

# 关于含裂纹的复合材料的一个 细观断裂模型\*

欧阳邕 陆美子

(上海复旦大学) (山东矿业学院)

(1981年1月26日收到)

## 摘 要

本文研究复合材料的小范围屈服断裂过程. 首先, 提出了含裂纹复合材料的一个细观断裂模型, 其中对裂纹顶端的外部地区采用连续介质各向异性描述, 对裂纹顶端的小范围地区则采用多相的描述. 多相区中考虑三种材料成分, 即纤维、界面和基体, 它们都可被看作是非线性的, 并计入有限变形的影响. 我们应用边界层——非线性有限元方法作出本问题的解.

## 一、前 言

近年来, 复合材料在工程中的应用日益广泛, 纤维增强复合材料的发展体现着材料设计的新方向. 因为复合材料中的纤维一般具有高的强度, 而基体则有良好的韧性, 二者复合将使材料兼有两方面之长, 使材料更加完美.

复合材料中一般含有裂纹, 在受力环境下裂纹会扩展, 引起材料破坏. 采用统计方法研究复合材料的强度<sup>[1-3]</sup>难以揭示断裂过程的力学机理. 此外, 复合材料有着不同于各向同性材料的明显特点. 从纤维对基体的不同铺向来看, 主要是各向异性问题. 利用 Leknitskii<sup>[4]</sup>关于各向异性固体的结果, Sih 和 Liebowitz<sup>[5]</sup>获得了二维直线各向异性情况裂纹顶端应力和应变场的解析表式.

但是, 基于各向异性固体理论的结果, 仍然不能解释各种可能的裂纹扩展方式及断裂机理. 从实验观察来看, 人们了解到存在着多种可能的断裂过程, 诸如纤维断裂、基体微裂 (crazing)、基体—纤维脱胶 (debonding)、裂纹桥接 (crack bridging) 等, 这些现象只有将裂纹顶端附近的材料视为多相的才能进行说明, 只有这样才能揭示断裂过程中各相的复杂情况. 此外, 在裂纹顶端附近, 由于应力和应变集中的结果, 应变可达到 1 的量级, 这里的材料 (特别是韧性的基体材料) 将深深地进入屈服, 因此, 对小范围屈服的情况, 裂纹顶端附近必须视为有限弹塑性和多相的.

\* 本文是作者在美国得克萨斯大学计算力学研究所 (TICOM) 访问期间完成的. 作者对所长 Oden 教授给予的支持表示感谢

本文研究复合材料的小范围屈服断裂过程. 首先, 提出了含裂纹复合材料的一个细观断裂模型, 其中对裂纹顶端的外部地区采用连续介质各向异性描述, 对裂纹顶端的小范围地区则采用多相的描述. 多相区中考虑三种材料成分, 即纤维、界面和基体, 它们均可被视为是非线性的(非线性弹性或弹塑性, 粘弹塑性的), 且计入有限变形的影响. Rice<sup>[6]</sup>在研究小范围屈服的弹塑性断裂时, 采用了边界层近似法. 这里我们应用边界层——非线性有限元方法作出本问题的解.

## 二、一个细观断裂模型, 外部解

对于复合材料的细观断裂模型, 我们必须考虑两个主要点, 即裂纹顶端断裂区的多相特性和其外部区域各向异性特性. 如图 1 所示, 我们将包含裂纹的复合材料分为二个区域:

1. 外部区: 这里的材料视为均匀正交各向异性的连续介质, 且材料是弹性的;
2. 内部区: 这里的材料视为多相的, 且我们考虑基体、纤维和界面三种组分, 这些组分的本构特性可以是非线性弹性、弹塑性或粘弹塑性的.

依据边界层近似的理论<sup>[7]</sup>, 外部区的连续介质解和内部区的多相解应该满足相互联接的边界条件, 即

$$\text{(外部解)} \Big|_{r \rightarrow 0}^{\text{内边界}} = \text{(内部解)} \Big|_{r \rightarrow \infty}^{\text{边界外}} \quad (2.1)$$

现在来寻求外部解. 对小范围屈服情况, 微小的多相屈服区仅给外部区域的连续介质解答以很小的影响. 略去内部区域对外部解的影响, 考虑平面问题, 设材料是直线性各向异性的, 材料的本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\sigma_{xy} \\ \epsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\sigma_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

引入应力函数  $U(x, y)$ :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

平衡方程自动满足, 代入协调方程, 得:

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$

容易证明, 特征方程为

$$a_{11}\mu_i^4 - 2a_{16}\mu_i^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu_i^2 - 2a_{26}\mu_i + a_{22} = 0 \quad (2.3)$$

