应用数学和力学，第2卷第3期（1981年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

变分转化分析(II)

吴学谋
（武汉数字工程研究所，1980年4月1日收到）

摘　　要

本文介绍有关的一些泛系分析概念(诸如泛系、泛系空间、泛系逻辑空间、半序度量泛系等)，把凸集理论、Banach 完全性定理、Lax 等价理论、Kuhn-Tucker 型定理、Дубовицкий-Милютин 型定理等推广于半序度量泛系，发展了不同于传统结果的一些形式，并研究了一般的算子方程的稳定性及逼近的 MSP 转化原则．另外，对古典极值定理、变分学、互易原理、二次泛函变分定理及单边变分原理给出一种统一的泛函框架并作了一些推广．

一、泛系分析、逻辑空间与半序度量

泛系分析是泛系统 (pansystem)、泛转化 (panmorphism)、泛对称 (pansymmetry) 等概念的跨学科的研究与应用，是关于控制、识别、对策、推理、模拟与运筹等的基础研究的某些推广、补充或新的概括[2,3]．力学与应用数学理论的探讨涉及一般的系统、转化与对称概念，涉及识别与模拟问题．变分与驻值研究往往是一种特化了的泛对称分析．这一些使得泛系分析的观点或概念与力学和应用数学的研究、与变分的转化分析有某种联系．下面引入一些有关的概念作为讨论的工具．

1) 关系空间、结构空间与泛系

设 $\varLambda$ 为某一给定的包括选择公理在内的 Zermelo-Fraenkel 公理系统的任一传递模型所有序数构成的类．设对任何 $\lambda\in\varLambda$，a_λ 为一给定集族．设 L 为某一给定集（或代数系统，一般为一半序集或格），叫初始原型逻辑或初始原逻辑．记 $\vec{a}_{\lambda+1}\triangleq(\vec{a}_\lambda,\ a_{\lambda+1})$，$\vec{a}_0\triangleq a_0$，$\vec{a}_1\triangleq a_1$．设 E 为某给定集合，叫基集，定义关系空间如下：$G^0[E,\vec{a}_0)\triangleq E$，$G^1[E,\vec{a}_1)\triangleq[\bigcup\limits_{F\in a_1}(L\uparrow(E\times F))]\cup[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}L\uparrow E^n]$，$G^{\lambda+1}[E,\vec{a}_{\lambda+1})\triangleq G^1[K,\ a_{\lambda+1})$，这里 $K\triangleq G^\lambda[E,\ \vec{a}_\lambda)$．若 λ 为极限型序数，$G^\lambda[E,\vec{a}_\lambda)\triangleq\bigcup\limits_{\sigma<\lambda}G^\sigma[E,\vec{a}_\sigma)$．

有时省掉标志 $\vec{a}_\lambda$．$R\in G^\lambda[E)$ 称为 E 的 λ 级关系．

对于基集 E，参量集 M 的结构空间 $J_M[E)$ 或 $J[E)$ 是通过其子集或乏晰子集来定义的．$H\subset J[E)$ 指存在序数 λ 及 $\vec{a}_\lambda$，使得 $H\subset G^\lambda[E\cup M,\ \vec{a}_\lambda)$ 或者 $H\in L\uparrow G^\lambda[E\cup M,\vec{a}_\lambda)$．$H$ 的元叫做 E 的泛结构．

组合 $(E,\ H)$，或记为 E/H，就叫做泛系．有时也简称 E 为一泛系．若其隐定义了某泛结构 H．有时称 H 本身为泛系．E 与 H 往往进一步表述成更详细的多元体或直积的形式．

大部分当代数学概念都可描述为泛系．在泛系分析框架下，对数学研究已经给出了一种新的统一描述，对 Zadeh 和 Poincaré 两类乏晰概念给予了推广，并且把 Kalman 的观控性发展为泛系观控性，把黑箱原理发展为泛箱原理、泛系观控律、会诊原理与泛系抽样律，把 Boole 差分推广为泛系差分．另外，把传统逻辑（二值逻辑、多值逻辑、乏晰逻辑、陈廷槐四值逻辑、积空间拓扑学等）的某些基础研究发展为泛系逻辑，特别是展开了动态阴阳逻辑、乏晰逻辑、转移逻辑的新研究．同时，泛系分析总结了模式识别与人工智能的某些原理，给可靠性的研究提出一种统一的概念性框架，研究了泛结构的守恒性以及力学、物理、生物学、通信等的一些原理与概念．

2) 泛系逻辑、泛系空间与泛系逻辑空间

广义的泛系逻辑即作为推理分析或方法学的泛系分析本身．泛系分析的概念、原理与模式在方法论及推理运筹中的运用即组成了泛系逻辑的内容．相对狭义的泛系逻辑指关系 $f\subset E\times E'$ 或 $f\in L\uparrow(E\times E')$ 引伸的某些转化 $H\to H'(H\subset J[E],\ H'\subset J[E'])$ 在推理分析或方法论中的研究与应用．特别当 $E'=E\uparrow P$ 的形式的时候，E/H 叫原逻辑，E'/H' 叫次逻辑，原次之间的泛结构的相对守恒性叫泛系逻辑守恒性，这是一种特殊的商积关系形式的泛对称．泛系逻辑的数学研究有许多内容是涉及这种泛对称性的，而次逻辑往往表现为一种泛系逻辑空间（见下）．

在泛系 E/H $(H\subset J_M[E])$ 中，若 M 本身为某泛系（即有某种泛结构 $H_0\subset J_Q[M]$ 设置)，则 E/H 叫泛系空间．从某种意义讲，泛系空间与泛系是一样广泛的概念，而且往往等价，只不过泛系概念只把 M 作为参量集，而泛系空间概念强调 M 的结构以及它与基集的复合结构．这时 M 或 M/H_0 叫系数泛系．

次逻辑由于各种各样的泛系逻辑守恒性而具有原逻辑的某些类似数学性质，这方面已有许多具体的研究（见[2，3]）．而且次逻辑是以原逻辑为系数泛系的泛系空间，这就是泛系逻辑空间．泛系逻辑空间是当代最活跃的一批数学概念在泛系分析框架下的概括与推广，它包括：线性空间、凸集、线性半群、模、乏晰集、乏晰关系、积拓扑空间、超积、半序度量空间、流形，等等．

