应用数学和力学，第2卷第5期（1981年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

板壳塑性屈曲中某些问题*

成祥生

（同济大学，1980年4月21日收到）

摘　要

本文应用弹塑性小变形的假定，将应力与应变的关系都用变分形式相联系．简洁地导出板壳塑性屈曲的基本方程，并引入割线模量，计算较方便．

一、引　　言

对于板或壳的塑性屈曲问题，如果要严密地按照塑性数学理论去求解，至目前为止，实际上还很困难，因此很多人都将问题简化、只讨论比较简单的载荷的情况和边界条件．例如 von Kármán[1]，Shanley[2]，Bleich[3]，Gerard[4][5]，先后论述了折减模量，切线模量，割线模量的方法．Nльюшин[6][7][8] 建立了板壳塑性屈曲方面较精确的理论，并同时考虑卸载区．另外 Stowell[9]，Bijlaard[10][11][12]，Григолюк[13]，Pride 和 Heimerl[14] 都对板壳的塑性屈曲进行了研究．一般都假定材料是不可压缩的．后来 Лепик[15]，Kollbrunner[16]，高镇同[17]同时考虑材料的可压缩性，从而进行了板壳塑性屈曲的研究．本文从弹塑性小变形理论的假定出发，建立塑性应力变分和应变变分的关系，从而导出板壳塑性屈曲的基本方程．推导过程简捷，并引入割线模量，计算比较方便．

二、基本方程的推导

对于弹塑性小变形理论中的两个主要假定，我们可以用应变变分和应力变分联系起来．

（1）　应变球张量（即平均应变）的变分是弹性的，并且与应力球张量（即平均应力）的变分成正比，

$$\delta\varepsilon_m=\phi\delta\sigma_m \tag{2.1}$$

（2）　应变偏张量的变分与应力偏张量的变分相似

$$\frac{\delta\varepsilon_1-\delta\varepsilon_2}{\delta\sigma_1-\delta\sigma_2}=\frac{\delta\varepsilon_2-\delta\varepsilon_3}{\delta\sigma_2-\delta\sigma_3}=\frac{\delta\varepsilon_3-\delta\varepsilon_1}{\delta\sigma_3-\delta\sigma_1}=\psi \tag{2.2}$$

* 叶开沅推荐．

式中

$$\phi=\frac{1-2\mu}{E} \tag{2.3}$$

$$\psi=\frac{3}{2}\ \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tag{2.4}$$

$$\delta\varepsilon_m=\frac{1}{3}(\delta\varepsilon_x+\delta\varepsilon_y+\delta\varepsilon_z),\qquad \delta\sigma_m=\frac{1}{3}(\delta\sigma_x+\delta\sigma_y+\delta\sigma_z) \tag{2.5}$$

ε_i 和 σ_i 分别为应变强度和应力强度，它们由下式所定义

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}\\ \varepsilon_i&=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

从(2.2)自然有如下的应变变分与应力变分的关系

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon_x-\delta\varepsilon_m&=\psi(\delta\sigma_x-\delta\sigma_m),\quad \delta\gamma_{xy}=2\psi\delta\tau_{xy}\\ \delta\varepsilon_y-\delta\varepsilon_m&=\psi(\delta\sigma_y-\delta\sigma_m),\quad \delta\gamma_{yz}=2\psi\delta\tau_{yz}\\ \delta\varepsilon_z-\delta\varepsilon_m&=\psi(\delta\sigma_z-\delta\sigma_m),\quad \delta\gamma_{zx}=2\psi\delta\tau_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

由假定(2.1)，因应变球张量的变分 $\delta\varepsilon_m$ 是弹性的．故(2.3)式中的 ϕ 为常数，而(2.4)式的 ψ 由 σ_i，ε_i 所确定．但只知道 σ_i，ε_i 之间有确定的函数关系 $\sigma_i=\Phi(\varepsilon_i)$，函数 Φ 应通过试验去确定，但一般为了简单起见．可用单向拉伸试验或纯剪切的试验求得．若用单向拉伸试验，此时的应力状态是

