应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

Maxwell 方程的多余阶次与恰当解

张 鸿 庆

（大连工学院，1980年6月7日收到）

摘　　要

设　　$pu=f$　　　　在Ω内

对任意f有解，其中p是任意线性常系数偏微分算子.在本文中我们证明 Maxwell 方程相当于四阶方程，齐次Maxwell 方程的一般解为

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2_{xz} & -\frac{1}{c}\partial^2_{yt} \\ \partial^2_{yz} & \frac{1}{c}\partial^2_{xt} \\ \partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\partial^2_{yt} & \partial^2_{xz} \\ -\frac{1}{c}\partial^2_{xt} & \partial^2_{yz} \\ 0 & \partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

其中φ_i满足

$$\Box\varphi_i=0 \qquad i=1.2$$

一、引　　言

在真空中一般形式的Maxwell方程可以写成

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}\ \mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathrm{j} \\ &\mathrm{rot}\ \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ &\mathrm{div}\ \mathbf{H}=0 \\ &\mathrm{div}\ \mathbf{E}=4\pi\rho \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

*作者对钱伟长教授的鼓励与帮助表示感谢.

其中ρ和j之间有关系式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\ \mathbf{j}=0 \tag{1.2}$$

(1.2)表示电荷守恒定律．在电动力学中常将E和H表示成

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{H}=\mathrm{rot}\mathbf{A}\\&\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{1}{c}\ \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

其中φ和A满足

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho\\&\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\\&\mathrm{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

(1.4)式的最后一个方程叫 Lorentz 条件.注意 (1.1) 包括八个一阶方程，阶次之和为 8，而 (1.4)包括四个二阶方程和一个一阶方程，阶次之和为 9，显然表示式(1.3)中 A 和 φ满足方程的阶次之和高于 (1.1) 各方程的阶次之和，这个解含有多余阶次，从而不是恰当的（参看[1]、[2]）．如果取j＝0，ρ＝0，(1.1)的阶次并未降低，但如果采用Colomb规范，则(1.1)的一般解可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{H}=\mathrm{rot}\ \mathbf{A}\\&\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\ \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

其中A满足

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0\\&\mathrm{div}\mathbf{A}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

(1.6)包括三个二阶方程，一个一阶方程，阶次之和为 7，低于(1.1)的总阶次，仍是不恰当的，同时也说明(1.1)不是 8 阶方程，其中包含多余阶次．由于(1.1)包含 8 个方程，只有 6 个未知函数，我们自然会猜测(1.1)中是否含有多余的方程.关系式(1.2)表明(1.1)不是对任意的 j 和ρ都有解，从而(1.1)是不独立的．将(1.1)的前两个方程两端取散度并利用(1.2)就有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\ \mathbf{E}-4\pi\rho)=0\\&\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\ \mathbf{H}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

这表明div H 与 div E—$4\pi\rho$都是不依赖于t的函数，因此只要

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{div}\ \mathbf{H}|_{t=0}=0\\&\mathrm{div}\ \mathbf{E}|_{t=0}=4\pi\rho|_{t=0}\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

就有

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho\\&\operatorname{div}\mathbf{H}=0\end{aligned}\right\}$$

所以(1.8)等价于下述问题

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\ \mathbf{H}=\frac{1}{c}\ \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\\&\operatorname{rot}\ \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\ \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\\&\operatorname{div}\mathbf{H}|_{t=0}=0\\&\operatorname{div}\mathbf{E}|_{t=0}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

(1.9)相当于六个一阶方程附加两个初始条件，一个初始条件降一阶，两个初始条件降两阶，所以(1.9)相当于四阶方程.若在(1.1)中取$\mathbf{j}=0$，$\rho=0$，并设$\mathbf{E}$和$\mathbf{H}$不依赖于t，显然不降低(1.1)的阶次，此时(1.1)变成

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\ \mathbf{H}=0\\&\operatorname{rot}\ \mathbf{E}=0\\&\operatorname{div}\mathbf{H}=0\\&\operatorname{div}\mathbf{E}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.10}$$

由(1.10)的前两式知

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi_1\\&\mathbf{H}=-\operatorname{grad}\varphi_2\end{aligned}\right\}\tag{1.11}$$

代入(1.10)的后两式就有

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\varphi_1=0\\&\Delta\varphi_2=0\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

φ_1和φ_2分别叫静电势和静磁标势，(1.12)显然与(1.10)等价，这也是(1.1)是四阶方程的旁证．本文的主要目的就是证明在广泛的条件下Maxwell方程的一般解可以用两个波动方程的解表示出来.