当系数泛系分别为域、环、$[0,1]$（或凸集)、$[0,\infty)$（或线性半群)、Boole 代数、软代数、半序集（poset）或格时，泛系逻辑空间相应为线性空间、模、凸集（或乏晰集)、线性半群、Boole 代数、软代数（或乏晰代数、乏晰集)、半序度量空间（或格，或 L 乏晰集)．

泛系逻辑空间除本身的运算或泛结构外，还有与系数泛系的复合运算或复合泛结构．并且其中许多运算与泛结构是由泛系逻辑守恒性而仿自系数泛系．

3) 半序度量泛系

设 L 为一半序集，$H\subset\bigcup\limits_{\lambda}[L\uparrow(E\uparrow I_\lambda)]$，$I_\lambda$ 为参量集或正整数，$\{\lambda\}$是任给定的，则泛

代数系统（E, H）或 E/H 叫半序度量泛系或半序度量空间（pometric pansystem）．$f\in L\uparrow(E\uparrow I_\lambda)$ 表示 E 的一种 I_λ 元半序度量．现代数学中的距离空间、赋范空间、赋半序范空间等都是半序度量泛系．泛系有了半序度量就可对元素或关系进行比较，这是极值、驻值、变分与运筹等进行分析的基础．

若仅限于有比较关系，L 可以推广为拟半序集（即半序关系不限于有反对称性的推广，$x\geqslant y$, $y\geqslant x$ 不一定要求 $x=y$）或一般的传递关系集，相应的泛系为拟半序度量泛系和传递度量泛系．更复杂的半序度量泛系及其推广是 $H=L\uparrow H'$, $H'\subset J[E]$，形成的(E, H)．

在力学及有关的应用数学中，最常用的是当 E 是模或线性空间的子集，而 L 是备的或有限备的半序模、传递模或半序线性空间的时候．为了论述方便，我们大都限于 E 是线性空间或其子集，而 L 是备的半序线性空间，但一些结论往往可推广于模．

二、半序度量泛系中的凸集、极值逼近与方程稳定性

1） 算子连续性与有界性的转化

设 L 为有限备的半序线性空间，（0）收敛及有关概念按传统方式定义（见[1]）．设（ε）为 L 中某一正元素族，I 为某定向序集，$(x_t)\subset L$ 为（ε）收敛于 $x_0\in L$ 是指对任何给定的 $\varepsilon\in(\varepsilon)$，存在 $t_0=t_0(\varepsilon)\in I$，当 $t\geqslant t_0$ 时，有 $|x_t-x_0|\leqslant\varepsilon$．这时记 $(\varepsilon)-\lim x_t=x_0$ 或 $x_t\xrightarrow{(\varepsilon)}x_0$．

设 $L'\subset L$，若对任何 $\varepsilon\in(\varepsilon)$，存在 $\alpha\in R$, $\alpha>0$, $\alpha=\alpha(\varepsilon)$，使得对 $x\in L'$，有 $|x|\leqslant\alpha\varepsilon$，$\alpha$ 与 x 无关，R 为系数域实域，则称 L' 为（ε）有界．

L中的(0)收敛，(ε)收敛及有界性概念可以引伸到半序距离空间(E, ρ)上，$\rho\in L\uparrow E^2$，$\rho(x, y)=\rho(y, x)$，$\rho\geqslant 0$ 并满足三角不等式(简称G^+空间，若$\rho(x, y)=0$ 与$x=y$等价，则称G^{++}空间)．若(ε)是L的某些正元的集合，以之引伸出收敛与有界的概念，泛系$(E, \rho, (\varepsilon))$或$(E, L, \rho, (\varepsilon))$相应叫$(\varepsilon)G^+$和$(\varepsilon)G^{++}$空间．若 E 为线性空间或模，$\rho(x, y)=\rho(x-y, 0)$，以$\rho(x, 0)$为范数$\|x\|$，则叫$(\varepsilon)G^+$范和$(\varepsilon)G^{++}$范空间．若范数是绝对齐次的，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$，则分别叫$(\varepsilon)G_0^+$范和$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间．可以证明一般线性拓扑空间为$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间．按通常方式可定义$(\varepsilon)G_0^+$范空间之间的映射算子的线性、连续性与有界性．对$(\varepsilon)$引入两个条件：

BC(1)：对任何$\varepsilon\in(\varepsilon)$，存在$r$，$0<r<1$，使得$r\varepsilon\in(\varepsilon)$．

BC(2)：对任何ε, $\varepsilon'\in(\varepsilon)$，存在$k>0$，使得$\varepsilon<k\varepsilon'$，$k$与$\varepsilon$, ε'有关．

仿传统泛函分析的证法（见[1]第二章§2），可得

定理1 设$(E_i, L_i, \|*\|_i, (\varepsilon)_i)$为二$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间，$A$: $E_1\to E_2$为线性．若$(\varepsilon)_1\in BC(2)$，则由A之连续性导致A之有界性．若$(\varepsilon)_1\in BC(1)$，$(\varepsilon)_2\in BC(2)$，则由A之有界性导致A之连续性．

注1 对有界线性算子A，由$\|x\|_1\leqslant\varepsilon_1$导致$\|Ax\|_2\leqslant\beta\varepsilon_2$，这样的$\beta$的下确界记为$\|A\|$，它可以看成$A$的广义范数，$(L(E_1, E_2), R, \|*\|)$就是一$G_0^+$范空间，若$E$均为$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间，则它是$G_0^{++}$范空间，这里$L(E_1, E_2)$是$E_1$到$E_2$的有界线性算子族．

2）线性半群、凸集与极值逼近

设L为备的半序线性空间，L_+为其正部分，$(E, L, \|*\|, L_+)$为$(e)G_0^{++}$范空间，B为E之线性半群．记E^*是f：$E\to L$的线性连续映射的总体，B的共轭半群B^*是满足$f(x)\geqslant 0$ $(x\in B)$的$f\in E^*$的总体．这时由B^*引伸出E^*的半序结构，$f\geqslant g$等价于$f(x)\geqslant g(x)$ $(x\in B)$．若E为拓扑空间，B具有内点，则称B为实心的．B的内域记为$\mathring{B}$．对任何空间F的零元记为0_F（在不产生混淆时不记下标）．线性半群（或凸锥）、凸集的性质是极值与驻值研究的基础，也是变分转化分析与最优逼近分析的工具．

