应用数学和力学，第2卷第3期（1981年6月）
Applied Mathematics and mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

Orr-Sommerfeld方程的特征值问题及展开定理*

周恒　李骊
（天津大学，1980年6月18日收到）

摘　要

Orr-Sommerfeld 方程的特征值问题及展开定理，对于研究流体层流稳定问题具有重要意义，因此，有不少作者研究过．但据文献[6]，这一问题还不能认为已完全解决．因此在本文中，我们进一步研究了这一问题，得到的具体结果是：展式的系数满足一个Paley-Wiener型不等式，它是通常完备正交系展式系数所满足的Bessel等式的一个推广；而且证明了展式是绝对一致收敛的．

一、Orr-Sommerfeld 方程特征值的渐近分布

Orr-Sommerfeld 方程形如下式[1]：

$$(D^2-\alpha^2)^2\varphi=i\alpha R\{(\bar{u}-c)(D^2-\alpha^2)\varphi-(D^2\bar{u})\varphi\} \tag{1.1}$$

其中 $\varphi=\varphi(y)$，α,R 是正的已给参数，$\bar{u}=\bar{u}(y)$ 是已知函数，c 是待定的特征值，$i=\sqrt{-1}$，$D\equiv\dfrac{d}{dy}$ 是微分算子．未知特征函数 $\varphi(y)$ 满足边界条件：

$$y=\pm1\text{ 时，}\qquad \varphi=\frac{d\varphi}{dy}=0 \tag{1.2}$$

在条件（1.2）下解（1.1）并确定对应的 c 及 $\varphi(y)$，这就是 Orr-Sommerfeld 方程的特征值问题．

为了研究方便，将（1.1）改写为

$$\varphi^{(\mathrm{IV})}+(i\alpha Rc-2\alpha^2)\varphi''+(\alpha^4-i\alpha^3Rc)\varphi=i\alpha R[\bar{u}\varphi''-(\alpha^2\bar{u}+\bar{u}'')\varphi] \tag{1.3}$$

先令 $\bar{u}\equiv0$，这时（1.3）的通解为

$$\Phi=A_1e^{\alpha y}+A_2e^{-\alpha y}+A_3e^{\omega y}+A_4e^{-\omega y} \tag{1.4}$$

其中 $$\omega=\sqrt{i\alpha Rc-\alpha^2}\,i$$

利用边界条件（1.2），可得其特征方程为

* 钱伟长推荐．

$$\Delta(\omega)=\begin{vmatrix} e^{\alpha} & e^{-\alpha} & e^{\omega} & e^{-\omega} \\ e^{-\alpha} & e^{\alpha} & e^{-\omega} & e^{\omega} \\ \alpha e^{\alpha} & -\alpha e^{-\alpha} & \omega e^{\omega} & -\omega e^{-\omega} \\ \alpha^{-}e^{\alpha} & -\alpha e^{\alpha} & \omega e^{-\omega} & -\omega e^{\omega} \end{vmatrix}$$

$$=-(\alpha+\omega)^2(e^{2(\alpha+\omega)}+e^{-2(\alpha+\omega)})+(\alpha+\omega)^2(e^{2(\alpha-\omega)}+e^{-2(\alpha-\omega)})-8\alpha\omega \tag{1.5}$$

对于 $R_e\omega>-h$ ($h>0$ 是任一给定正数)，$e^{-k\omega}$ (k 为任意正数) 将有界，故当 $|\omega|\to\infty$ 时上式可化为

$$\Delta(\omega)=\omega^2e^{2\omega}\left[(e^{-4\omega}-1)(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]=0$$

对于 $R_e\omega<-h$，$e^{k\omega}$ 将有界，故此时 (1.5) 又可化为

$$\Delta(\omega)=\omega^2e^{-2\omega}\left[(e^{4\omega}-1)(e^{-2\alpha}-e^{2\alpha})+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]=0$$