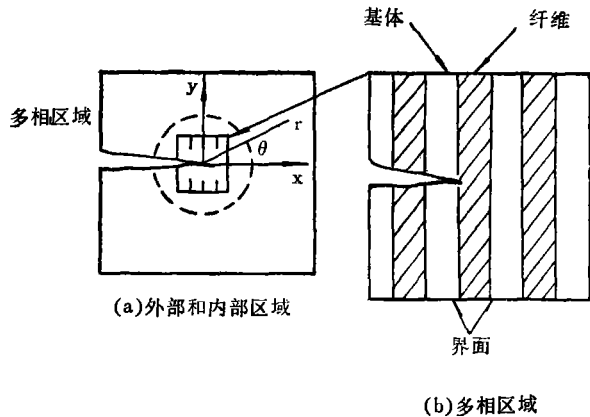


图 1 一个细观断裂模型

它仅具有复根或纯虚根, 不具有实根. 设(2.3)仅有不同之根, 为

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \beta_1 > 0 \\ s_2 &= \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \beta_2 > 0 \\ \mu_3 &= \bar{\mu}_1, \quad \mu_4 = \bar{\mu}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

应力函数可表为

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= 2\operatorname{Re}[U_1(z_1) + U_2(z_2)] \\ z_1 &= x + s_1 y \\ z_2 &= x + s_2 y \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

记

$$\phi(z_1) = \frac{dU_1}{dz_1}, \quad \psi(z_2) = \frac{dU_2}{dz_2} \quad (2.6)$$

我们有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}[s_1^2 \phi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}[\phi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \sigma_{xy} &= -2\operatorname{Re}[s_1 \phi'(z_1) + s_2 \psi'(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

位移为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 2\operatorname{Re}[p_1 \phi(z_1) + p_2 \psi(z_2)] \\ u_y &= 2\operatorname{Re}[q_1 \phi(z_1) + q_2 \psi(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

这里,  $p_i, q_i (i=1, 2)$  为:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= a_{11}s_1^2 + a_{12} - a_{16}s_1, \quad p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12} - a_{16}s_2 \\ q_1 &= (a_{12}s_1^2 + a_{22} - a_{26}s_1)/s_1, \quad q_2 = (a_{12}s_2^2 + a_{22} - a_{26}s_2)/s_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

通过求解复变函数论中的 Riemann-Hilbert 问题<sup>(8)</sup>, 再将解在裂纹顶端展开可得: 对小的  $r$ , 应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{k_1}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right) \right] \\ &+ \frac{k_2}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_2^2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_1^2}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{k_1}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_1}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_2}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right) \right] \\ &+ \frac{k_2}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{1}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right) \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{k_1}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right) \right] \\ &+ \frac{k_2}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

和位移

$$\left. \begin{aligned}
 u_x &= k_1 \left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} Re \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 p_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} - s_2 p_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\} \\
 &\quad + k_2 \left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} Re \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [p_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} - p_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\} \\
 u_y &= k_1 \left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} Re \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 q_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} - s_2 q_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\} \\
 &\quad + k_2 \left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} Re \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [q_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} - q_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

其中  $k_1 = \sigma\sqrt{\pi a}$ ,  $k_2 = \tau\sqrt{\pi a}$ ,  $\sigma, \tau$  为远处均匀应力,  $a$  为半裂纹长度.

### 三、内部多相屈服区的裂纹稳定扩展解

如前所述, 我们将内部多相屈服区视为三组分的, 非线性弹性或弹塑性的及有限变形, 利用方程(2.1), 我们将(2.11)作为内部解的边界条件. 为了在边界条件(2.11)下求解内部区域, 我们采用非线性有限元近似方法.

1. 多相区的有限元模型, 图 2 示出了多相区中三种组分的有限元离散化, 每一组分材料均用四节点矩形元素作为离散表示, 各元素的材料被认为是均匀的, 在逐步加载下, 一旦元素中的等效应力达到屈服限材料就视为弹塑性的, 又一旦材料的等效应力达到了破坏的临界值, 则放松此元素的节点力到零以模拟破坏, 而下一步加载就将此元素从结构中去掉, 这样, 我们就能模拟裂纹扩展的细致过程.

2. 非线性有限元的增量方程, 对于复杂的大位移、大应变问题, 数学解析方法难以奏效, 我们利用增量法进行线性化以作出问题的解. 这里, 我们采用 Lagrange 描述, 使我们可一劳永逸地在加载前的初始构形  $C_0$  上进行有限元离散化 (见图 3).