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\sigma_0,\quad \sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0\\ &\varepsilon_x=\varepsilon_0,\quad \varepsilon_y=\varepsilon_z=-\mu_0\varepsilon_0,\quad \gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

将(2.8)代入(2.6)可得

$$\sigma_i=\sigma_0,\qquad \varepsilon_i=\frac{2}{3}(1+\mu_0)\varepsilon_0 \tag{2.9}$$

其中 μ_0 为超出弹性极限外的泊松比．因现在我们认为材料是可压缩的、因此它是一个变数．今引用[18]有关可压缩材料的泊松比 μ_0 与 σ_0，ε_0 的关系式

$$\mu_0=\frac{1}{2E}\left[E-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(1-2\mu)\right] \tag{2.10}$$

将(2.10)代入(2.9)可得

$$\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\frac{3\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}}{3-\phi\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}} \tag{2.11}$$

上式中 σ_i/ε_i 为 $\sigma_i=\Phi(\varepsilon_i)$ 曲线上某点的纵坐标与横坐标的比值，而 σ_0/ε_0 却是单向拉伸试验曲线 $\sigma_0=F(\varepsilon_0)$ 上某点的纵坐标与横坐标的比值，常被称为割线模量，并用符号 E_s 来表示，即

$$E_s=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \tag{2.12}$$

由以上所述，可看出 σ_i/ε_i 可以用 σ_0/ε_0 的某种函数关系(2.11)来表示，将(2.11)，(2.12)先后代入(2.4)可得

$$\psi=\frac{3-\phi E_s}{2E_s} \tag{2.13}$$

因此．对于可压缩材料的弹塑性小变形理论的物理方程(2.7)中的 ψ 可由(2.13)确定．不难看出，在弹性阶段有 $E_s=E$，于是(2.13)的 ψ 将转化为

$$\psi_e=\frac{1+\mu}{E}=\frac{1}{2G} \tag{2.14}$$

自然，(2.7)亦相应地转化为胡克定律．

三、平面应力问题

因板或壳的屈曲问题属平面应力问题，今从(2.7)就应力而解之，并利用(2.1)以消去 $\delta\varepsilon_m$，同时注意到(2.5)便得到用应力变分及应变变分表示的物理方程

$$\left.\begin{aligned}&\delta\sigma_x=a\delta\varepsilon_x+b\delta\varepsilon_y\\&\delta\sigma_y=a\delta\varepsilon_y+b\delta\varepsilon_x\\&\delta\tau_{xy}=c\delta\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中系数

$$a=\frac{4E_s}{(1+\phi E_s)(3-\phi E_s)},\ b=\frac{2(1-\phi E_s)E_s}{(1+\phi E_s)(3-\phi E_s)},\ c=\frac{E_s}{3-\phi E_s} \tag{3.2}$$

并且 a，b，c 之间存在下列简单的关系

$$c=\frac{1}{2}(a-b) \tag{3.3}$$

这和材料是各向同性时的情形一样，独立的系数只有两个．不难验证，在弹性阶段，有 $E_s=E$，并注意到(2.3)，于是 a，b，c 便转化为弹性常数

$$a_e=\frac{E}{1-\mu^2},\ b_e=\frac{\mu E}{1-\mu^2},\ c_e=\frac{E}{2(1+\mu)}=G \tag{3.4}$$

而(3.1)亦相应地转化为熟知的胡克定律

$$\left.\begin{aligned}&\delta\sigma_x=a_e\delta\varepsilon_x+b_e\delta\varepsilon_y\\&\delta\sigma_y=a_e\delta\varepsilon_y+b_e\delta\varepsilon_x\\&\delta\tau_{xy}=c_e\delta\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