总之，不论何种情况，只要 $\alpha\neq0$ 且有界，我们均可得到如下估式：

$$\Omega_n=\frac{1}{2}n\pi i+O\left(\frac{1}{\Omega_n}\right) \tag{1.6}$$

此处我们把 ω_n 改写为 Ω_n，是为了与 $\bar{u}\neq0$ 的情形加以区别．此外，由[3]或[4]中的结果还知，Ω_n 是纯虚数．

下面研究 $\bar{u}\neq0$ 的情形．利用常数变易法，容易求得 (1.3) 之通解为：

对于 $R_e\omega<-h$

$$\varphi=A_1e^{\alpha y}+A_2e^{-\alpha y}+A_3e^{\omega y}+A_4e^{-\omega y}+\int_y^1(e^{\alpha(y-\xi)}-e^{-\alpha(y-\xi)})\frac{Q(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi+\int_{-1}^{y}e^{\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi+\int_y^1e^{-\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi \tag{1.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\beta(\omega)&=4\alpha(\omega^2-\alpha^2)\\ \gamma(\omega)&=4\omega(\omega^2-\alpha^2)\\ Q(\xi)&=i\alpha R[\bar{u}(\xi)\varphi''(\xi)-(\alpha^2\bar{u}(\xi)+\bar{u}''(\xi))\varphi(\xi)]\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

对于 $R_e\omega>-h$，可得相应的方程．

以下我们将研究 $\bar{u}\neq0$ 且 $\bar{u}'$，$\bar{u}''$ 均为有界时 (1.3) 的特征值问题与 $\bar{u}\equiv0$ 时 (1.3) 的特征值问题间的关系．我们先研究 $R_e\omega<-h$ 的情形．首先，令 $A_1=1$，$A_2=A_3=A_4=0$，则得

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=e^{\alpha y}+\int_y^1(e^{\alpha(y-\xi)}-e^{-\alpha(y-\xi)})\frac{Q(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi+\int_{-1}^{y}e^{\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi+\int_y^1e^{-\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi\\ \varphi_1'&=\alpha e^{\alpha y}+\int_y^1(\alpha e^{\alpha(y-\xi)}+\alpha e^{-\alpha(y-\xi)})\frac{Q(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi+\int_{-1}^{y}\omega e^{\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi-\int_y^1\omega e^{-\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1''=\alpha^2e^{\alpha y}+&\int_y^1(\alpha^2e^{\alpha(y-\xi)}-\alpha^2e^{-\alpha(y-\xi)})\frac{Q(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi\\&+\int_{-1}^y\omega^2e^{\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi+\int_y^1\omega^2e^{-\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi\end{aligned}\right|$$

将上式看作关于 φ_1，φ_1'，φ_1'' 的积分方程组，并注意到（1.8）中关于 $Q(\xi)$ 表达式内 φ_1，φ_1'' 的系数有界以及 $R_e\omega<-h$，则不难看出它们满足文献[2]中第44页上引理的条件，因此可得估式

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=e^{\alpha y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\\\varphi_1'&=\alpha e^{\alpha y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\\\varphi_1''&=\alpha^2e^{\alpha y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.10}$$

再令 $A_2=1$，$A_1=A_3=A_4=0$，同理可得

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2&=e^{-\alpha y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\\\varphi_2'&=-\alpha e^{-\alpha y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\\\varphi_2''&=\alpha^2e^{-\alpha y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.11}$$

这样我们已得到了(1.3)的两组特解．为了得到另两组特解，可令 $A_3=1$，$A_1=A_2=A_4=0$，这时有

$$\begin{aligned}\varphi_3=e^{\omega y}+&\int_y^1(e^{\alpha(y-\xi)}-e^{-\alpha(y-\xi)})\frac{Q(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi\\&+\int_{-1}^ye^{\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi+\int_y^1e^{-\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi\end{aligned}$$

至于 φ_3'，φ_3'' 的表达式，除第一项分别为 $\omega e^{\omega y}$ 与 $\omega^2e^{\omega y}$ 之外，其余的有关积分各项分别与(1.9)中的 φ_1'，φ_1'' 相同．注意到 $|\omega|$ 可以无限的增大，故已不能直接引用上述引理．但我们可以先对 φ_3 的形式加以适当变换．为此，注意到

$$\int_y^1(e^{\alpha(y-\xi)}-e^{-\alpha(y-\xi)})\frac{Q(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi=2\int_y^1 sh\alpha(y-\xi)\frac{Q(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi$$

