

应用广义阶梯函数解变刚度超静定梁的弯曲问题*

林新三 许宝元 熊焕国

(上海市业余工业大学, 1980年3月26日收到)

摘 要

变刚度超静定梁的弯曲问题, 可以近似的以受分段均布荷载 (包括集中荷载、集中力偶) 作用下的阶梯梁来代替. 本文推广 Heaviside 函数 $\{x-a\}^0$ 的概念, 定义一个新的函数 $\{x-a\}^n$, $n=0, 1, 2, \dots$, 称为广义阶梯函数, 并给出 $\{x-a\}^n \{x-b\}^0$ 的运算法则. 然后将抗弯刚度的倒数 $1/EJ$ 和弯矩方程 $M(x)$ 都用 $\{x-a\}^n$ 来表示. 代入挠曲线近似微分方程, 从而建立一套适用于各类直梁弯曲问题的统一解法, 并给出一般情况下挠曲线方程的通式.

一、广义阶梯函数 $\{x-a\}^n$

梁的弯曲问题中弯矩方程 $M(x)$ 一般是一个分段多项式, 而阶梯轴抗弯刚度的倒数 $1/EJ$ 是按段为常数的阶梯函数. 为了便于处理这类间断问题, 特定义如下函数

$$\{x-a\}^n = \begin{cases} (x-a)^n & x > a \\ 0 & x < a \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 a 为常数, $n=0, 1, 2, \dots$. 至于 $x=a$ 点的值, 可取其左极限, 也可取其右极限. 由 (1.1) 式所定义的函数, 在 $n=0$ 时, 即为通常的阶梯函数 (常称 Heaviside 函数), 所以称之为广义阶梯函数, 并仍用符号 $\{x-a\}^n$ 表示. 图 1 所示即为其图形, 显然除 $n=0$ 时在 $x=a$ 点间断外, 其它情况都是连续的.

由于 $\{x-a\}^n$ 保留了幂函数微分和积分运算的特性, 使用时相当方便. 这里给出对本文介绍的方法起重要作用的 $\{x-a\}^n \{x-b\}^0$ 的展开式. 根据 (1.1) 式定义 (参见图 2、图 3)

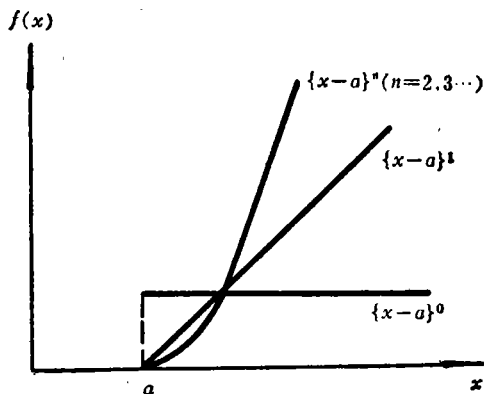


图 1

* 叶开沅推荐

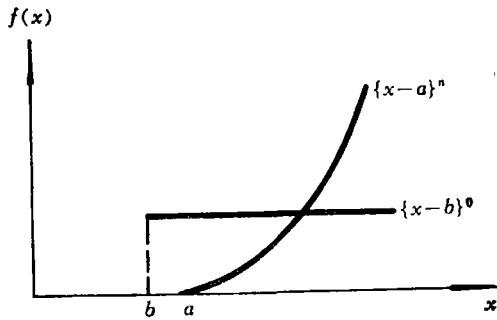


图 2

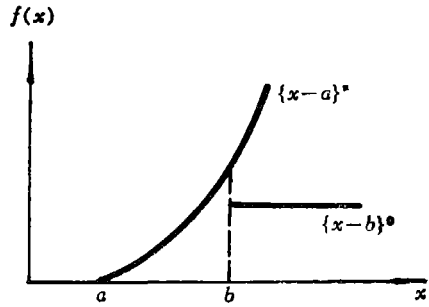


图 3

可得

$$a \geq b: \quad \{x-a\}^n \{x-b\}^0 = \{x-a\}^n \quad (1.2)$$

$$a < b: \quad \{x-a\}^n \{x-b\}^0 = \{x-b+b-a\}^n \{x-b\}^0 = [\{x-b\} + (b-a)]^n \cdot \{x-b\}^0 \textcircled{1} \quad (1.3)$$

现将将下文中用到的 $n=0, 1, 2$ 时 (1.2)(1.3) 两式的结果列表如右:

表 1 $\{x-a\}^n \{x-b\}^0$

n	$a \geq b$	$a < b$
0	$\{x-a\}^0$	$\{x-b\}^0$
1	$\{x-a\}$	$\{x-b\} + (b-a)\{x-b\}^0$
2	$\{x-a\}^2$	$\{x-b\}^2 + 2(b-a)\{x-b\} + (b-a)^2\{x-b\}^0$