定理2 若B为实心，$L_+\in BC(2)$，f：$E\to L$，$f(x)\geqslant 0$ $(x\in B)$，当f为线性时，则必$f\in B^*$．

证明 设$x\in B$，V为0_E的一邻域，使得$x+V\subset B$，这时有$|f(y)|\leqslant f(x)(y\in V)$．由条件$BC(2)$，对任何$e\in L_+$，可选$\lambda>0$，$\lambda f(x)<e$．这时对$y'\in\lambda V$有$|f(y')|<e$，故$f$在$0_E$处连续，由线性可导致$f\in E^*$．证毕．

注2 定理2描述了序结构与连续性的一种转化关系．

定理3 若B为实心，$f\in B^*$，$x\in\mathring{B}$，$\{x'|\|x'-x\|\leqslant\rho e\}\subset B$，$e,\delta\in L_+$，则必$f(x)\geqslant\rho\delta\|f\|$，$\|f\|$为算子范数．

证明 因对$\|u\|\leqslant e$，有$x\pm\rho u\in B$，故$f(x)\pm\rho f(u)\geqslant 0$，即$f(x)\geqslant\rho|f(u)|$，由算子范数定义即证明了定理．

类似古典凸锥理论有

定理4 若$f\in B^*$，$f\neq 0_{E^*}$，则对$x\in\mathring{B}$有$f(x)>0$．

像古典凸锥理论一样，仿Hahn-Banach定理证法可得．

定理5 设$L_+\in BC(2)$，$B\neq E$为实心，E_1是线性子空间，存在某$x_0\in E_1\cap\mathring{B}$．设$f_1$：$E_1\to L$为线性连续，$f_1(x)\geqslant 0(x\in B\cap E_1)$，则存在$f$：$E\to L$，它在$E_1$上与$f_1$相重并属于$B^*$．

由定理5可得到

定理6 若$B\neq E$为实心，必B^*非空并有非零元素．

定理7 设$L_+\in BC(2)$，B_1，B_2为线性半群，B_1为实心，B_2与$\mathring{B}_1$不相交，则存在$f\in E^*$，$f\neq 0_{E^*}$，使得$f(x)\geqslant 0_L(x\in B_1)$，$f(y)\leqslant 0_L(y\in B_2)$．

注3 证法同凸锥理论，主要是对$B=\{x-y|x\in B_1,y\in B_2\}$应用定理5，$B^*$为非空并包含非零元．定理7是有名的分离定理对赋半序范空间的推广

由分离定理即可把凸集的Ascoli-Mazur定理与Eidelheit定理推广于半序度量泛系．

定理8 设E'为E之线性子空间，$F=E'+a,a\in E$．K是一有内点的凸集，$\mathring{K}\cap F$非空，则必存在$f\in E^*$，$f(x)-c$对某$c\in L$，及$x\in K$不变号．

定理9 设K_1，K_2为E之凸集，K_1有内点，$\mathring{K}_1\cap K_2$非空，则必有超平面$\{x|f(x)=c\}$分离K_1，K_2．

古典的情况证明见[1]第五章．

定理10 设$L_+\in BC(2)$，B_λ为E中实心线性半群，$\cap B_\lambda$非空，$I=\{\lambda\}$为有限参量集，则$(\cap B_\lambda)^*=\Sigma B^*_\lambda$．

证明 若$f\in\Sigma B^*_\lambda$，则存在$f_\lambda\in B^*_\lambda$使得$f=\Sigma f_\lambda$，因而对$x\in\cap B_\lambda$，$f_\lambda(x)\geqslant 0_L$，故有

$f(x)\geqslant 0_L$. 这就证明了$\Sigma B^*_\lambda\subset(\bigcap B_\lambda)^*$.

对 $E\uparrow I$ 建立$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间$(E\uparrow I,\ L\uparrow I,\ \|*\|_0,\ L_+\uparrow I)$，$B=\bigcap B_\lambda$ 是其中之实心线性半群，而 $E\uparrow I$ 的对角线子空间 D 与 B 之交非空. 若 $f\in(\bigcap B_\lambda)^*$,则在 D 上定义$\hat{f}\in D^*$ 于下：$\hat{f}(\hat{x})=f(x)$，$\hat{x}\in D,x\in E$，$\hat{f}$ 在 $D\cap B$上非负，由定理 5，$\hat{f}$ 可延拓于 $E\uparrow I$ 并在 B 上非负，$\hat{f}(\hat{x})=\Sigma f_\lambda(x)=f(x)(x\in E)$，$f_\lambda\in E^*$，这时容易证明$f_\lambda\in B_\lambda^*$. 因此 $(\bigcap B_\lambda)^*\subset\Sigma B_\lambda^*$. 证毕.

注 4 若 $f\in E^*$，$B=\{x|f(x)=0_L\}$，则$B^*=\{\lambda f|\lambda\in R\}$.若$B=\{x|f(x)\geqslant 0_L\}$，$f\neq 0_{E^*}$，则 $B^*=\{\lambda f|0\leqslant\lambda<\infty\}$.

按 $L=R$ 时的方式定义伴算子. 若 E_1，E_2为 G_0^{++} 型空间，$E=E_1\times E_2$，T：$E_1\to E_2$为连续线性，$B=\{x|x\in E,\ x=(x_1,x_2),\ Tx_1=x_2\}$，则 $B^*=\{f|f\in E^*,\ f=(f_1,f_2),\ f_1=-T^*f_2\}$，这里$T^*$为 T 之伴算子，T^*：$E_2^*\to E_1^*$，$T^*f_2'=f_1'$，$f_2'(Tx_1)=T^*f_2'(x_1)=f_1'(x_1)$.

注 5 对线性空间 E 的子集 E'，若 $x\in E'$ 对任何方向自x发射的直线与 E'之交必含某线段于 E 之中，则 x 叫E'的辐射点，E' 之辐射点之总体叫辐射核. 在上面所述的半群与凸集的命题中往往要求是实心的，这涉及内点的概念，因而必须引入拓扑结构. 但是许多结果即使在一般线性空间也有相应形式，而辐射核可看成集合内域的一种推广，这时延拓与分离定理也有相应的发展.