二、主　要　结　果

为了叙述简单假定本文所考虑的函数直到边界都是充分光滑的，在所考虑的区域上$pu=f$对任意f有解，其中p是任意不为0的线性常系数偏微分算子.由于非齐次方程组的一般解等于非齐次方程组的特解加上齐次方程组的一般解，由于非齐次方程组的特解显然存在，因此只需讨论齐次方程组即$\mathbf{j}=0$、$\rho=0$的情况．在下一节中我们将证明

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\ \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\\&\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\ \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\\&\operatorname{div}\mathbf{H}=0\\&\operatorname{div}\mathbf{E}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

的一般解可以写成

$$
\left.\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2_{xz} & -\frac{1}{c}\partial^2_{yt} \\ \partial^2_{yz} & \frac{1}{c}\partial^2_{xt} \\ \partial^2_z - \frac{1}{c^2}\partial^2_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^2_{yt} & \partial^2_{xz} \\ -\frac{1}{c}\partial^2_{xt} & \partial^2_{yz} \\ 0 & \partial^2_z - \frac{1}{c^2}\partial^2_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\
\Box\varphi_i = 0 \qquad i = 1.2
\end{array}\right\} \tag{2.2}
$$

其中 $\Box = \partial^2_x + \partial^2_y + \partial^2_z - \frac{1}{c^2}\partial^2_t$ 是波动算子.

当φ_1和φ_2不依赖t，从而**E**和**H**不依赖于t时，(2.2)式变成

$$\mathbf{E} = \text{grad}\, \partial_z \varphi_1$$

$$\mathbf{H} = \text{grad}\, \partial_z \varphi_2$$

如果不计符号，这里 $\partial_z\varphi_1$ 相当于静电势，$\partial_z\varphi_2$ 相当于静磁标势，这与(1.11)和(1.12)是一致的，由此也可以看出我们的解阶次已经不能再降，从而是恰当的. 在一般情况下我们的解可以作如下的物理解释：整个电磁场可以看作两个波耦合的结果，对稳定场两个波分离，分别退化成静电势和静磁标势，对非稳定情况，一个以电场为主耦合磁场，一个以磁场为主耦合电场，由(2.2)可以看出耦合是反对称的.

Maxwell 方程每点有六个未知函数满足八个方程，或三个未知函数满足四个方程（按 Colomb 规范），我们的解每点两个未知函数满足两个方程，显然有优越性，对数值解这点尤其明显. 注意(2.2)式可以写成

$$
\left.\begin{array}{l}
E_1 = \partial_x\partial_z\varphi_1 - \frac{1}{c}\partial_t\partial_y\varphi_2 \\
E_2 = \partial_y\partial_z\varphi_1 + \frac{1}{c}\partial_t\partial_x\varphi_2 \\
E_3 = \partial_z\partial_z\varphi_1 - \frac{1}{c^2}\partial_t\partial_t\varphi_2
\end{array}\right\} \tag{2.3}
$$

令

$$
\left.\begin{array}{l}
x_1 = x,\quad x_2 = y,\quad x_3 = z,\quad x_4 = ict \\
\partial_y\varphi_2 = A_1,\quad \partial_x\varphi_2 = -A_2,\quad \frac{1}{c}\partial_t\varphi_1 = A_3,\quad \partial_z\varphi_1 = iA_4
\end{array}\right\} \tag{2.4}
$$

将(2.4)代入(2.3)并注意$\frac{1}{c}\partial_t = i\frac{\partial}{\partial x_4}$，则有

$$\left.\begin{aligned}E_1&=i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)\\E_2&=i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)\\E_3&=i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