二、挠曲线方程的一般解法

如图 4 所示受任意荷载作用的非均匀变截面梁的弯曲问题可简化为受分段均布荷载 (包括集中荷载, 集中力偶) 作用下的阶梯轴的弯曲问题。

本文所介绍的方法以挠曲线近似微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} \quad (2.1)$$

为基本出发点。先将 $M(x)$ 表示成 $\{x-a\}^n$ 的形式, 再将 $1/EJ$ 表示成 $\{x-a\}^0$ 的形式 ($M(x)$ 中应包含由未知的支座约束反力所引起的部份)。代入 (2.1) 式并乘开, 所得乘积中的每一项都包含 $\{x-a\}^n \{x-b\}^0$ 型的因子, 然后应用表 1 所示公式将其展开成单独 $\{x-a\}^n$ 的形式。从 (2.1) 式直接积分便可得到转角方程 $\theta(x)$ 和挠曲线方程 $y(x)$, 并由边界条件和平衡条件定出全部未知的约束反力和积分常数。问题全部得到解决。

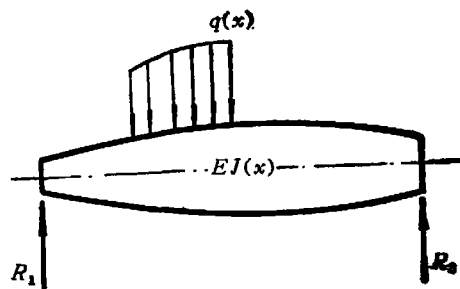
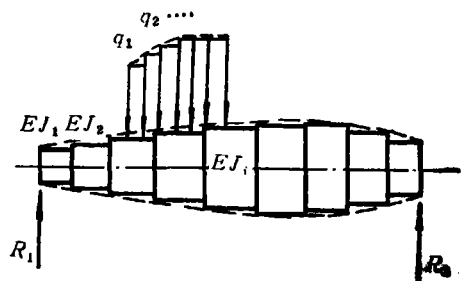


图 4

①: 证明分 $x \leq b$ 和 $x > b$ 两种情况, (1.3) 式都成立。

利用阶梯函数来处理这类间断问题具体做法很多^{[1][2][3][4]}. 本文介绍方法的特点在于定义了广义阶梯函数, 而且除 $M(x)$ 外, 再将 $1/EJ$ 也表示成阶梯函数. 在应用表 1 所给的公式后, (2.1) 式右段实际上是一个分段多项式. 由于 (2.1) 式积分后, 得到的 $\theta(x)$ 和 $y(x)$ 表达式中已不再包含 $\{x-a\}^0$ 的项, 也就是说全部是一些连续函数的组合, 不必考虑各节点处可能出现的间断问题, 从而大大简化了计算.

例 1: 设有一根一端固定一端铰支的超静定梁, 分成 AC 和 CB 两段, 各长 $L/2$. AC 段抗弯刚度为 E_0J_0 , 其中点作用有集中荷载 P .

CB 段抗弯刚度为 $2E_0J_0$, E_0J_0 为常数. 试求此梁的挠曲线方程.

解: 设 A 处约束反力为 R_A . 将 $M(x)$ 和 $1/EJ$ 写成

$$\begin{aligned}
 M(x) &= R_A \{x-0\} - P \left\{ x - \frac{L}{4} \right\} \\
 \frac{1}{EJ} &= \frac{1}{E_0J_0} \{x-0\}^0 + \left(\frac{1}{2E_0J_0} - \frac{1}{E_0J_0} \right) \left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^0 \\
 &= \frac{1}{E_0J_0} \left[\{x-0\}^0 - \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^0 \right] \\
 y'' &= \frac{M(x)}{EJ} = \frac{1}{E_0J_0} \left[\{x-0\}^0 - \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^0 \right] \left[R_A \{x-0\} - P \left\{ x - \frac{L}{4} \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{E_0J_0} \left[R_A \{x-0\} - P \left\{ x - \frac{L}{4} \right\} + \frac{L}{4} \left(\frac{P}{2} - R_A \right) \left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^0 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (P - R_A) \left\{ x - \frac{L}{2} \right\} \right] \\
 y' &= \theta_0 + \frac{1}{E_0J_0} \left[R_A \frac{\{x-0\}^2}{2} - P \frac{\left\{ x - \frac{L}{4} \right\}^2}{2} + \frac{L}{4} \left(\frac{P}{2} - R_A \right) \left\{ x - \frac{L}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (P - R_A) \frac{\left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^2}{2} \right] \\
 y &= \theta_0 \{x-0\} + y_0 + \frac{1}{E_0J_0} \left[R_A \frac{\{x-0\}^3}{6} - P \frac{\left\{ x - \frac{L}{4} \right\}^3}{6} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{L}{4} \left(\frac{P}{2} - R_A \right) \frac{\left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^2}{2} + \frac{1}{2} (P - R_A) \frac{\left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^3}{6} \right]
 \end{aligned}$$