Banach 关于完全性与封闭性的等价定理是泛函分析与逼近论的基本定理，在上面预备的基础上，我们把它发展为半序度量空间线性半群非封闭的定量形式.

对 $x_0\in E$，对B定义 x_0 的逼近度 $B(x_0,\ B)=\inf\|x_0-x\|\ (x\in B)$ 和残缺度 $C(x_0,\ B)=\sup|f(x_0)|(f\in B^*,\ \|f\|=1)$.

定理11 设L为备，$L_+\in BC(2)$，$(E,\ L,\ \|*\|,\ L_+)$为$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间，B为E之线性半群，则$B(x_0,\ B)=C(x_0,\ B)$.

证明 由定义易证$C(x_0,\ B)\leqslant B(x_0,\ B)$. 故若$B(x_0,\ B)=0_L$.定理即已证.

若 $B(x_0,\ B)\neq 0_L$，令 $B_1=\{\lambda(x_0+e)|\lambda\geqslant 0,\ \|e\|<B(x_0,\ B)\}$，则 B_1 为实心半群，并且$\mathring{B}_1$ 与 B 不相交，因此由分离定理，存在 $f_1\in B^*$使$f_1(y)\leqslant 0_L(y\in B_1)$，$f_1\neq 0_{B^*}$，定义$f$为$f_1/\|f_1\|$，则 $f\in B^*$，$\|f\|=1$，$f(y)\leqslant 0_L(y\in B_1)$. 这时可证 $|f(x_0)|\geqslant B(x_0,B)$，因此 $C(x_0,B)\geqslant B(x_0,\ B)$.结合已证的相反不等式，定理得证.

注 6 若 B 为线性子空间，L 为 R，$B(x_0,\ B)=C(x_0,\ B)=0$，则定理 11 即为传统定理.

注 7 在定理11的条件下，$x\in\bar{B}$(B的闭包)的充要条件是 $f\in B^*$ 包含 $f(x)\geqslant 0_L$，而 $x\in\mathring{B}$ 的充要条件是$f\in B^*$，$f\neq 0_{E^*}$，包含$f(x)>0_L$. 若 $x\in B$，$-x\bar{\in}B$，则对 $f\in B^*$ 有 $f(x)>0_L$.

3） 方程族的稳定性

对于模，条件$BC(1)$，$BC(2)$推广为

BC(1)*：存在$\theta_n\in M$(环系数泛系)，而θ_n^{-1} 存在并属于M，并且对任何 $\varepsilon\in(\varepsilon)$，对充分大的$n$有$\theta_n\varepsilon\in(\varepsilon)$.

BC(2)*：存在 $\theta_n\in M$，θ_n^{-1} 存在并属于 M，并且对任何 $\beta\in M$，ε，$\varepsilon'\in(\varepsilon)$，存在 $N=N(\beta,\ \varepsilon,\ \varepsilon')$，使得 $n>N$ 时，$\theta_n\beta\varepsilon\leqslant\varepsilon'$.

设$(E_i,\ L_i,\ \|*\|_i,\ (\varepsilon)_i)$，$i=1,\ 2$，为二半序度量泛系，$E_i$，$L_i$均为模，系数环$M$也是半序性的并且是可换环，$L_i$为半序集，并要求$\lambda\in M$，$\lambda\geqslant 0_M$时，对$x$，$y\in L_i$，$x\geqslant y$，$\lambda x\geqslant\lambda y$．对范数$\|*\|_i$三角不等式成立，非负，并且$\|e_i\|_i=0_{L_i}$与$e_i=0_{E_i}$等价，$\|\lambda e_i\|_i=|\lambda|\,\|e_i\|_i$．这时$E_i$叫$(\varepsilon)M_0^{++}$范空间，$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间是其特例．

设f_σ：$E_1\to E_2$为线性，按1)方式定义连续性与有界性，σ为参量．这时定理1可推广为

定理1* 若f_σ为线性（可加齐次），$(\varepsilon)_1\in BC(2)^*$，则由$f_\sigma$之$\sigma$一致连续性导致$f_\sigma$的$\sigma$一致有界性．若$(\varepsilon)_1\in BC(1)^*$，$(\varepsilon)_2\in BC(2)^*$，则由$f_\sigma$之$\sigma$一致有界性导致$f_\sigma$的$\sigma$一致连续性．

定理1** 若f_σ为线性，$(\varepsilon)_2\in BC(2)^*$，则由$f_\sigma^{-1}$之$\sigma$一致连续性导致$f_\sigma$的$\sigma$一致反有界性．若$(\varepsilon)_2\in BC(1)^*$，$(\varepsilon)_1\in BC(2)^*$，则由$f_\sigma$之$\sigma$一致反有界性导致$f_\sigma^{-1}$存在并一致连续．

方程或空间转化的扰动误差叫原误差，它以截断误差和舍入误差概念为特例．方程解的误差叫次误差．方程族或空间转化族之逆转化对族参数的一致连续性叫稳定性，这一概念概括了差分方程与微分方程的许多稳定性概念．在新概念下，定理1* 和 1**转化为

定理12 当f_σ一致有界时（若$(\varepsilon)_1\in BC(2)^*$，$f_\sigma$一致连续时即如此），则次收敛性导致原收敛性．当次误差$\leqslant\xi\varepsilon(\varepsilon\in(\varepsilon)_1)$时，原误差$\leqslant\beta\xi\varepsilon'(\varepsilon'\in(\varepsilon)_2)$，这里$\|x\|_1\leqslant\varepsilon\Rightarrow\|f_\sigma x\|_2\leqslant\beta\varepsilon'$．

定理13 设$(\varepsilon)_i\in BC(1)^*\cap BC(2)^*$，则稳定性与一致反有界性等价．设原误差$\leqslant\xi\varepsilon'$，则次误差$\leqslant\alpha\xi\varepsilon$，这里$\|f_\sigma x\|_2\leqslant\varepsilon'\Rightarrow\|x\|_1\leqslant\alpha\varepsilon$．

线性拓扑空间是特殊的$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间，因此用共鸣定理可证

定理13* 若E_i为线性拓扑空间，E_2为第二纲，f_σ为原收敛，则稳定性、次收敛性和f_σ^{-1}的一致有界性等价，而且次收敛性导致稳定性与f_σ^{-1}的一致有界性．