(2.5)与电动力学四维空间中的矢势一标势表示法完全一致.从(2.4)可知A_1、A_2、A_3、A_4是不独立的，容易验证

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=0\tag{2.6}$$

这就是Lorentz条件.(2.5)中A_i满足方程

$$\Box A_i=0\qquad i=1、2、3、4$$

这个解虽然满足的方程的阶次较高，但$(\partial_y\varphi_2,\ -\partial_x\varphi_2,\ \frac{1}{c}\partial_t\varphi_1,\ -\partial_z\varphi_1)$构成四维空间的一个矢量，满足相对论协变性，表达物理规律时有它自己的优点.

当$\mathbf{j}\neq 0$、$\rho\neq 0$时，按经典的电动力学方法容易给出Maxwell方程的一般解.这里还可以给出求非齐次方程解的一个方法，首先设

$$\mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\0\\j_3\end{bmatrix}\tag{2.7}$$

仍然设

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\partial^2_{xz}&-\frac{1}{c}\partial^2_{yt}\\\partial^2_{yz}&\frac{1}{c}\partial^2_{xt}\\\partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{bmatrix}\\\begin{pmatrix}H_1\\H_2\\H_3\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial^2_{yt}&\partial^2_{xz}\\-\frac{1}{c}\partial^2_{xt}&\partial^2_{yz}\\0&\partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

注意(1.1)可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,(\mathbf{E}+i\mathbf{H})=\frac{i}{c}\frac{\partial(\mathbf{E}+i\mathbf{H})}{\partial t}+i\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\\&\mathrm{div}\,(\mathbf{E}+i\mathbf{H})=4\pi\rho\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

将(2.8)代入(2.9)，并注意(2.7)，容易验证(2.9)的第一个式子中的前两个方程自动满足，而第三、第四个方程分别为

$$-\frac{1}{c}\partial_t\Box\varphi_2+\frac{i}{c}\partial_t\Box\varphi_1=-i4\pi j_3$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}+i\mathbf{H})=\partial_z\Box(\varphi_1+i\varphi_2)=4\pi\rho$$

由此可知

$$\left.\begin{aligned}&\Box\partial_t\varphi_1=-4\pi j_3\\&\Box\partial_z\varphi_1=4\pi\rho\\&\Box\varphi_2=0\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

(2.10) 的前两个方程可以归结为一个方程，实际上根据电荷守恒定律 $\partial_t\rho+\partial_z j_3=0$，置 $4\pi\rho=\partial_z f_3$，$4\pi j_3=-\partial_t f_3$，则 (2.10) 的前两个式子都可归结为 $\Box\varphi_1=f_3$，因此可以认为 φ_1、φ_2满足方程

$$\left.\begin{aligned}&\Box\varphi_1=f_3\\&\Box\varphi_2=0\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

一般情况下可以将j和ρ分解成

$$\begin{pmatrix}j_1\\j_2\\j_3\\\rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j_1\\0\\0\\\rho_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\j_2\\0\\\rho_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\j_3\\\rho_3\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\frac{\partial j_i}{\partial x_i}=0\qquad i=1、2、3$$

对应(2.12)右端每一项的解都可以作出来，将这三个解迭加就得到我们所需要的解.

三、公式 (2.2) 的推导

在推导(2.2)之前，需要引用下述的定义和定理（参看[1]、[2]）：

定义 设p和q是线性常系数偏微分算子，若对 $pu=0$ 的任意解u都有v存在使得 $qv=u$，$pv=0$，则称p与q满足条件Q.

定理 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

a_{ij}是线性常系数偏微分算子，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式，E是A_{3j}与A_{j3}的最大公因子，$A_{j3}=EB_{j3}$，$A_{3j}=EB_{3j}(j=1、2、3)$，设a_{11}和a_{12}满足条件Q，A_{32}和B_{33}满足条件Q，则

$$A\mathbf{u}=0 \tag{3.2}$$

的一般解可以表示成

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a_{12}&B_{31}\\0&-a_{11}&B_{32}\\0&0&B_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\varphi\\\psi\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

其中φ和ψ分别为方程

$$E\varphi=0$$
$$\frac{|A|}{E}\psi=0 \tag{3.4}$$

的任意解，其中$|A|$表示A的行列式.