然后将(1.8)中 $Q(\xi)$ 的表达式代入并利用分部积分法，即可将上述 φ_3 的表达式化为

$$\begin{aligned}\varphi_3=e^{\omega y}&-2i\alpha R\int_y^1[\operatorname{sh}\alpha(y-\xi)\bar{u}(\xi)]'\frac{\varphi_3'(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi\\&-2i\alpha R\int_y^1\operatorname{sh}\alpha(y-\xi)[\alpha^2\bar{u}(\xi)+\bar{u}''(\xi)]\frac{\varphi_3(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi\\&+\int_{-1}^ye^{\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi+\int_y^1e^{-\omega(y-\xi)}\frac{Q(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi\end{aligned}$$

至于 φ_3'，φ_3''，也可用同样的方法对其形式作相应的变换．下面再作变换

$$\varphi_3=e^{\omega y}z_3,\quad \varphi_3'=\omega e^{\omega y}z_3',\quad \varphi_3''=\omega^2e^{\omega y}z_3''$$

将它们代入 φ_3，φ_3'，φ_3'' 的表达式并分别除以 $e^{\omega y}$，$\omega e^{\omega y}$，$\omega^2e^{\omega y}$，则得

$$\left.\begin{aligned}
z_3=&1-2i\alpha R\int_y^1[\mathrm{sh}\,\alpha(y-\xi)\bar{u}(\xi)]'\frac{\omega}{\beta(\omega)}e^{-\omega(y-\xi)}z_3'(\xi)d\xi\\
&-2i\alpha R\int_y^1\mathrm{sh}\,\alpha(y-\xi)[\alpha^2\bar{u}(\xi)+\bar{u}''(\xi)]\frac{1}{\beta(\omega)}e^{-\omega(y-\xi)}z_3(\xi)d\xi\\
&+\int_{-1}^y e^{\omega(y-\xi)}\frac{Q_1(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi+\int_y^1 e^{-\omega(y-\xi)}\frac{Q_1(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi\\
z_3'=&1+\int_y^1\alpha e^{(\alpha-\omega)(y-\xi)}\frac{Q_2(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi+\int_y^1\alpha e^{-(\alpha+\omega)(y-\xi)}\frac{Q_2(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi\\
&+\int_{-1}^y\omega\frac{Q_2(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi-\int_y^1\omega e^{-2\omega(y-\xi)}\frac{Q_2(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi\\
z_3''=&1+\int_y^1\alpha^2e^{(\alpha-\omega)(y-\xi)}\frac{Q_3(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi-\int_y^1\alpha^2e^{-(\alpha+\omega)(y-\xi)}\frac{Q_3(\xi)}{\beta(\omega)}d\xi\\
&+\int_{-1}^y\omega^2\frac{Q_3(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi+\int_y^1\omega^2e^{-2\omega(y-\xi)}\frac{Q_3(\xi)}{\gamma(\omega)}d\xi
\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

其中　　$Q_j=i\alpha R[\omega^{3-j}\bar{u}(\xi)z_3''(\xi)-\omega^{1-j}(\alpha^2\bar{u}(\xi)+\bar{u}''(\xi))z_3(\xi)]\quad (j=1,2,3)$

注意到 $R_e\omega<-h$ 以及 $\bar{u}'(\xi)$，$\bar{u}''(\xi)$ 有界，故如将 (1.12) 看作 z_3，z_3'，z_3'' 的积分方程组，则它们满足前述引理条件，由此可得

$$z_3=1+O\left(\frac{1}{\omega}\right),\quad z_3'=1+O\left(\frac{1}{\omega}\right),\quad z_3''=1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

从而得

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_3&=e^{\omega y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\\
\varphi_3'&=\omega e^{\omega y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\\
\varphi_3''&=\omega^2e^{\omega y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{1.13}$$

最后，令 $A_4=1$，$A_1=A_2=A_3=0$，同理可得

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_4&=e^{-\omega y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\\
\varphi_4'&=-\omega e^{-\omega y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\\
\varphi_4''&=\omega^2e^{-\omega y}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

