应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

Fourier 积分的数值计算法*

谭福期

(河南洛阳, 1980年2月26日收到)

摘 要

本文建议采用样条函数插值作 Fourier 积分数值计算. 同时, 介绍了对几个一般函数采用各种不同的数值计算法的计算结果和构造样条函数的边界条件的简化处理方法.

一、问题的提出

在一些实际的工程问题中, 常常需要计算下面的 Fourier 积分

$$R(\omega)=\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt \tag{1.1}$$

$$I(\omega)=\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt \tag{1.2}$$

而其中的函数 $f(t)$ 又没有解析表达式, 仅仅是一些实测的实验数据或记录的波形曲线. 这时我们只有选择适当的插值函数来作数值计算. 但由于这个被积函数受 ω 影响很大, 即是说当 ω 相当大时, $\cos\omega t$ 急剧地在 -1 和 $+1$ 之间变化, 被积函数因而也急剧地在正负之间变化着, 如果 $f(t)$ 的插值函数选择得不适当的话, 计算的结果必然误差很大. 尤其对于高频更是不可想象的. 本文旨在推荐一种简便有效的计算这个积分的数值计算法.

二、过去常用的几种方法

根据选择 $f(t)$ 的插值函数的方法不同, 以往计算这个积分的数值计算法有三种: (1)矩形法. 它的基本思想是以阶梯函数作为插值函数, 也就是说在一个间隔以内把 $f(t)$ 看成是一个常数. 这个方法详见参考文献[1]. 为便于计算, 文献[1]已制成了相应的表格, 使用起来相当便利. (2)梯形法. 它是在一个间隔内以直线作为 $f(t)$ 的插值函数. 文献[3]中讨论了这种方法. 它指出, 对某些满足一定条件($\omega h=(2k+1)\pi$, 其中 h 为步长) 的 ω 值, 计算的结果相当精确. 而对于某些满足另一条件 ($\omega h=2k\pi$, 其中 h 为步长) 的 ω 值, 则计

* 钱伟长推荐.

算的结果很坏．也就是说，它的精度对于不同的 ω 是不一致的．（3）抛物线法．它是以抛物线作为 $f(t)$ 的插值函数．这个方法是由 Filon 提出来的，他在文献［2］中给出了具体的计算公式．

作者从自己的实际计算工作中体会到，这几种方法都不甚好，尤其是对于较大的 ω 值（即高频）误差很大．因此作者自一九七二年起，试用三次样条函数作插值函数来计算这个积分，收到了很好的效果．下面把作者计算的有关情况介绍出来，以推荐给有关同志．（作者在计算工作中得到北京师范大学王伯英等同志的协助特此致谢）．

三、以样条函数作插值函数计算 Fourier 积分

样条函数已为大家所熟知，介绍这方面的内容的中外文献均有，因此本文不再赘述样条函数本身，而只介绍应用情况．

我们假设把插值区间分成 N 段，各结点为 $t_0,t_1,t_2,\cdots\cdots,t_N$．那么第 k 段上的三次样条函数表达式如下

$$
\begin{aligned}
S_k(t)=&\frac{M_{k-1}(t_k-t)}{6(t_k-t_{k-1})}\left[(t_k-t)^2-(t_k-t_{k-1})^2\right]\\
&+\frac{M_k(t-t_{k-1})}{6(t_k-t_{k-1})}\left[(t-t_{k-1})^2-(t_k-t_{k-1})^2\right]\\
&+f_{k-1}\frac{t_k-t}{t_k-t_{k-1}}+f_k\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}
\end{aligned}\tag{3.1}
$$

其中 f_{k-1},f_k 分别为函数 $f(t)$ 在结点 t_{k-1} 与 t_k 处的值．由于三次样条函数有一个明显的物理意义，即它代表通过各已知点 $f_0,f_1,\cdots\cdots,f_N$ 的弹性样条挠曲线，因此在一些文献上便以各结点处的弯矩M_0，M_1，M_2，……，M_N 作为未知参数．它的数学意义是代表这些点的二阶导数．根据结点处的弯矩连续的条件，再加上两端的边界条件就可以求出 $M_0,M_1,M_2,\cdots\cdots$，M_N 也就是 $S(t)$ 可以唯一确定．把求得的 $S(t)$ 分段代入（1.1）和（1.2），就可以求得 Fourier 积分．

作者对几种有解析表达式的简单函数分别用矩形法、梯形法、抛物线法以及样条函数插值法在 DJS—6 机上进行了计算，并同精确值进行了比较，发现样条函数插值法具有很好的精确度，尤其是在高频的时候更显现其优越性．现选择几个计算值列于表一、表二．

四、边界条件的选取方法

为了求解（3.1）式中的 $M_0,M_1,M_2,\cdots\cdots,M_N$（即各结点的弯矩），必须加上两端的边界条件．通常边界条件的一般形式是

$$
\begin{cases}
M_0+\lambda_0M_1=d_0\\
\lambda_NM_{N-1}+M_N=d_N
\end{cases}\tag{4.1}
$$