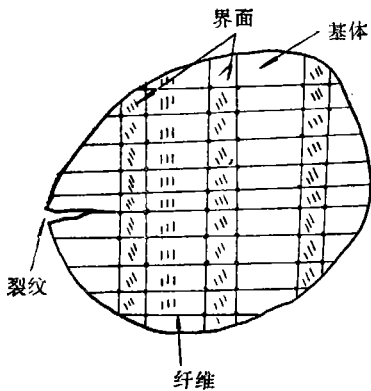


图 2 有限元模型

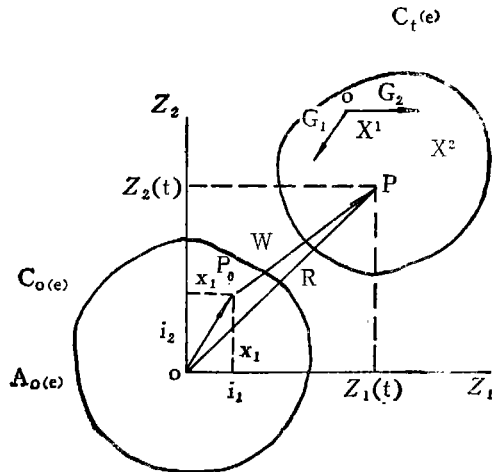


图 3  $C_0(e)$  运动到  $C_t(e)$

考虑一个典型元素(e)的运动, 它将初始构形  $C_0(e)$  变为初始时刻的构形  $C_0(e)$ , 在往后的时刻  $t + \Delta t$ , 元素占据构形  $C_{t+\Delta t}^{(e)}$ , 它任意地靠近  $C_t^{(e)}$ . 设位移  $u(x, t) = u^N(t) \psi_N(x)$ ,

$N = 1, 2, \dots, N_e, N_e$  为元素之节点数,  $x$  为初始构形  $C_{0(\omega)}$  中的坐标. 又设  $\hat{u}_i^N, t_0^j, S_0^i, \hat{F}_0^i$  以及  $u_i^N, t^j, \bar{S}_i, \hat{F}_i$  分别为相应于  $C_i^{(e)}$  和  $C_{i+\Delta t}^{(e)}$  的节点位移、应力、表面力和体力. 于是,

$$\left. \begin{aligned} u_i^N &= \hat{u}_i^N + \xi_i^N, & t^j &= t_0^j + S^j \\ \bar{S}_i &= S_0^i + R_i, & \hat{F}_i &= \hat{F}_0^i + B_i \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中  $\xi_i^N, S^j, R_i$  和  $B_i$  是从  $C_i^{(e)}$  到  $C_{i+\Delta t}^{(e)}$  时  $\hat{u}_i^N, t_0^j, S_0^i$  和  $\hat{F}_0^i$  的增量,  $\bar{S}_i$  是关于初始构形  $C_{0(\omega)}$  单位面积表面拉力的笛卡尔分量,

$$\bar{S}_i = t^m \hat{n}_m (\delta_i + \psi_{M,j}, u_i^M) = \hat{S}^i (\delta_i + \psi_{M,j}, u_i^M) \quad (3.2)$$

$\hat{n}_i$  为  $C_{0(\omega)}$  中未变形表面单位法向量关于构形之基  $i$  的笛卡尔分量.

设  $\delta\gamma_{ij}$  为由  $\xi^N$  引起的 Green 应变张量之增量, 材料的本构方程可写为:

$$S^{ij} = C^{ijmn} \delta\gamma_{mn} \quad (3.3)$$

而

$$\delta\gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_K^N} \xi_K^N = \frac{1}{2} (\psi_{N,i} \delta_K^j + \psi_{N,j} \delta_K^i + \psi_{M,i} \psi_{M,j} \hat{u}_K^M + \psi_{M,i} \psi_{N,j} \hat{u}_K^M) \xi_K^N \quad (3.4)$$

由此得:

$$S^{ij} = C^{ijmn} \psi_{N,m} (\delta_{nK} + \psi_{M,n} \hat{u}_K^M) \xi_K^N \quad (3.5)$$

(3.3) 中的张量  $C^{ijmn}$  系材料的增量弹塑性矩阵, 在实际计算中, 我们可考虑某些具体的材料, 例如与应变率无关的各向同性硬化 Prandtl-Reuss 材料. 于是  $C^{ijmn}$  仅依赖于材料参数和应力状态, 对有限变形,  $C^{ijmn}$  可得自下列关系:

$$S^{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ g^{iK} g^{jL} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{iL} g^{Kj} - \frac{3\sigma^{iL} \sigma^{Kj}}{2\bar{\sigma}^2 \left( \frac{2}{3} H' + \frac{E}{1+\nu} \right)} \right] \delta\gamma_{KL} \quad (3.6)$$

(塑性加载)

$$S^{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ g^{iK} g^{jL} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{iL} g^{Kj} \right] \delta\gamma_{KL} \quad (3.7)$$

(弹性加载或塑性卸载)

其中  $\sigma^{ij} = t^{ij} / \sqrt{G}$ ,  $G$  为 Green 变形张量的第三不变量.