对于 $R_e\omega>-h$，可得到同样结果．

总之，在 $\bar{u}\neq0$，$\bar{u}'$，$\bar{u}''$ 有界条件下，方程 (1.3) 具有下述形式的特解：

$$\left.\begin{array}{lll}\varphi_1=e^{\alpha y}[1] & \varphi_1'=\alpha e^{\alpha y}[1] & \varphi_1''=\alpha^2e^{\alpha y}[1]\\ \varphi_2=e^{-\alpha y}[1] & \varphi_2'=-\alpha e^{-\alpha y}[1] & \varphi_2''=\alpha^2e^{-\alpha y}[1]\\ \varphi_3=e^{\omega y}[1] & \varphi_3'=\omega e^{\omega y}[1] & \varphi_3''=\omega^2e^{\omega y}[1]\\ \varphi_4=e^{-\omega y}[1] & \varphi_4'=-\omega e^{-\omega y}[1] & \varphi_4''=\omega^2e^{-\omega y}[1]\end{array}\right\}\tag{1.15}$$

其中 $$[1]=1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

利用这些估式并根据 φ 的边界条件，就可得知如下的特征方程

$$\Delta^*(\omega)=\begin{vmatrix} e^{\alpha}[1] & e^{-\alpha}[1] & e^{\omega}[1] & e^{-\omega}[1]\\ e^{-\alpha}[1] & e^{\alpha}[1] & e^{-\omega}[1] & e^{\omega}[1]\\ \alpha e^{\alpha}[1] & -\alpha e^{-\alpha}[1] & \omega e^{\omega}[1] & -\omega e^{-\omega}[1]\\ \alpha e^{-\alpha}[1] & -\alpha e^{\alpha}[1] & \omega e^{-\omega}[1] & -\omega e^{\omega}[1]\end{vmatrix}$$

$$=\Delta(\omega)+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\delta(\omega)\tag{1.16}$$

其中 $\Delta(\omega)$由 (1.5) 定义，而 $\delta(\omega)$中关于 ω 的最高次项其形式为 $\omega^2e^{\pm2\omega}$. 因此在 $R_e\omega>-h$ 时，有 $\delta(\omega)/\omega^2e^{2\omega}=O(1)$，而 $R_e\omega<-h$ 时，有 $\delta(\omega)/\omega^2e^{-2\omega}=O(1)$. 据此，并参照(1.5)式下面的两式，即可得到:

在 $R_e\omega>-h$ 时

$$\Delta^*(\omega)=\omega^2e^{2\omega}\left[(e^{-4\omega}-1)(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\tag{1.17}$$

在 $R_e\omega<-h$ 时

$$\Delta^*(\omega)=\omega^2e^{-2\omega}\left[(e^{4\omega}-1)(e^{-2\alpha}-e^{2\alpha})+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]\tag{1.18}$$

由此可见，在 $|\omega|\to\infty$ 时，可得

$$\omega_n=\frac{1}{2}n\pi i+O\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\tag{1.19}$$

注意到 $\omega_n=\sqrt{i\alpha Rc_n-\alpha^2}\,i$，因此 (1.3) 式在边界条件 (1.2) 下的特征值 c_n 的渐近表达式为

$$c_n=-\frac{1}{\alpha R}\left(\frac{1}{4}n^2\pi^2+\alpha^2\right)i+O(1)\tag{1.20}$$

二、Orr-Sommerfeld 方程的展开定理

为了便于对 $\bar{u}\neq0$ 时方程 (1.3) 的特征函数进行某些估计，我们首先对 $\bar{u}\equiv0$ 的情况加以研究.