必须指出(3.1)只适用于塑性阶段的加载过程，而在卸载过程中则使用(3.5)．

四、方程(3.1)、(3.5)在板壳屈曲问题中的应用

对于板或壳体，设其处于挠曲状态，诸变形的变分是与距中面的法向坐标 Z 成线性函数．

$$\delta\varepsilon_x=\delta\bar{\varepsilon}_x-Z\delta\kappa_x,\ \delta\varepsilon_y=\delta\bar{\varepsilon}_y-Z\delta\kappa_y,\ \delta\gamma_{xy}=\delta\bar{\gamma}_{xy}-2Z\delta\kappa_{xy} \tag{4.1}$$

其中 $\bar{\varepsilon}_x$，$\bar{\varepsilon}_y$，$\bar{\gamma}_{xy}$ 为中面变形，而 κ_x，κ_y，κ_{xy} 为中面外的变形，即曲率及扭率的改变量

$$\kappa_x=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \kappa_y=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \kappa_{xy}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{4.2}$$

式中 w 为板或壳的中面的法向位移.

中面内力和弯曲内力的变分是

$$\left.\begin{aligned}&\delta N_x=\int_{-h/2}^{h/2}\delta\sigma_x dZ,\quad \delta N_y=\int_{-h/2}^{h/2}\delta\sigma_y dZ,\quad \delta N_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}\delta\tau_{xy} dZ\\&\delta M_x=\int_{-h/2}^{h/2}\delta\sigma_x Z dZ,\quad \delta M_y=\int_{-h/2}^{h/2}\delta\sigma_y Z dZ,\quad \delta M_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}\delta\tau_{xy} Z dZ\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

式中 h 为板或壳的厚度.

设板或壳在屈曲前已处于塑性状态，屈曲时有的部份应力在增加，有的部份应力在减少，即所谓加载区及卸载区，加载区意味着材料在继续塑性化，这时可认为 $\sigma_i\delta\varepsilon_i>0$[19]，此时材料仍处于塑性状态．对于卸载区，则应有 $\sigma_i\delta\varepsilon_i<0$．应力和应变的变分关系，按线性规律，应使用胡克定律(3.5)．故加载区与卸载区的分界面上必须存在如下的条件

$$\sigma_i\delta\varepsilon_i=0 \tag{4.4}$$

因为以后必须对板或壳的厚度分段进行积分，故对确定弹性区及塑性区的分界面是必要的.

设 Z_0 为加载区与卸载区分界面的法向坐标，假定卸载区从 Z_0 延续到 $Z=-h/2$. 故加载区的坐标从 Z_0 到 $h/2$，卸载区的坐标从 $-h/2$ 到 Z_0.

因此积分 (4.3) 应分成两段．关于应力变分与应变变分的关系式对加载区应用(3.1)，卸载区则应用(3.5)，于是由(4.3)分两段进行积分，最后得到所有的中面力及力矩的变分如下

$$\left.\begin{aligned}&\delta N_x=h(A_1\delta\bar{\varepsilon}_x+B_1\delta\bar{\varepsilon}_y)+h^2(A_2\delta\kappa_x+B_2\delta\kappa_y)\\&\delta N_y=h(A_1\delta\bar{\varepsilon}_y+B_1\delta\bar{\varepsilon}_x)+h^2(A_2\delta\kappa_y+B_2\delta\kappa_x)\\&\delta N_{xy}=\frac{h}{2}(A_1-B_1)\delta\bar{\gamma}_{xy}+h^2(A_2-B_2)\delta\kappa_{xy}\\&\delta M_x=-h^2(A_2\delta\bar{\varepsilon}_x+B_2\delta\bar{\varepsilon}_y)-h^3(A_3\delta\kappa_x+B_3\delta\kappa_y)\\&\delta M_y=-h^2(A_2\delta\bar{\varepsilon}_y+B_2\delta\bar{\varepsilon}_x)-h^3(A_3\delta\kappa_y+B_3\delta\kappa_x)\\&\delta M_{xy}=-\frac{h^2}{2}(A_2-B_2)\delta\bar{\gamma}_{xy}-h^3(A_3-B_3)\delta\kappa_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