对差分方程及泛函方程的稳定性，这些结果是Lax等价理论的发展，以[4，5]中所提诸家的研究为特例，而论述相对统一概括．

三、半序度量泛系中的驻值问题

1) Kuhn-Tucker型定理的推广

设E_x，E_y，E_z，为线性半序空间，零点分别为0_x，0_y，0_z，对任何半序集G，其极大集$\hat{G}\triangleq\{x\mid x\in G,\ 若x'\in G,\ x'\geqq x,\ 则\ x'\leqq x\}$，类似定义极小集$\check{G}$及极值集$\check{\hat{G}}$．

设$B_x\subset E_x$，定义$B_x(f,g)=\{(y,z)\mid y\in E_y,\ y\leqslant f(x),\ z\in E_z,\ z\leqslant g(x)对某\ x\in B_x\}$，这里$f:B_x\to E_y$，$g:B_x\to E_z$．

定理14 若$B_x(f,g)$在$E_y\times E_z$中为凸并有内点，$f(x_0)\geqslant f(x)(x,x_0\in B_x)$，$g(x_0)\geqslant 0_z$，$L$为备，则存在不同时为零的$y_0^*\in E_y^*$，$z_0^*\in E_z^*$，$y_0^*\geqslant 0_{y^*}$（$E_y^*$的零点，其余类似），$z_0^*\geqq 0_{z^*}$，使得$L(x,\ z^*;\ y^*)=y^*[f(x)]+z^*[g(x)]$于$(x_0,\ z_0^*)$有$y_0^*$鞍点：$L(x,\ z_0^*;\ y_0^*)\leqslant L(x_0,\ z_0^*;\ y_0^*)\leqslant L(x_0,\ z^*;\ y_0^*)$．

证明 因$(f(x_0),\ 0_z)$是$B_x(f,\ g)$的界点，故存在不全为零的$(y_0^*,\ z_0^*)$，$y_0^*\in E_y^*$，$z_0^*\in E_z^*$，使得对$(y,\ z)\in B_x(f,\ g)$有

$$y_0^*(y)+z_0^*(z)\leqq y_0^*[f(x_0)]+z_0^*(0_z) \qquad (*)$$

因此有

$$y_0^*[f(x)]+z_0^*[g(x)]\leqq y_0^*[f(x_0)]$$
$$z_0^*[z]\leqq 0_l \quad (z\leqq 0_z)$$
$$y_0^*[y]\leqq 0_l \quad (y\leqq f(x_0))$$

后二式导致$z_0^*\geqq 0_{z^*}$，$y_0^*\geqq 0_{y^*}$，而第一式导致$z_0^*[g(x_0)]=0_L$，结合起来即证(x_0, z_0^*)是y_0^*鞍点．证完．

定理15 在上定理条件下，若存在$(y_*, z_*)\in B_x(f, g)$，$z_*>0_z$，则必$y_0^*\neq 0_{y^*}$．

证明 因若$y_0^*=0_{y^*}$，代入定理14证明中之(*)式，得到$z_0^*[z_*]\leqslant 0_L$，因而$z_0^*[z_*]=0_L$．但是$z_0^*\geqq 0_{z^*}$，$z_0^*\neq 0_{z^*}$，只能$z_0^*[z_*]\neq 0_L$，产生矛盾．证毕．

由上述定理得到Kuhn，Tucker，Slater，Uzawa，Hurwicz的定理的一种推广形式：

定理16 设B_x为凸集，f与g为凹，存在$x_*\in B_x, g(x_*)>0_z$，则x_0为f在B_x中之极大并使$g(x_0)\geqq 0_z$之充要条件是存在$y_0^*\in E_y^*, z_0^*\in E_z^*, y_0^*\geqq 0_{y^*}$，$z_0^*\geqq 0_{z^*}$，$y_0^*\neq 0_{y^*}$，使$(x_0, z_0^*)$是$L(x, z^*; y^*)$的$y_0^*$鞍点．

2） ДуБовицкий-Милютин型定理的推广

Дубовицкий和Милютин的工作是把极值性与约束性这些泛对称用一些凸锥或线性半群B_λ来刻划，于是约束极值的一个必要条件是$\bigcap B_\lambda$为空集，因而导致存在不都恒等于0的连续线性泛函$b_\lambda^*\in B_\lambda^*$，使得$\sum b_\lambda^*=0$．在特殊情况下就可转化为极值控制的Понтрягин原理、多变量分析的条件极值定理、变分法的Euler-Lagrange方程和数学规划中的Kuhn-Tucker定理．

这一工作可以这样来推广，一方面目标泛函可以改为一般取值半序线性空间的算子，另一方面，对偶锥B_λ^*不是泛函集，而是类似的取值半序线性空间的算子集．由二、的论述，对值空间是序备的情况，只要正部满足$BC(2)$，传统泛函分析（包括凸锥理论）的大部分结果都可推广，这也包括Дубовицкий和Милютин定理．下面引入的概念与分析与传统的有些不同．

设约束集为$B\subset E_x$，$x_0\in B$，R：$G(0, 1)\to B$，$R(0)=x_0$，并于$\lambda=0$处可变分，则$\delta R(0,1)$叫做于$x=x_0$处B的可变分方向，其总体记为$B(x_0)$．$h\in B(x_0)$表示可在B中引一曲线$R(\lambda)(\lambda\in[0,\varepsilon))$通于$R(0)=x_0$，并在$x_0$处有切方向$h$，或者说$x_0+\lambda h$邻近有$R(\lambda)\in B$，邻近程度比$\lambda$的阶要高，这里$G(x_0, h)\triangleq\{x_0+\lambda h|0\leqslant\lambda<\varepsilon\}$．可变分方向是传统切方向与容许方向（能行方向）概念的统一．

设$B\subset E_x$，$f:B\to E_y$，$x_0\in B$，$\delta R(0, 1)\in B(x_0)$，若存在$\varepsilon_0=\varepsilon_0(\delta R(0, 1))>0$，$\delta=\delta(\delta R(0,1))>0$，使得$\lambda\in[0,\varepsilon_0)$有$f(R(\lambda))\geqslant f(x_0)+\lambda\delta$，则$\delta R(0,1)$叫做$f$于$x_0\in B$的升向，并记为$\delta R(0,1)\in B(x_0, f\uparrow)$．显然$B(x_0, f\uparrow)\subset B(x_0)$．