这个定理是[1]中定理的特例，为了验证两个算子是否满足条件Q，[1]中引理3给出了下述的结果：

等价定理 设p、q是线性常系数偏微分算子，并满足本书开始时的假设，则下述命题是等价的：

(Ⅰ) p与q满足条件Q；

(Ⅱ) $pqu=0$的任意解u可以写成$u=u_1+u_2$，其中u_1与u_2分别满足$pu_1=0$与$qu_2=0$；

(Ⅲ) 设m是$pu=0$的解空间，则$qm=m$，即m是q的不变子空间.

推论1 若p与q满足条件Q，则q与p满足条件Q

推论2 若p与q、p与r皆满足条件Q，则p与qr满足条件Q.

推论3 若p与q满足条件Q，则p与$q+pr$满足条件Q.

等价定理及其推论为验证两个算子满足条件Q提供了工具.

现在我们来推导(2.1)的一般解，用与一、同样的方法可以证明(2.1)与问题

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}\ \mathbf{H}=\frac{1}{c}\ \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\\&\mathrm{rot}\ \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\ \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\\&\mathrm{div}\ \mathbf{H}|_{t=0}=0\\&\mathrm{div}\ \mathbf{E}|_{t=0}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

等价，而(3.5)可以写成

$$\mathrm{rot}\ (\mathbf{E}+i\mathbf{H})=\frac{i}{c}\ \frac{\partial(\mathbf{E}+i\mathbf{H})}{\partial t} \tag{3.6}$$

$$\mathrm{div}\ (\mathbf{E}+i\mathbf{H})|_{t=0}=0 \tag{3.7}$$

对(3.6)

$$A=\begin{vmatrix}\frac{i}{c}\partial_t & \partial_z & -\partial_y\\ -\partial_z & \frac{i}{c}\partial_t & \partial_x\\ \partial_y & -\partial_x & \frac{i}{c}\partial_t\end{vmatrix}$$

$$A_{31}=\partial^2_{zx}+\frac{i}{c}\partial^2_{yt}\qquad A_{32}=\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\ \partial^2_{xt}$$

$$A_{33}=-\frac{1}{c^2}\partial^2_t+\partial^2_z\qquad |A|=\frac{i}{c}\partial_t\Box$$

如果我们假设∂_t与∂_z满足条件Q，$\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\ \partial^2_{xt}$与$\partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t$满足条件$Q$，则根据前述定理

(3.6)的一般解为

$$\mathbf{E}+i\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial^2_{zx}+\dfrac{i}{c}\,\partial^2_{yt} \\ 0 & 0 & \partial^2_{zy}-\dfrac{i}{c}\,\partial^2_{xt} \\ 0 & 0 & \partial^2_z-\dfrac{1}{c^2}\,\partial^2_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

其中φ是复函数，满足方程

$$|A|\varphi=\frac{i}{c}\partial_t\square\varphi=0 \tag{3.9}$$

由于

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}+i\mathbf{H})=\partial_z\square\varphi$$

因此φ满足

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t\square\varphi=0 \\ &\partial_z\square\varphi|_{t=0}=0 \end{aligned}\right\}$$

由于φ满足(3.9)，假定∂_t与$\square$满足条件Q，根据等价定理，(3.9)的解可以写成

$$\varphi=\varphi_1(x,y,z,t)+\varphi_2(x,y,z)$$

其中φ_1是满足$\square\varphi_1=0$的任意函数，φ_2是满足$\partial_t\varphi_2=0$也就是不依赖于t的任意函数，从而$\partial_z\square\varphi=\partial_z\Delta\varphi_2$，由于$\partial_z\Delta\varphi_2$不依赖于$t$，并且$\partial_z\square\varphi|_{t=0}=0$，因此$\partial_z\Delta\varphi_2=0$. 再假定$\partial_z$与$\Delta$满足条件$Q$，根据等价定理

$$\varphi_2=\varphi_3+\varphi_4$$

φ_3满足$\Delta\varphi_3=0$，φ_4满足$\partial_z\varphi_4=0$，也就是$\varphi_4=\varphi_4(x,y)$，从而