而

$$\sigma^{iL} = \sigma^{iL} - \frac{1}{3} g^{iL} \sigma^{KK}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^{iL} \sigma^{iL}} \quad (3.8)$$

$E$  为弹性模量,  $\nu$  为波松比,  $g^{ij}$  为度量张量,  $H'$  是简单拉伸应力—对数塑性应变曲率的斜率. 为了计入应力历史, 可用以下的 Von Mises 屈服准则

$$\bar{\sigma} = H \left( \sqrt{d\epsilon_p} \right) \quad (3.9)$$

其中

$$\bar{d}\epsilon_p = \sqrt{\left[\left(\frac{2}{3}\right) d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p\right]} \quad (3.10)$$

且  $d\epsilon_{ij}^p$  为塑性应变分量的增量, 实际计算中, 可用幂次硬化功:

$$\epsilon_p = \frac{1.1\sigma_s}{nE} \left[ \left(\frac{\bar{\sigma}}{1.1\sigma_s}\right)^n - \left(\frac{1}{1.1}\right)^n \right] \quad (3.11)$$

根据普遍的有限元增量方程<sup>[9]</sup>, 并应用以上的说明, 我们可得有限元增量刚度方程:

$$(\bar{K}_{NM}^{iK} + G_{NM}^{iK} + D_{NM}^{iK} - R_{NM}^{iK}) \zeta_K^M = \delta p_N \quad (3.12)$$

其中

$$\text{增量刚度矩阵} \quad \bar{K}_{NM}^{iK} = \int_{V_{0(c)}} C^{imK} \psi_{N,m} \psi_{M,m} dv_0 \quad (3.13)$$

$$\text{初应力矩阵} \quad G_{NM}^{iK} = \int_{V_{0(c)}} t_0^{mi} \psi_{N,m} \psi_{M,i} \delta^{iK} dv_0 \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \text{初位移矩阵} \quad D_{NM}^{iK} = & \int_{V_{0(c)}} C^{mrs} \psi_{N,m} \psi_{M,r} [\psi_{R,i} \hat{u}_i^R (\delta_{SK} + \psi_{D,s} \hat{u}_R^D) \\ & + \psi_{R,s} \hat{u}_K^R \delta_{ii}] dv_0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{初载荷矩阵} \quad R_{NM}^{iK} = \int_{A_{0(c)}} \psi_N [S_0^i \psi_{M,i} \delta_{ij}^S + (\delta_{ij} + \psi_{R,i} \hat{u}_i^R) P_M^{iK}] dA_0 \quad (3.16)$$

相应于给定外力增量的广义节点力增量为

$$\delta P_{N_i} = \int_{V_{0(c)}} P_0 B_i \psi_N dv_0 + \int_{A_{0(c)}} \psi_N (\delta_{ij} + \psi_{M,i} \hat{u}_i^M) Q_j^i \delta T^r dA_0 \quad (3.17)$$

其中

$$\delta S^i = Q_j^i (\hat{u}_i^M, T_0^i) \delta T^i + P_M^{iK} (\hat{u}_i^M, T_0^i) \zeta_K^M \quad (3.18)$$

且  $T_0^i$  是  $C^{(e)}$  上给定的实际面力, 它与变形无关,  $\delta T^i$  是  $T_0^i$  的给定增量,  $Q_j^i$  和  $P_M^{iK}$  仅为  $C^{(e)}$  中物体的态函数, 在以上式子(3.12)中初载荷刚度矩阵的重要性乃是首先由 J. T. Oden<sup>[10]</sup> 提出的.