定理17 若约束$B=\bigcap D_\lambda$，则$f:D_\lambda\to E_y$于$x=x_0\in B$为极大的必要条件是$\bigcap D_\lambda(x_0, f\uparrow)$为空，或$(\bigcap D_\lambda(x_0))\bigcap B(x_0, f\uparrow)$为空．

证明 由定义即可推得．

定理18 若L为序备，$L_+\in BC(2)$，$D_\lambda(x_0, f\uparrow)$为凸，并至多除一个“$\lambda$”外为实心，则$f$于$x_0$为极大的必要条件是存在不全为零的$d_\lambda^*\in D_\lambda^*(x_0, f\uparrow)$，使得$\sum d_\lambda^*=0_{x^*}$

证明 因对以L为值的半序度量线性空间，分离定理7—9成立，故对例外的λ_0，若$D=\bigcap D_\lambda(x_0, f\uparrow)(\lambda\neq\lambda_0)$非空，则存在不为零的$d^*\in E_x^*$，使得$d^*(x)\geqslant 0_L(x\in D)$，

$d^*(x)\leqslant 0_L(x\in D_{\lambda_0}(x_0,f\uparrow))$，再由定理10，知存在$d^*_\lambda\in D^*_\lambda(x_0,f\uparrow)$，使得$d^*=\sum d^*_\lambda(\lambda\neq\lambda_0)$．令$d^*_{\lambda_0}=-d^*$，即证．对于$D$为空，可用归纳法证明．

定理19 在上定理条件下，若$D_\lambda(x_0)$，$B(x_0, f\uparrow)$均为凸锥，并且至多除一个外为实心．则f于x_0为极大的必要条件是存在不全为零的$d^*_\lambda\in D^*_\lambda(x_0)$，$b^*\in B^*(x_0, f\uparrow)$，使得$b^*+\sum d^*_\lambda=0_{x^*}$．

注 8 对偶空间的元素可看成微商或变分的一种推广，因而定理18，19的条件可看成Euler-Lagrange方程的一种广义形式．

四、逼近转化定理

最优逼近可看成与变分联系的一种特殊驻值问题，它的研究与一般逼近的转化有关．

条件M：1）设$E^\pm$为二线性空间，集$E_*\subset E^+\cap E^-$，$M(f^-)$为按E^-之范$\|*\|^-$是E_*对$f^-\in E^-$的某一最优逼近元；2）对$e\in E_*$有$\|e\|^+\leqslant g(\|e\|^-)$，$g$为非降，$\|*\|^+$为$E^+$中的范数；3）对$f^\pm\in E^\pm$有$p\in E_*$使得$\|f^\pm-p\|^\pm\leqslant e^\pm$

定理20 在条件M之下有估计

$$\|f^+-M(f^-)\|^+\leqslant e^++g(2e^-).$$

证明 实际上，$\|f^+-M(f^-)\|^+\leqslant\|f^+-p\|^++\|M(f^-)-p\|^+\leqslant e^++g(\|M(f^-)-p\|^-)\leqslant e^++g(2e^-)$．

条件S：1）设E为线性赋范空间，有两种范$\|*\|^\pm$，$S:E\to E$；2）对任何$e_1,e_2\in E$，有$\|S(e_1)-S(e_2)\|^+\leqslant\psi(\|e_1-e_2\|^-)$，$\psi$非降；3）对$f^\pm\in E$存在$p\in E$，$\|f^\pm-p\|^\pm\leqslant e^\pm$，$\|S(p)-p\|^+\leqslant\eta$．

定理21 若条件S成立，则有$\|f^+-S(f^-)\|^+\leqslant e^++\eta+\psi(e^-)$．

证明 实际上，$\|f^+-S(f^-)\|^+\leqslant\|f^+-S(p)\|^++\|S(p)-S(f^-)\|^+\leqslant\|f^+-p\|^++\|S(p)-p\|^++\psi(\|p-f^-\|^-)\leqslant e^++\eta+\psi(e^-)$．

条件P：1）$E_\pm$为二线性空间，分别定义范数$\|*\|_\pm$；2）$\lambda\in[a,b)$，$a\geqslant 0$，$E_\lambda\subset E_-$，$E_{\lambda_1}\subset E_{\lambda_2}(\lambda_1\leqslant\lambda_2)$；3）由$e_1,e_2\in E_\lambda$导致$\pm(e_1-e_2)\in E_{\sigma(\lambda)}$，$\sigma(\lambda)$为$\lambda$之某函数；4）$H:\bigcup E_\lambda\to E_+$为线性，并对$e\in E_\lambda$有$\|He\|_+\leqslant\varphi(\lambda, \|e\|_-)$，$\varphi(x,y)$对$x,y$为非降；5）对某$f^-\in E_-$有$p_\lambda\in E_\lambda$，$\|f^--p_\lambda\|_-\leqslant e(\lambda)$，$e(\lambda)$非升；6）$u>1$为任给常数，$u\eta<b$．

定理22 在条件P之下有估计

$$\|Hp_\lambda-Hp_\eta\|_+\leqslant\frac{2}{\log u}\int_\lambda^{u\eta}\varphi\left[\sigma(t),\ 2e\left(\frac{t}{u}\right)\right]\frac{dt}{t}$$

证明 不妨设$\eta\geqslant\lambda$，令$u=c^2$，选整数m_1，m_2使得$c^{m_1-1}\leqslant\lambda<c^{m_1}$，$c^{m_2-1}\leqslant\eta<c^{m_2}<c^{-2}b$．记$q_m$为$Hp_{c^m}$，则$\|q_{m_1}-q_{m_2}\|_+\leqslant\|q_{m_1}-q_{m_1+1}\|_++\cdots+\|q_{m_2-1}-q_{m_2}\|_+\leqslant\varphi(\sigma(m_1+1),\ 2e(m_1+1))+\cdots+\varphi(\sigma(m_2),\ 2e(m_2))\leqslant\int_{m_1+1}^{m_2+1}\varphi(\sigma(c^y),\ 2e(c^{y-2}))dy$．利用三角不等式并化简即证定理．