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_3+\varphi_4$$

由(3.8)可知，φ_4对$\mathbf{E}+i\mathbf{H}$不起作用可以略去，而φ_3则满足波动方程，因此可以认为

$$\square\varphi=0 \tag{3.10}$$

令$\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$并代入(3.18)和(3 10)就有

$$\left.\begin{aligned} &\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \partial^2_{xz} & -\dfrac{1}{c}\,\partial^2_{yt} \\ \partial^2_{yz} & \dfrac{1}{c}\,\partial^2_{xt} \\ \partial^2_z-\dfrac{1}{c^2}\,\partial^2_t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{c}\,\partial^2_{yt} & \partial^2_{xz} \\ -\dfrac{1}{c}\,\partial^2_{xt} & \partial^2_{yz} \\ 0 & \partial^2_z-\dfrac{1}{c^2}\,\partial^2_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \\ &\square\varphi_i=0 \qquad i=1,2 \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

(3.11)就是(3.5)的一般解，从而(2.2)就是(2.1)的一般解，这个解是恰当的

现在逐一证明 ∂_z 与 ∂_t、∂_z 与 Δ、∂_t 与$\Box$、$\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}$ 与 $\partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t$满足条件$Q$. ∂_z与∂_t满足条件Q是显然的，现在验证∂_z与Δ满足条件Q，事实上$\partial_z u=0$ 的一般解为$u=u(x,y)$，设$v=v(x,y)$满足$\Delta v=u$，而v显然满足$\partial_z v=0$，从而∂_z与Δ满足条件Q，类似的可以证明 ∂_t 与$\Box$满足条件Q.

现在来验证 $\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}$ 与 $\partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t$ 满足条件 Q，注意 $\partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t=\left(\partial_z+\frac{1}{c}\partial_t\right)\cdot\left(\partial_z-\frac{1}{c}\partial_t\right)$，根据定理的推论2只要分别证明 $\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}$ 与$\partial_z-\frac{1}{c}\partial_t$、$\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}$ 与$\partial_z+\frac{1}{c}\partial_t$都满足条件$Q$，我们先证明前两个算子满足条件 Q，根据推论 1 我们只需证明$\partial_z-\frac{1}{c}\partial_t$ 与 $\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}$ 满足条件 Q，$\left(\partial_z-\frac{1}{c}\partial_t\right)u=0$ 的一般解为 $u=u(x,y,z+ct)$，问题变成能否有$v=v(x,y,z+ct)$使

$$\left(\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}\right)v=u \tag{3.12}$$

这里u、v都是复函数．令$w=z+ct$，则u、v都是x、y和 w 的函数．注意 $\partial_z=\partial_w$，$\partial_t=c\partial_w$，则(3.12)变成

$$(\partial^2_{yw}-i\partial^2_{xw})v=u \tag{3.13}$$

由于(3.13)右端是不为零的线性常系数偏微分算子，根据二、开始的假设，(3.13) 必然有解，因此 $\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}$ 与$\partial_z-\frac{1}{c}\partial_t$满足条件 Q，类似的可以证明 $\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}$ 与$\partial_z+\frac{1}{c}\partial_t$满足条件 Q. 从而由推论 1 和推论 2 可知 $\partial^2_{yz}-\frac{i}{c}\partial^2_{xt}$ 与 $\partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t$满足条件 Q，总结以上所述可以知道我们的解是完备的.