上式中

$$\left.\begin{aligned}&A_1=\frac{1}{2}[(a_e+a)+(a_e-a)\bar{Z}_0]\\&B_1=\frac{1}{2}[(b_e+b)+(b_e-b)\bar{Z}_0]\\&A_2=\frac{1}{8}(a_e-a)(1-\bar{Z}_0^2)\\&B_2=\frac{1}{8}(b_e-b)(1-\bar{Z}_0^2)\\&A_3=\frac{1}{24}[(a_e+a)+(a_e-a)\bar{Z}_0^3]\\&B_3=\frac{1}{24}[(b_e+b)+(b_e-b)\bar{Z}_0^3]\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

式中$\bar{Z}_0=2Z_0/h$，并由（4.4）确定．为此先从（2.6）对应变强度ε_i取变分．再利用弹塑性小变形的应力应变关系[20]可得

$$\delta\varepsilon_i=\frac{1}{\sigma_i}(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}) \qquad (4.7)$$

对平面应力状态，有

$$\delta\varepsilon_i=\frac{1}{\sigma_i}(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}) \qquad (4.8)$$

根据条件（4.4）由（4.8）并利用（4.1）可得

$$\bar{Z}_0=\frac{2Z_0}{h}=\frac{2}{h}\ \frac{\sigma_x\delta\bar{\varepsilon}_x+\sigma_y\delta\bar{\varepsilon}_y+\tau_{xy}\delta\bar{\gamma}_{xy}}{\sigma_x\delta\kappa_x+\sigma_y\delta\kappa_y+2\tau_{xy}\delta\kappa_{xy}} \qquad (4.9)$$

假设板或壳屈曲时．中面内力保持不变，即$\delta N_x=\delta N_y=\delta N_{xy}=0$．于是从（4.5）的前三式可解出

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta\bar{\varepsilon}_x}{h}&=\frac{(B_1B_2-A_1A_2)\delta\kappa_x+(B_1A_2-A_1B_2)\delta\kappa_y}{A_1^2-B_1^2}\\
\frac{\delta\bar{\varepsilon}_y}{h}&=\frac{(B_1B_2-A_1A_2)\delta\kappa_y+(B_1A_2-A_1B_2)\delta\kappa_x}{A_1^2-B_1^2}\\
\frac{\delta\bar{\gamma}_{xy}}{h}&=-\frac{2(A_2-B_2)}{A_1-B_1}\delta\kappa_{xy}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

将（4.10）代入（4.5）后三式．得

$$\left.\begin{aligned}
\delta M_x&=-(D_1\delta\kappa_x+D_2\delta\kappa_y)\\
\delta M_y&=-(D_1\delta\kappa_y+D_2\delta\kappa_x)\\
\delta M_{xy}&=-(D_1-D_2)\delta\kappa_{xy}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
D_1&=h^3\left[A_3+\frac{2A_2B_1B_2-A_1(A_2^2+B_2^2)}{A_1^2-B_1^2}\right]\\
D_2&=h^3\left[B_3+\frac{B_1(A_2^2+B_2^2)-2A_1A_2B_2}{A_1^2-B_1^2}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

从（4.11）可看出，诸力矩的变分与弯曲变形的变分之间是线性变化的．

五、屈曲方程的建立及边界条件

为简单起见，我们仅就薄板的塑性屈曲来讨论．与推导弹性情形下的板受中面力作用的方程相类似．我们取作用在处于屈曲变形状态的板中微元上的力在法线方向的平衡条件，可得到

$$\frac{\partial^2\delta M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\delta M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\delta M_y}{\partial y^2}-N_x\delta\kappa_x-2N_{xy}\delta\kappa_{xy}-N_y\delta\kappa_y=0$$

将（4.2）及（4.11）先后代入上式，便得到

$$D_1\nabla^2\nabla^2\delta w+N_x\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}=0 \qquad (5.1)$$

从上式可看出，它和处于弹性状态的薄板屈曲基本方程相类似.