注 9 本节定理叫MSP转化原则，是逼近转化分析中较普适的工具，可推广于半序范等情况．结合[9-11]的工作，我们可发展复变函数逼近的一种转化理论．

五、单边变分原理

设E_x，E_y为二线性空间，E_y有极限概念，$G(x_0, h, \varepsilon)=\{x_0+\lambda h|0\leqslant\lambda<\varepsilon\}\subset E_x$，$g:G\to E_y$，$gh\Delta 0_y$，$h\in\{h\}\subset G$，$\Delta\in\{\geqslant,=,\leqslant\}$导致$g\Delta 0_{xy}$(为$E_y\uparrow E_x$的线性子空间的零元素)，则称$\{h\}$为$\Delta$完全 若$E_y$有序结构，按传统方式定义算子对$h\in M$的极值．若$\delta f(x_0, h)\Delta 0_y, h\in M$，则称$x_0$是$f$相对于$M$的$\Delta$型变分驻值，若$f'(x_0)\Delta 0_{xy}$，则称$x_0$是$f$的$\Delta$型导算子驻值．这时显然有

定理23 设$f:G(x_0, h, \varepsilon)\to E_y$于$x=x_0$处有一阶变分，$h\in M$，为了$f$在$x=x_0$处具有相对于$M$的极小（极大），必须对$h\in M$有$\delta f(x_0, h)\geqslant 0_y$（相应地$\delta f(x_0, h)\leqslant 0_y$）．因此，若$\delta f(x_0, h)$对$h$是可加的，并存在$h_0$，$\pm h_0\in M$，则$f$在$x_0$有极值的必要条件是$\delta f(x_0,h_0)=0_y$，这时若$\{h_0\}$为$\{=\}$完全，则必$f'(x_0)=0_{xy}$，若二阶变分存在则极小（极大）的必要条件为$\delta^2 f(x_0, h_0^2)\geqslant 0_y$（相应为$\delta^2 f(x_0, h_0^2)\leqslant 0_y$）．一般若$M$为$\{\geqslant\}$完全，$f$于$x=x_0$有相对于$M$的极小，则必有$f'(x_0)\geqslant 0_{xy}$．若$M$为$\{\leqslant\}$完全，$f$于$x=x_0$有相对于$M$的极大，则必$f'(x_0)\leqslant 0_{xy}$．

若$\delta f(x, h)$有定义，记$M^*=\{h|\delta f(x, h)=0_y, x\in M\}$，$M_*=\{x|\delta f(x, h)=0_y, h\in M\}$，并对某一确定的$a\in E_x$，记$f_*(x)=f(x)-\delta f(x, x-a)$．这时经简单计算可得到

定理24 f于$x_0\in M$对M^*(或于$x_0\in M_*$对M)取变分$\{=\}$驻值，并且这时$f_x(x_0)=f(x_0)$对$x_0\in M\cap(M^*+a)$或$x_0\in M_*\cap(M+a)$成立．若δf对h是可加齐次的，

$$\text{则 } \delta f_*(x_0, h)=\delta f(x_0, h)-\delta f(x_0+\lambda h,h)-\frac{1}{\lambda}\delta f(x_0+\lambda h,x_0-a)$$

因而若等式右边$\Delta 0_y$，则$\delta f_*(x_0,h)\Delta 0_y$．特别是若$\delta f(x,h)$对$x$为连续，$\delta f(x_0+\lambda h,x_0-a)=0(\lambda)$，$x_0\in M\cap(M^*+a)$或$x_0\in M_*\cap(M+a)$，则$f_*(x_0)=f(x_0)$，$\delta f_*(x_0, h)=0_y$．

当δf存在时，并在有关定义域上$f(x)\geqslant f(x')+\delta f(x', x-x')$，则称$f$为变分凸的，把$\geqslant$改为$\leqslant$，则相应条件称为$f$为变分凹的．这时有

定理25 若f为变分凸，$M\subset E_x$，则对$x_*\in M_*, x\in M+x_*$有$f(x)\geqslant f(x_*)$，因而若$x_*\in M_*\cap(M+x_*)$，则x_*是f在$M+x_*$上的最小点．若$\delta f(x, h)$对h为可加，$x_*\in M_*$，$x\in M+a, x_0\in M_*\cap(M+a)$，则$f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*)$．若$x_0$是$f$在$M+a$中的极值点，而且$M+a\supset G(x_0, \pm(x_0-a),\varepsilon)$，则$x_0\in M_*\cap(M+a)$，并且$x_0$是$f$在$M+a$中的极小点，是$f_*$在$M_*$中的极大点，$\delta f(x_0, x_0-a)=0_y$，因而若$\delta f(x_0+\lambda(x_0-a), x_0-a)=0(\lambda)$，则$\delta f_*(x_0, x_0-a)=0_y$．

证明 当$x_*\in M_*, x\in M+x_*$时，$\delta f(x_*, x-x_*)=0_y$，由f之变分凸性得$f(x)\geqslant f(x_*)$．

若$x_*\in M_*$，$x\in M+a$，则$\delta f(x_*, x-a)=0_y$，由$\delta f(x, h)$对h的可加性得$\delta f(x_*, x-x_*)=-\delta f(x_*, x_*-a)$．再由凸性定义得$f(x)\geqslant f_*(x_*)$．对公共点$x_0\in M_*\cap(M+a)$即得定理中不等式．

若x_0是f在$M+a$中的极值点，而且$M+a$包含x_0的x_0-a邻域，由定理23得$\delta f(x_0, x_0-a)=0_y$，由本定理不等式，知x_0是f在$M+a$中的极小点，是f_*在M_*中的极大点．由定理24得$\delta f_*(x_0, x_0-a)=0_y$．证完．

设$D\subset E_x^2$，H：$D\to E_y$；$M\subset E_x$，A：$M\to E_x$．若$H(Ax, x')=H(x, Ax')$，称A对

H为对称，若$H(Ax, x)\geqslant 0_y$，则称A对H为正．经简单计算可得

定理26 设H，H_1：$D\to E_y$，H为双线性，H_1对第二分量为线性，H_2：$E_x\to E_y$为线性，g，$g_1\in E_x$，$g_0\in E_y$，A为齐次可加并对H对称，$f(x)=H(Ax-2g, x)+H_1(g_1, x)+H_2(x)+g_0$．则$\delta f(x, h)=2H(Ax-g, h)+H_1(g_1,h)+H_2(h)$，$f_*(x)=2H(Ax-g,a)-H(Ax, x)-H_1(g_1, x-a)-H_2(x-a)+g_0$，$\delta f_*(x,h)=2H(A(a-x), h)-H_1(g_1,h)-H_2(h)$．若$A$对$H$为正，则$f$为变分凸，$f_*$为变分凹（因而可用定理25）．