利用关系

$$\left. \begin{aligned} \delta P_{\Delta i} &= \sum_{\alpha=1}^E \hat{\Omega}_{\Delta}^{\alpha N} \delta P_{N_i}^{(\alpha)}, u_{i\omega}^N - \hat{\Omega}_{\Delta}^{\alpha N} U_{\Delta}^{\alpha} \\ \zeta_{i\omega}^N &= \hat{\Omega}_{\Delta}^{\alpha N} \delta U_{\Delta}^{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

并且  $\hat{\Omega}_{\Delta}^{\alpha N}$  的记号如[9]中所述,  $E$  为元素数,  $\delta P_{\Delta i}$ 、 $\delta U_{\Delta}^{\alpha}$  为连络模型中节点  $\Delta$  处的广义力和位移增量, 则总体刚度方程为

$$(\sum \bar{K}_{N\Delta}^{iK} + \sum G_{N\Delta}^{iK} + \sum D_{N\Delta}^{iK} + \sum R_{N\Delta}^{iK}) \delta U_{\Delta}^L = \delta P_{N_i} \quad (3.20)$$

其中

$$\sum K_{N\Delta}^{iK} = \sum_{e=1}^E \hat{\Omega}_{\Delta}^{(e)M} \int_{V_{\alpha(e)}} C^{ijmK} \psi_{N,i} \psi_{M,m} dv_0 \quad (3.21)$$

$$\sum G_{N\Delta}^{iK} = \sum_{e=1}^E \hat{\Omega}_{\Delta}^{(e)M} \int_{V_{\alpha(e)}} t_0^{ni} \psi_{N,m} \psi_{M,i} \delta^{iK} dv_0 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \sum D_{N\Delta}^{iK} = \sum_{e=1}^E \hat{\Omega}_{\Delta}^{(e)M} \int_{V_{\alpha(e)}} & C^{mirs} \psi_{N,i} \psi_{M,r} [ \psi_{R,i} \hat{\Omega}_{\Delta}^{(e)R} \hat{U}_i^{\Delta} (\delta_{SK} + \psi_{P,S} \\ & \cdot \hat{\Omega}_{\Delta}^{(e)F} \hat{U}_K^{\Delta}) + \psi_{R,S} \delta_{ii} \hat{\Omega}_{\Delta}^{(e)R} \hat{U}_K^{\Delta} ] dv_0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\sum R_{N\Delta}^{iK} = \sum_{e=1}^E \hat{\Omega}_{\Delta}^{(e)M} \int_{V_{\alpha(e)}} \psi_N [ \hat{S}_0^{ij} \psi_{M,i} \delta_i^K + (\delta_{ij} + \psi_{R,i} \hat{\Omega}_{\Delta}^{(e)R} \hat{U}_i^{\Delta}) P_M^{iK} ] dA_0 \quad (3.24)$$

求解(3.20)时, 注意将节点位移分量分为两组  $\delta U_1$ 、 $\delta U_2$ , 使  $\delta U_1$  对应于外边界上之节点值, 于是可写:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

由此即知, 已知  $\delta U_1$  后, 内节点的增量位移为

$$\delta U_2 = -K_{22}^{-1} K_{21} \delta U_1 \quad (3.26)$$

而外边界上之节点力增量可求得为

$$\delta P = K_{11} \delta U_1 + K_{12} \delta U_2 = (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) \delta U_1 \quad (3.27)$$

这样, 通过求解非线性有限元的增量方程, 我们就能逐步作出裂纹在多相区中稳定扩展的完全解.

## 参 考 文 献

1. Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, (1975)
2. Zweben, C. and Rosen, B. W., *J. M. P. S.*, 18, (1970), 189-206.
3. Sabodh, K. G., *Analysis of Structural Composite Materials*, (1973)
4. Leknitskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day, San Francisco, (1963)
5. Sih, G. C. et al., in *Fracture*, 2 (H. Liebowitz, ed.), (1968).
6. Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, 34, (1967), 287-298.
7. Van Dyke, M., *Perturbation Theory in Fluid Mechanics*, Academic Press, New York, (1964).
8. Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen, Holland, (1953).
9. Oden, J. T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill Book Company, (1972)
10. Oden, J. T., *J. Struct. Div. ASCE*, 95, No. ST6, (1969), 1379-1381.

## On a Micromechanical Model for Cracked Reinforced Composites

Ouyang Chang

Lu Mei-zi

(Fudan University, Shanghai)

(Shandong Mining College, Shandong)

### Abstract

In this paper, We consider the fracture process of small scale yielding for reinforced composites. In the outer region of the crack tip, we use the anisotropic continuum description, while for the crack tip region we use the heterogeneous micromechanical model. Three components in heterogeneous region, namely, fibre, interface and matrix, may be considered as nonlinear. The effect of finite deformation is also considered. We construct the solution of the problem by using the combined boundary layer-nonlinear finite element method.