边界条件主要有如下几种，例如 x=常数的边界可有

$$\left.\begin{array}{ll}\text{夹住边} & \delta w=0,\quad \dfrac{\partial\delta w}{\partial x}=0\\[2ex] \text{简支边} & \delta w=0,\quad \dfrac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}=0\\[2ex] \text{自由边} & -\dfrac{\partial}{\partial x}\left[D_1\dfrac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+(2D_1-D_2)\dfrac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\right]=0\\[2ex] & D_1\dfrac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+D_2\dfrac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}=0\end{array}\right\}\tag{5.2}$$

上二式分别为 x=常数边的等效剪力及弯矩.

六、算 例

设有一周边简支的矩形底圆柱扁壳，其半径为 R，厚为 h，母线长 l，中心角为 β. 受轴向压力 N_x 作用. 今求其屈曲时的临界力.

我们设扁壳在失稳时的挠曲函数为

$$w(x,y)=A\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\tag{6.1}$$

相应的变分是

$$\delta w=\delta A\cdot\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\tag{6.2}$$

其中

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{l},\quad \mu_n=\frac{n\pi}{s},\quad s=R\beta\tag{6.3}$$

该挠曲函数显然满足周边为简支的边界条件 (5.2). 由 (4.2) 及 (6.2) 可得

$$\left.\begin{aligned}\delta\kappa_x&=\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}=-\lambda_m^2\delta A\cdot\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\\ \delta\kappa_y&=\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}=-\mu_n^2\delta A\cdot\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\end{aligned}\right\}\tag{6.4}$$

先由 (4.9) 确定 $\overline{Z}_0$，因此时的应力状态为

$$\sigma_x=-N_x/h,\quad \sigma_y=\tau_{xy}=0\tag{6.5}$$

∴由 (4.9) 得

$$\bar{Z}_0=\frac{2}{h}\,\frac{\delta\bar{\varepsilon}_x}{\delta\kappa_x}\tag{6.6}$$

再将 (4.10)，(6.4) 先后代入上式，可得

$$\frac{\bar{Z}_0}{2}(A_1{}^2-B_1{}^2)=B_1B_2-A_1A_2+(B_1A_2-A_1B_2)i^2k^2\tag{6.7}$$

式中

$$i=\frac{n}{m},\quad k=\frac{l}{s}$$

由(6.7)即可确定 $Z_0=\frac{h}{2}\bar{Z}_0$，因该扁壳在常压力作用下，E_s 为一常量，故 Z_0 亦为一常量，即加载区和卸载区的分界面距中面的坐标到处相同.

将(6.2)代入(4.3)得

$$(N_x)_{cr}=\left(\frac{m}{k}+\frac{n^2k}{m}\right)^2\frac{\pi^2}{s^2}D_1 \tag{6.8}$$

上式中 D_1 由(4.12)确定，并且当 $n=1$，$m=k$ 时，$(N_x)_{cr}$ 为最小，给出

$$\min(N_x)_{cr}=\frac{4\pi^2 D_1}{R^2\beta^2} \tag{6.9}$$

七、结 束 语

（一） 若应力强度 σ_i 小于屈服极限 σ_s，则割线模量 $E_s=E$，于是方程(3.1)与(3.5)等价，都是属于弹性范围的胡克定律，则本文所讨论的板或壳的塑性屈曲问题将转化为弹性阶段的板或壳的屈曲问题.

（二） 从上面所推导的公式(5.1)、(5.2)可知，对于所求板或壳的塑性屈曲的临界力和板或壳的边界条件有关. 对简支边和夹住边只和 D_1 有关，例如上述例题所得到的临界力的公式(6.9). 而对于有自由边的情形，则可预料得到所求出的临界力将和 D_1、D_2 都有关.

（三） 由弹塑性小变形的公式(2.4)、(2.7)可知，对于不可压缩的材料 $\psi=3e_i/2\sigma_i$，与在本文中所阐述的可压缩材料的公式 $\psi=(3-\phi E_s)/2E_s$ 相比，后者较大，因此可推测可压缩材料的 D_1 将小于不可压缩材料的 D，因此在同样的条件下，对可压缩材料的临界力将低于不可压缩材料的临界力.

（四） 对于同样是可压缩材料，且在同样的条件下，使用切线模量的临界力[17]必将低于本文所讨论的使用割线模量所得的临界力.