当 $\bar{u}\equiv0$ 时，设 Ω_n 为其特征值，则对应的未正规化的特征函数是

$$\Phi_{n_0}=\begin{vmatrix} e^{\alpha y} & e^{-\alpha y} & e^{\Omega_n y} & e^{-\Omega_n y}\\ e^{-\alpha} & e^{\alpha} & e^{-\Omega_n} & e^{\Omega_n}\\ \alpha e^{\alpha} & -\alpha e^{-\alpha} & \Omega_n e^{\Omega_n} & -\Omega_n e^{-\Omega_n}\\ \alpha e^{-\alpha} & -\alpha e^{\alpha} & \Omega_n e^{-\Omega_n} & -\Omega_n e^{\Omega_n}\end{vmatrix}$$

$$=A_1e^{\alpha y}+A_2e^{-\alpha}+A_3e^{\Omega_n y}+A_4e^{-\Omega_n y}\tag{2.1}$$

其中 A_1，A_2 等分别为 $e^{\alpha y}$，$e^{-\alpha y}$ 等的代数余子式．

令 $A_1=B_1+B_2$，$A_2=B_1-B_2$，$A_3=B_3+B_4$，$A_4=B_3-B_4$，则（2.1）变为

$$\Phi_{n_0}=B_1\operatorname{ch}\alpha y+B_2\operatorname{sh}\alpha y+B_3\operatorname{ch}\Omega_n y+B_4\operatorname{sh}\Omega_n y$$

又当 $\bar{u}\equiv 0$ 时特征方程（1.5）可化为

$$8(\alpha\operatorname{th}\alpha-\Omega\operatorname{th}\Omega)(\alpha\operatorname{cth}\alpha-\Omega\operatorname{cth}\Omega)=0$$

它相当于两个方程

$$\Omega_n\operatorname{th}\Omega_n=\alpha\operatorname{th}\alpha \tag{2.2,a}$$

$$\Omega_n\operatorname{cth}\Omega_n=\alpha\operatorname{cth}\alpha \tag{2.2,b}$$

将满足（2.2,a）的 Ω_n 代入 A_1，A_2，A_3，A_4 的表达式中并利用 B_1，B_2，B_3，B_4 的定义，可得

$$B_1=4(\alpha^2-\Omega_n^2)\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\Omega_n\operatorname{ch}\Omega_n,\qquad B_2=0$$

$$B_3=4(\Omega_n^2-\alpha^2)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\Omega_n,\qquad B_4=0$$

将它们均除以 $4(\alpha^2-\Omega_n^2)\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\Omega_n$ 之后，可得与（2.2,a）的根相对应的特征函数（仍未正规化）为

$$\Phi_n^{(a)}=\frac{\operatorname{ch}\Omega_n}{\operatorname{ch}\alpha}\operatorname{ch}\alpha y-\operatorname{ch}\Omega_n y \tag{2.3,a}$$

同样，和（2.2,b）的根相对应的特征函数为

$$\Phi_n^{(b)}=\frac{\operatorname{sh}\Omega_n}{\operatorname{sh}\alpha}\operatorname{sh}\alpha y-\operatorname{sh}\Omega_n y \tag{2.3,b}$$

现转入研究 $\bar{u}\not\equiv 0$ 的情况．注意到（1.15）、则得和特征值 ω_n 相对应的特征函数是

$$\varphi_{n0}=\begin{vmatrix} e^{\alpha y}[1] & e^{-\alpha y}[1] & e^{\omega_n y}[1] & e^{-\omega_n y}[1] \\ e^{-\alpha}[1] & e^{\alpha}[1] & e^{-\omega_n}[1] & e^{\omega_n}[1] \\ \alpha e^{\alpha}[1] & -\alpha e^{-\alpha}[1] & \omega_n e^{\omega_n}[1] & -\omega_n e^{-\omega_n}[1] \\ \alpha e^{-\alpha}[1] & -\alpha e^{\alpha}[1] & \omega_n e^{-\omega_n}[1] & -\omega_n e^{\omega_n}[1] \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

由（1.6）和（1.9），可知有关系式

$$\omega_n=\Omega_n+O\left(\frac{1}{\Omega_n}\right)$$

因而 $\qquad e^{\pm\omega_n y}=e^{\pm\Omega_n(1)y}=e^{\pm\Omega_n y}[1]$

从而有 $\qquad e^{\pm\omega_n y}[1]=e^{\pm\Omega_n y}[1]$

$$\pm\omega_n e^{\pm\omega_n y}[1]=\pm\Omega_n e^{\pm\Omega_n y}[1]$$

据此，（2.4）可化为

$$\varphi_{n0}=\Phi_{n_0}+O(\Omega_n) \tag{2.5}$$

由此，可得到与（2.3,a），（2.3,b）相应的特征函数分别为

$$\varphi_n^{(a)}=\Phi_n^{(a)}+O\left(\frac{1}{\Omega_n}\right) \tag{2.6,a}$$

$$\varphi_n^{(b)}=\Phi_n^{(b)}+O\left(\frac{1}{\Omega_n}\right) \tag{2.6,b}$$

总之，不论对那一种情况，我们都可得到

$$\varphi_n=\Phi_n+O\left(\frac{1}{\Omega_n}\right)=\Phi_n+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.7}$$

