsilon\cdot D^i\cdot\sin^j\varepsilon,\quad i、j=0,1,2,\cdots \tag{8}$$

再回头考虑第一象限，按定义

$$D=\sqrt{d^2+H^2} \tag{9}$$

$$\cos\varepsilon=\frac{d}{\sqrt{d^2+H^2}} \tag{10}$$

$$\sin\varepsilon=\frac{H}{\sqrt{d^2+H^2}} \tag{11}$$

于是，所选逼近射表的基函数列为

$$\frac{dH^{i}}{(d^{2}+H^{2})^{\frac{1}{2}(j+1-i)}}, \quad i,j=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

实际计算表明，这是一列效率相当高的基函数．它比（1）式中的二元多项式函数列要好得多．在所得的整体逼近的解析表达式中．函数项成几倍地减少、精度更成几十倍地提高．

曾对苏联卡斯-19式100mm口径高炮射表作过试验，基函数选（12）式中的如下8项：

i	1	2	3	4	1	2	1	2
j	0	0	0	0	1	1	2	2

所得结果函数 α 逼近误差的均方根为 0.225．α 的单位为密位．一密位为 $2\pi/6000$ 弧度、射表中 α 的最小刻度为一密位．

感谢李灏教授在本文写作过程中所给予的指教与鼓励．

A Series of Base Functions for Global Analytical Approach to Firing Table

Huang Wen-qi

(Dept. of Computer Science and Engineering, Huazhong Institute of Technology, Wuhan)

Abstract

A series of base functions has been proposed for the global analytical approach to the firing table on cannons and guns. Numerical tests on the firing table of a gun of specific model prove satisfactory, showing that these functions should also be useful in approaching to the firing table of the firearms of other models.

Methods of extension and invariability analysis developed for obtaining the base functions in question should be of value in reference to the global analytical approach to a great many other numerical functions.