如果推导时不采用A_{31}、A_{32}、A_{33}而是采用A_{21}、A_{22}、A_{23}或A_{11}、A_{12}、A_{13}，则可以得到

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\partial^2_{xy} & \frac{1}{c}\partial^2_{zt}\\ \partial^2_y-\frac{1}{c^2}\partial^2_t & 0\\ \partial^2_{zy} & -\frac{1}{c}\partial^2_{xt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}H_1\\H_2\\H_3\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}-\frac{1}{c}\partial^2_{zt} & \partial^2_{xy}\\ 0 & \partial^2_y-\frac{1}{c^2}\partial^2_t\\ \frac{1}{c}\partial^2_{xt} & \partial^2_{yz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

$$\Box\varphi_i=0 \qquad i=1,2$$

或

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial_x^2-\dfrac{1}{c^2}\partial_t^2 & 0\\ \partial_{yx}^2 & -\dfrac{1}{c}\partial_{zt}^2\\ \partial_{zx}^2 & \dfrac{1}{c}\partial_{yt}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{bmatrix}\\[2ex] \begin{bmatrix}H_1\\H_2\\H_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \partial_x^2-\dfrac{1}{c^2}\partial_t^2\\ \dfrac{1}{c}\partial_{zt}^2 & \partial_{yx}^2\\ -\dfrac{1}{c}\partial_{yt}^2 & \partial_{zx}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{bmatrix}\\ \Box\varphi_i=0 \qquad\qquad i=1,2\end{array}\right\}\tag{3.15}$$

将(3.11)、(3.14)、(3.15)三组解迭加就可以得到Maxwell方程组的 Галёркин 一般解，这个解H. B. Berkinov[3]于1968年曾导出过，其形式为

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}=-\mathrm{grad\ div}\mathbf{g}-c^{-1}\partial(\mathrm{rot}\mathbf{f})/\partial t+c^{-2}\partial^2\mathbf{g}/\partial t^2\\ \mathbf{H}=\mathrm{grad\ div}\mathbf{f}-c^{-1}\partial(\mathrm{rot}\mathbf{g})/\partial t-c^{-2}\partial^2\mathbf{f}/\partial t^2\end{array}\right\}\tag{3.16}$$

其中f、g满足

$$(\Delta-c^{-2}\partial^2/\partial t^2)\mathbf{u}=0$$

最后指出，二、中假定$pu=f$对任意 f 有解，这要求区域满足一定条件，例如如果区域沿z方向不是凸的，则$\partial_z u=f$有可能无解，∂_z与Δ也末必满足条件 Q（可以参 看 [4]），区域所应满足的精确条件作者将在另文中论述.

参 考 文 献

1. 张鸿庆，线性算子方程组一般解的代数构造，大连工学院学报，第 3 期(1979) 1 —16 页.
2. 张鸿庆，弹性力学方程组一般解的代数理论，力学与实践，第 2 期 (1980). 50—51页
3. Berkinov, H. B., Formula for the general solutions of Boussinesq—Galerkin type for Maxwell's equations, *Dokl Akad Nauk Tadzik SSR*, 11, 9, (1968), 11—14 MR 38, 6247.
4. 王敏中，关于胡海昌解的完备性. 应用数学与力学，第 2 卷第 2 期(1981)，243—250 页.

Superfluous Order and the Proper Solution of Maxwell's Equation

Zhang Hong-qing

(Dalian Engineering Institute, Liaolin)

Abstract

Let

$$pu=f \qquad \text{in}\,\Omega$$

has solution for every f, in which p—an arbitary linear partial differential operator with constant coefficients. In this paper we prove Maxwell's equation is a four order equation and the general solution for homogeneous Maxwell's equation is given by

$$\begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial^2_{xz} & -\frac{1}{c}\,\partial^2_{yt} \\ \partial^2_{yz} & \frac{1}{c}\,\partial^2_{xt} \\ \partial^2_z-\frac{1}{c^2}\,\partial^2_t & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{c}\,\partial^2_{yt} & \partial^2_{xz} \\ -\frac{1}{c}\,\partial^2_{xt} & \partial^2_{yz} \\ 0 & \partial^2_z-\frac{1}{c^2}\partial^2_t \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

where φ_i satisfies

$$\Box\varphi_i=0 \qquad i=1,2$$