用类似的方法可以证明

$$\varphi_n'' = \Phi_n'' + O(1) \tag{2.8}$$

现定义两函数的内积为：

$$(\varphi, \psi) = \int_{-1}^{1} -\varphi(-\alpha^2\psi^* + \psi^{*''})dy = \int_{-1}^{1} -\psi^*(-\alpha^2\varphi + \varphi'')dy \tag{2.9}$$

其中 φ 和 ψ 都满足（1.2）型的边界条件，“ * ”表示共轭复数．据此，可定义函数的范数为

$$\begin{aligned}\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2} &= \left[\int_{-1}^{1} -\varphi(-\alpha^2\varphi^* + \varphi^{*''})dy\right]^{1/2} \\ &= \left[\int_{-1}^{1} (\alpha^2|\varphi|^2 + |\varphi'|^2)dy\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{2.10}$$

将 Φ_n 代入上式经过简单运算，可得

$$\|\Phi_n\| = O(n)$$

设正规化之后的特征函数用$\overline{\Phi}_n$表示，则

$$\overline{\Phi}_n = \frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|} = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.11}$$

至于 φ_n 的范数，注意到（2.7），（2.8），易得

$$(\varphi_n, \varphi_n) = (\Phi_n, \Phi_n) + O(n) = (\Phi_n, \Phi_n)[1]$$

所以

$$\|\varphi_n\| = \|\Phi_n\|[1]$$

据此，设正规化之后的特征函数用 $\bar{\varphi}_n$ 表示，则

$$\bar{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{\Phi_n[1]}{\|\Phi_n\|[1]} = \overline{\Phi}_n[1] = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.12}$$

利用（2.7），（2.8）还可得到

$$\bar{\varphi}_n - \overline{\Phi}_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (\bar{\varphi}_n - \overline{\Phi}_n)'' = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.13,a}$$

所以

$$\|\bar{\varphi}_n - \overline{\Phi}_n\| = \left[O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^{1/2} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \tag{2.13.b}$$

顺便指出，如设 $\bar{\psi}_n$ 为与 Orr-Sommerfeld 特征值问题相伴随（adjoint）的特征值问题的第 n 个特征函数（已正规化），则同样有

$$\bar{\psi}_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.14}$$

借助于上面这些估式，我们可以得到下述 Orr-Sommerfeld 方程的展开定理．

定理1 设 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 为 Orr-Sommerfeld 方程的特征函数族，$\{\bar{\psi}_n\}$ 为与其相伴随的特征函数族，则任一满足边界条件（1.2）且 4 次可微函数 $F(y)$，均可展为关于 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 的绝对一致收敛级数：

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{\varphi}_n \tag{2.15}$$

其中 $a_n = (F, \bar{\psi}_n)$，并且这些系数满足不等式

$$\frac{1}{M}\|F\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{m}\|F\| \tag{2.16}$$

式中 m,M 为某些常数，且 $m<M$.

证：首先，由文献[2]可知，特征函数族 $\{\bar{\Phi}_n\}$ 是完备而正交的，故任一满足相同边界条件（1.2）且4次可微函数 $\varphi(y)$，都可展为关于 $\{\bar{\Phi}_n\}$ 的绝对一致收敛级数：

$$\varphi(y)=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi,\bar{\Phi}_n)\,\bar{\Phi}_n=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\Phi}_n \tag{2.17}$$

且其系数满足关系

$$\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2=\|\varphi\|^2 \tag{2.18}$$

现定义一算子

$$T\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\varphi}_n\qquad g_n=(\varphi,\bar{\Phi}_n) \tag{2.19}$$