（五） 由(4.6)及(4.12)的计算表明，对于可压缩材料，当考虑卸载影响时的 D_1 大于没有考虑卸载($Z_0=-h/2$)影响时的情形，故考虑卸载影响时的临界力将高于不考虑卸载时的临界力. 在文献[21]中也证实了这个结论.

参 考 文 献

1. Kármán, T. V., *Forschungsarbeiten*, 81 (1910), Berlin.
2. Shanley, F. R., *J. Aero. Sci.*, 14(1947) 261.
3. Bleich, F., *Theorie und Berechnung der eisernen Brücken* Berlin.(1924).
4. Gerard, G., Secant modulus method for determining plate instability above the proportional limit *J Aero. Sci.*, 13(1946)38.
5. Gerard, G., Plastic stability of thin shells, *J. Aero. Sci.*, 24, April, (1957) 269—274.
6. Ильюшин, А. А Приближенная теория упруго-пластических деформаций осесимметричной оболочек, *ПММ*, Т. 8, Вып.1,(1944).
7. Ильюшин А. А., *Пластичность*, Техтеоретиздат.,(1948).
8. Ильюшин А. А., Устойчивость пластинки и оболочек за пределами упругости,

ПММ, Т. 8, вып. 5, (1944) и вып. 5-6, (1946).

9. Stowell, E. Z., A unified theory of plastic buckling of columns and plates, *NACA, Report*, 898. and *Techn. Note.* 1556 (1948).
10. Bijlaard, P. P., Theory of plastic stability of thin plates, Abhdlg. *IVBH*.(1940/41), 45.
11. Bijlaard, P. P., Grundlegende Betrachtungen zum Ausbeulen der Platten und Schalen im Plastischen Bereich, *Mitt aus dem Inst. für Baustatik an der E. T. H.*, Nr. 21, Zürich(1948).
12. Bijlaard, P. P., Plastic buckling of simply supported plates subjected to combined shear and bending or eccentric compression in their plane. *J. Aero. Sci.*, 24, April, (1957), 291—303.
13. Григолюк, Э. И., О выпучивании тонких оболочек за пределом упругости. *Изв. АН СССР. ОТН.* 10. (1957). 3—11.
14. Pride, R. A. and Heimerl, G. J., Plastic buckling of simply supported compressed plates, *NACA TN*, 1817, April, (1949).
15. Лепик, Ю. Р., Два замечания к теории устойчивости пластинок за пределом упргости с учётом сжимаемости материала, *ПММ.*, XIV, Вып 5, (1950)553—557.
16. Kollbrunner, C. F. und Herrmann, G., Der Einfluß der Poissonschen Zahl auf die Stabilität rechteckiger Platten, *Mitt. der T. K. V. S. B.*, Nr.4, Zürich(1951).
17. Gao Zheng-tong, On the problems of plastic stability of plates and shells in consideration of compressibility of materials, *Symp. First Congr. Chin. Soci Mech Plat. Shell*, Science Publishing House (In Chinese) (1965) 33—39.
18. Жуков, А. М., Окоэффициенте Пуассона в пластияеской области, *Изв. АН СССР, ОТН*, 12, (1954), 86—91.
19. Bürgermeister, G., Steup, H., Kretzshmar, H., *Stabilitätstheorie*, Teil I. Akademie-Verlag. Berlin, (1963), 199—214.
20. Kachanov, L. M., *Foundations of the theory of plasticity*, 2nd. ed.(1971).
21. *Collected Articles of Shell Structures*, Chin. Indus. Publ. House, (In Chinese), 4(1965) 228—229.

On Some Problems of Plastic Buckling of Plates and Shells

Cheng Xiang-sheng

(*Tong-ji University, Shanghai*)

Abstract

This paper gives the stress-strain relations of the variational types on the basis of an assumption concerning the small deformation in the theory of elasto-plasticity.

The compact form of fundamental equations of plastic buckling of the plates and shells is obtained in terms of secant modulus.