若$2H(Ax_0-g, h)+H_1(g_1, h)+H_2(h)\Delta 0_y$，$h\in M$，则称$x_0$是广义方程$Ax\Delta g$相对于$M$的（$H$，$H_1$，$H_2$）广义解．由定理24—26可得下列许多结果．

定理27 在上定理条件下，$Ax\Delta g$相对于M的(H，H_1，H_2)广义解等价于f相对于M的Δ变分驻值解，而且下列三命题等价：1) $x=x_0$使f对h半邻域为极小（极大），$h\in M$；2)$\delta f(x_0, h)\geqslant 0_y$（$\leqslant 0_y$），$h\in M$；3)$x_0$是$Ax\geqslant g$($Ax\leqslant g$)相对于$M$的($H$，$H_1$，$H_2$）广义解．

定理28 在定理26条件下，若a是方程$Ax=g$对M的（H，0，0)广义解，则$\delta f(x,h)=-\delta f_*(x,h)$，$h\in M$．因而若$x_0$是$f$对$M$的变分驻值点，则必是$f_*$对$M$的$\bar{\Delta}$（为$\Delta$的不等式之反）变分驻值点，因而极大极小相反，并且$x_0$是$Ax\Delta g$相对于$M$的（$H$，0，0)广义解．而当$\delta f(x_0, h)=0_y$时，$f(x_0)=f_*(x_0)$．一般若$x_0$是方程$Ax=g$对$M$的($H$，$H_1$，$H_2$）广义解，则$x_0$是相对于$M$的极值点，并且$f(x_0)=f_*(x_0)$．若$A$相对于$H$为正，则$x_0$是$f$相对于$M$的极小点和$f_*$相对于$M$的极大点．

定理29 在定理26条件下，若定义域B为闭凸集，A对H为正，则下三命题等价：1) f于$x=x_0\in B$取极小；2) $\delta f(x_0,x-x_0)\geqslant 0_y,x\in B$；3) $Ax\geqslant g$对$h=x-x_0$，$x\in B$，于x_0有（H，H_1，H_2）广义解．

定理30 在定理26条件下，若A对H为正，$M\subset E_x$，则对$x_*\in M_*$，$x\in M+x_*$有$f(x)\geqslant f(x_*)$，因而若$x_*\in M_*\cap(M+x_*)$，则x_*是f在$M+x_*$中的极小点．若$x_*\in M_*,x\in M+a,x_0\in M_*\cap(M+a)$，则$f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*)$．因而这时$\delta f(x_0, x-x_0)\geqslant 0_y$，$\delta f_*(x_0, x_*-x_0)\geqslant 0_y$，并且$x_0$是$Ax\geqslant g$对于$h=x-x_0$（$x\in M+a$）的($H$，$H_1$，$H_2$）广义解．

定理31 在定理26条件下，若A对H为正，$M\subset E_x$，x_0是f在$M+a$中的极值点，$M+a\subset G(x_0, \pm(x_0-a),e)$，则$x_0\in M_*\cap(M+a)$，并且$\delta f(x_0,x_0-a)=0_y$，$f$在$x_0\in M+a$为极小，$f_*$在$x_0\in M_*$为极大，并且$f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*)$，同时$x_0$是$Ax\geqslant g$对于$h=x-x_0(x\in M+a)$和是$Ax=g$对于$x_0-a$的($H$，$H_1$，$H_2$)广义解．

定理23－31是古典极值定理、变分学、古典互易定理、二次泛函变分定理及单边变分原理的一种统一与发展．

参 考 文 献

1. 关肇直，《泛函分析讲义》．高等教育出版社(1958)．
2. 吴学谋，泛系分析的研究与应用(Ⅰ)(Ⅳ)，武汉大学学报，第三期(1978)，87—105；第一期(1979)，113—125；华中工学院学报，乏晰数学专辑，第二期(1980)，1—14．
3. 吴学谋，乏晰性、可靠性与泛系分析(Ⅰ)-(Ⅳ)，华中工学院学报，第三期(1978)，56—67；第四期(1978)，44—54；武汉钢铁学院学报，第一期(1979)，7—16；第四期(1979)，1—9．
4. Рябенький，В. С. и Филиппов，А. Ф.，Об устойчивости разностных уравнений，Гостехиздат，(1956)．
5. Richtmyer，R. D.，Difference methods for initial-value problems，Interscience Publishers，Inc.(1957)．
6. Arrow，K. J.，Hurwicz，L. and Uzawa，H.，Studies in linear and non-linear programming，Stanford University Press，(1958)．
7. Дубовицкий，А. Я. и Милютин，А. А.，Задачи на экстремум при наличии ограничений Ж выч. Матем. и Мат. Физ. 5:3(1965)，395—453．
8. 吴学谋，变分转化分析(Ⅰ)，应用数学和力学，第一卷，第一期，(1980)．
9. 吴学谋，解析函数的一些边界性质与嵌入不等式(Ⅰ)(Ⅱ)，华中工学院学报，第三、四期，(1979)．
10. 吴学谋，复函数逼近的一些研究(Ⅰ)(Ⅱ)，武汉建材学院学报，第三、四期，(1980)．
11. 吴学谋，Faber 级数的误差转化分析，(将载科学通报)．

Variation Transforming Analysis (Ⅱ)

Wu Xue-mou

(Wuhan Digital Engineering Research Institute, Wuhan)

Abstract

This paper introduces some related concepts of pansystems analysis (such as pansystem, pansystem space, pansystem logic space, pometric pansystem, etc.), and develops the convex set theory, Banach's theorem of completeness, Lax equivalence theory, theorems of Kuhn-Tucker type and Dubovitsky-Milutin type into the pometric pansystem forms, which are different from traditional results. Furthermore, general stability of operator equations and MSP transforming principles of approximation are investigated, and in the final section we present a sort of extension and unified functional framework concerning traditional extremal theorem, variation calculus, reciprocity principle, variation theorem of quadratic functional and unilateral variation principles.