$\lambda_0,d_0,\lambda_N,d_N$ 即为确定边界条件的四个参数，只要给这四个参数赋予一定的值，则M_0．M_1．$M_2,\cdots\cdots$，M_N 就唯一确定．一般说来，边界条件很难准确知道，因此很难给这四个参数赋

恰当的值．在实用中，常常取 $M_0=0$，$M_N=0$，作近似处理．显然这相当于取 $\lambda_0=\lambda_N=d_0=d_N=0$，有时会带来较大的误差．作者找到了一个简单而又行之有效的补救办法，就是将两个边端上的第一段的步长尽量缩小，以减小由于端点假定为简支所带来的误差．表二中的样条函数插值法就是这样选取步长计算的，效果很好．

对于有些实测波形曲线，中间有一些明显的尖点．遇到这种情况就要在这些点将图象断开．分段来构造样条函数．因为在这些点，一阶导数是不连续的，如果统一构造一个样条函数，那么就等于把这些尖点磨光了，必然不能反映真实情况，这时反会显得样条函数插值法不如其他法好，这显然不是由于样条函数插值法本身不好，而是由于我们在构造样条函数时忽视了这些一阶导数不连续的尖点的影响所致．

表 1　　$f(t)=\sin 10t$　　$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{10}$　　(8等分)

ω	$R(\omega)=\int_0^{\pi/10}\sin 10t\cos\omega t dt$				
	精确值	样条插值法	抛物线法	梯形法	矩形法
20	−0.6666666666 ($\times10^{-1}$)	−0.6666451018 ($\times10^{-1}$)	−0.6652839686 ($\times10^{-1}$)	−0.6583463106 ($\times10^{-1}$)	−0.6320698904 ($\times10^{-1}$)
500	−0.8003201278 ($\times10^{-4}$)	−0.8003191300 ($\times10^{-4}$)	−0.8592920540 ($\times10^{-4}$)	−0.1053354096 ($\times10^{-3}$)	−0.2528279560 ($\times10^{-2}$)
700	−0.4082466808 ($\times10^{-4}$)	−0.4081944000 ($\times10^{-4}$)	−0.4309375502 ($\times10^{-4}$)	−0.4163169190 ($\times10^{-4}$)	−0.2400222100 ($\times10^{-3}$)
900	−0.2469440670 ($\times10^{-4}$)	−0.2469118474 ($\times10^{-4}$)	−0.2640409726 ($\times10^{-4}$)	−0.2518460374 ($\times10^{-4}$)	0.1866839406 ($\times10^{-3}$)

表 2　　$f(t)=e^{-t}$　　$0\leqslant t\leqslant5$　　(18 等分)*

ω	$R(\omega)=\int_0^{5}e^{-t}\cos\omega t\,dt$				
	精确值	样条插值法	抛物线法	梯形法	矩形法
20	0.2309108338 ($\times10^{-2}$)	0.2315241560 ($\times10^{-2}$)	0.2290710836 ($\times10^{-2}$)	0.2009565150 ($\times10^{-2}$)	−0.1598575030 ($\times10^{-1}$)
500	−0.4781509186 ($\times10^{-5}$)	−0.4781499960 ($\times10^{-5}$)	−0.4875236224 ($\times10^{-5}$)	−0.5354944542 ($\times10^{-5}$)	0.6793317136 ($\times10^{-3}$)
700	0.4555864316 ($\times10^{-5}$)	0.4555868482 ($\times10^{-5}$)	0.4520846800 ($\times10^{-5}$)	0.3737167110 ($\times10^{-5}$)	−0.6901586636 ($\times10^{-3}$)
900	0.8310909316 ($\times10^{-5}$)	0.8310911762 ($\times10^{-5}$)	0.8280357410 ($\times10^{-5}$)	0.8267434142 ($\times10^{-5}$)	−0.1818438850 ($\times10^{-3}$)

* 注：样条插值法是这样取步长的，第一个和末一个步长为10^{-5}，中间16等分，共18个间隔．其它方法是18等分．

参 考 文 献

1. *N. A. C. A TN*, 4073.
2. Filon, L. N G., On a quadrature formula for trigonometric integrals, *Proc. Roy. Soc.*, Edinburgh, 49(1928), 38-47.
3. Clendenin, W. W., A method for numerical calculation of Fourier integrals, *Numerische Mat.* 8 (1966) 422-436.
4. Anlberg, J. H. et al, *The theory of Splines and Their Application*, Acad. Press, N. Y. (1967).

A Numerical Method for the Evaluation of Fourier Integrals

Tan Fu-qi
(*Luoyang, Henan*)

Abstract

This paper puts forward the use of spline function interpolation in the evaluation of Fourier integrals. At the same time, the numerical results of some common functions by various interpolation methods and a simplified method of construction of spline function for various boundary conditions are also presented.