由于
$$\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\varphi}_n=\sum_{n=1}^{\infty}g_n[(\bar{\varphi}_n-\bar{\Phi}_n)+\bar{\Phi}_n]$$

所以
$$\|T\varphi\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\varphi}_n\right\|\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\bar{\varphi}_n-\bar{\Phi}_n)\right\|+\left\|\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\Phi}_n\right\|$$

由(2.13,b)知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|\bar{\varphi}_n-\bar{\Phi}_n\|$ 绝对收敛，故存在常数 m_1，使得 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\bar{\varphi}_n-\bar{\Phi}_n\|^2\right)^{1/2}<m_1$，据此，并利用 Schwarz 不等式，即得

$$\begin{aligned}\|T\varphi\|&\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\bar{\varphi}_n-\bar{\Phi}_n)\right\|+\left\|\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\Phi}_n\right\|\\&\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\bar{\varphi}_n-\bar{\Phi}_n\|^2\right)^{1/2}+1\right]\\&\leqslant(m_1+1)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2\right)^{1/2}=M\left(\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2\right)^{1/2}\\&=M\|\varphi\|\end{aligned} \tag{2.20}$$

其中 $M=m_1+1$. 这表明 $\|T\varphi\|$ 具有上界. 现证明 $\|T\varphi\|$ 也具有下界. 如其不然，则存在函数 φ，使

$$T\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\varphi}_n=0$$

设 $\bar{\psi}_n$ 为与 φ_n 相伴随的特征函数，由微分方程理论[2]可知

$$(\bar{\varphi}_i,\bar{\psi}_j)=\delta_{ij}$$

所以

$$0=\left(\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\varphi}_n,\bar{\psi}_n\right)=g_r \qquad n=1,2,\cdots$$

这与 $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2=\|\varphi\|^2\neq 0$ 相矛盾．故必存在一 $m>0$，使得

$$\|T\varphi\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}g_n\bar{\varphi}_n\right\|>m\|\varphi\| \tag{2.21}$$

总之，对于 $T\varphi$，我们有下面的不等式

$$m\|\varphi\|\leqslant\|T\varphi\|\leqslant M\|\varphi\| \tag{2.22}$$

由此可知，对于算子 T 而言，它的逆变换 T^{-1}，共轭变换 T^* 及逆变换的共轭变换 $(T^{-1})^*$等均存在[5]．

现令

$$\bar{\psi}_n=(T^{-1})^*\bar{\Phi}_n \tag{2.23}$$

注意到（2.19），有

$$T\bar{\Phi}_n=\bar{\varphi}_n \tag{2.24}$$

因而 $$(\bar{\varphi}_n,\bar{\psi}_m)=(T\bar{\Phi}_n,(T^{-1})^*\bar{\Phi}_m)=(T^{-1}T\bar{\Phi}_n,\bar{\Phi}_m)=(\bar{\Phi}_n,\bar{\Phi}_m)=\delta_{nm} \tag{2.25}$$

故 $\{\bar{\psi}_n\}$ 与 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 互为双正交，因此，由（2.23）所定义的 $\{\bar{\psi}_n\}$ 就是与 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 相伴随的特征函数族．在推导上述关系时，曾利用了 $\bar{u}\equiv 0$ 时方程（1.3）及边界条件（1.2）的自伴随(Self-adjoint)性．

设 $F(y)$为任一满足边界条件（1.2）且 4 次可微函数，则

$$F=T(T^{-1}F)=T\left[\sum_{n=1}^{\infty}(T^{-1}F,\bar{\Phi}_n)\bar{\Phi}_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(T^{-1}F,\bar{\Phi}_n)T\bar{\Phi}_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(F,(T^{-1})^*\bar{\Phi}_n)T\bar{\Phi}_n$$

注意到（2.23）与（2.24），于是得

$$F=\sum_{n=1}^{\infty}(F,\bar{\psi}_n)\bar{\varphi}_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{\varphi}_n \tag{2.26}$$

这表明，F 的确可展为关于 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 的级数，且其系数 $a_n=(F,\bar{\psi}_n)$ 由上式可得

$$|F|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{\varphi}_n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\bar{\varphi}_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{\varphi}_n|^2$$

由（2.12）可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{\varphi}_n|^2$ 是绝对一致收敛的．现证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 也是收敛的．为此，在（2.22）中如令 $\varphi=T^{-1}F$，则得

$$m\|T^{-1}F\|\leqslant\|F\|\leqslant M\|T^{-1}F\|$$

又
$$\|T^{-1}F\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(T^{-1}F,\bar{\Phi}_n)\bar{\Phi}_n\right\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(F,(T^{-1})^*\bar{\Phi}_n)\bar{\Phi}_n\right\|^2$$

$$=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(F,\bar{\psi}_n)\bar{\Phi}_n\right\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{\Phi}_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$$

故得
$$m\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}\leqslant\|F\|\leqslant M\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}$$

据此得

$$\frac{1}{M}\|F\|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{m}\|F\|$$

这样，我们不仅证明了展式（2.26）的系数满足不等式（2.16），而且表明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$是收敛的，从而也就证明了展式（2.26）的绝对一致收敛性.

定理 2 任一满足边界条件且 4 次可微函数 $F(y)$，可展为关于 $\{\bar{\psi}_n\}$ 的绝对一致收敛级数

$$F(y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\bar{\psi}_n \tag{2.27}$$

其中 $b_n=(F,\bar{\varphi}_n)$，并且这些系数满足不等式

$$m\|F\|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2\right)^{1/2}\leqslant M\|F\| \tag{2.28}$$

证：

$$F=(T^*)^{-1}T^*F=(T^*)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(T^*F,\bar{\Phi}_n)\bar{\Phi}_n=\sum_{n=1}^{\infty}(T^*F,\bar{\Phi}_n)(T^*)^{-1}\bar{\Phi}_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(F,T\bar{\Phi}_n)(T^*)^{-1}\bar{\Phi}_n=\sum_{n=1}^{\infty}(F,\bar{\varphi}_n)\bar{\psi}_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\bar{\psi}_n \tag{2.29}$$

这表明．F 的确可展为关于 $\{\bar{\psi}_n\}$ 的级数．此外，由 (2.22) 还可推得

$$m\|F\|\leqslant\|T^*F\|\leqslant M\|F\|$$

而
$$\|T^*F\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(T^*F,\bar{\Phi}_n)\bar{\Phi}_n\right\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(F,T\bar{\Phi}_n)\bar{\Phi}_n\right\|^2$$

$$=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(F,\bar{\varphi}_n)\bar{\Phi}_n\right\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}b_n\bar{\Phi}_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

据此得

$$m\|F\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M\|F\| \tag{2.30}$$

这就证明了展式(2.29)的系数满足不等式(2.28). 然后, 利用 Schwarz 不等式以及(2.14), (2.30), 不难证明展式(2.29)是绝对一致收敛的.

参 考 文 献

1. Lin, C. C., *Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge. (1955).
2. Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, ГИТТЛ, Москва, (1954).
3. Kamke, E., Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen I, II, III, *Math. Zeitschr*. 45 (1939), 759—787; 46 (1940), 231—250, 251—286.
4. Grohne, D., Über das spektrum bei eigenschwingungen ebener laminärströmungen, *ZAMM*, (1954), Bd 34, Nr 8/9.
5. Riesz, F. and Sz-Nagy, B., Functional Analysis, (1956). Translated from the 2nd French edition by Leo F. Boron.
6. Monin, A. S. and Yaglon, A. M., Mechanics of turbulence, *Statistical Fluid Mechanics*, I, The MIT Press, (1971).

The Eigenvalue Problem and Expansion Theorems Associated with Orr-Sommerfeld Equation

Zhou Heng   Li Li

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

The eigenvalue problem and expansion theorems associated with Orr-Sommerfeld equation, which is fundamental for the investigation of the problem of stability of laminar fluid motion, have been investigated by several authors, but the results are still imcomplete [6]. In this paper, this problem is reinvestigated, and some new results are obtained, which are: (1) The expansion series converges not only uniformly but also absolutely; (2) The coefficients of the expansion series satisfy an inequality of Paley-Wiener type, which is the natural extension of the well known Bessel equality of a complete orthogonal set.