由 $x=0$ 时 $y=0$, 得到 $y_0=0$; $x=L$ 时 $y=0$, $y'=0$ 得到

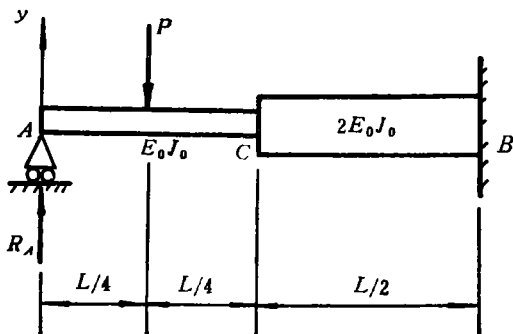


图 5

$$\begin{cases} \theta_0 + \frac{5L^2}{16E_0J_0} R_A = \frac{5L^2}{32E_0J_0} P \\ \theta_0 + \frac{L^2}{8E_0J_0} R_A = \frac{17L^2}{384E_0J_0} P \end{cases}$$

联立求解, 解出

$$R_A = \frac{43}{72} P, \quad \theta_0 = -\frac{35}{1152} \frac{L^2 P}{E_0 J_0}$$

代入 y 表示式即可得到此梁的挠曲线方程

$$y = \frac{P}{144E_0J_0} \left[-\frac{35L^2}{8} \{x-0\} + \frac{43}{3} \{x-0\}^3 - 24 \left\{ x - \frac{L}{4} \right\}^3 - \frac{7L}{4} \left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^2 + \frac{29}{6} \left\{ x - \frac{L}{2} \right\}^3 \right]$$

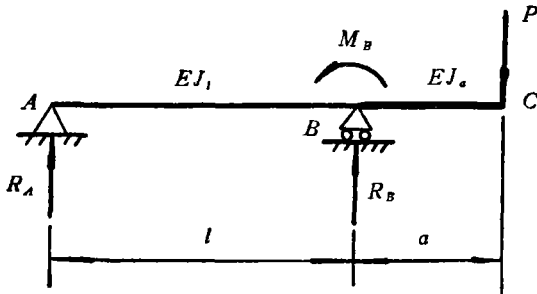


图 6

例 2: 图 6 所示为一已转化当量轴后的机床主轴. 设 AB 段抗弯刚度为 EJ_1 , BC 段抗弯刚度为 EJ_0 , 支承 A 为铰支, 支承 B 为弹性铰支, 弹性系数为 k . 轴端 C 处受集中荷载 P 作用. 试求解其全部支反力 R_A , R_B , M_B 以及 C 处挠度 f_C .

解: 以 R_A , R_B , M_B 表示其约束反力.

$$M(x) = R_A \{x-0\} + R_B \{x-l\} - M_B \{x-l\}^0$$

$$\frac{1}{EJ} = \frac{1}{EJ_1} \{x-0\}^0 + \left(\frac{1}{EJ_0} - \frac{1}{EJ_1} \right) \{x-l\}^0$$

$$y'' = [R_A \{x-0\} + R_B \{x-l\} - M_B \{x-l\}^0] \left[\frac{1}{EJ_1} \{x-0\}^0 + \left(\frac{1}{EJ_0} - \frac{1}{EJ_1} \right) \{x-l\}^0 \right]$$

$$= \frac{1}{EJ_1} [R_A \{x-0\} + R_B \{x-l\} - M_B \{x-l\}^0] + \left(\frac{1}{EJ_0} - \frac{1}{EJ_1} \right) [R_A \{x-l\} + R_B \{x-l\} - M_B \{x-l\}^0]$$

$$= \frac{1}{EJ_1} \{x-0\} R_A + \left(\frac{1}{EJ_0} - \frac{1}{EJ_1} \right) [\{x-l\} + l \{x-l\}^0] R_A + \frac{1}{EJ_0} \{x-l\} R_B - \frac{1}{EJ_0} \{x-l\}^0 M_B$$

$$y' = \theta_0 + \frac{1}{EJ_1} \frac{\{x-0\}^2}{2} R_A + \left(\frac{1}{EJ_0} - \frac{1}{EJ_1} \right) \left[\frac{\{x-l\}^2}{2} + l \{x-l\} \right] R_A$$

$$+ \frac{1}{EJ_0} \frac{\{x-l\}^2}{2} R_B - \frac{1}{EJ_0} \{x-l\} M_B$$

$$y = \theta_0 \{x-0\} + y_0 + \frac{1}{EJ_1} \frac{\{x-0\}^3}{6} R_A + \left(\frac{1}{EJ_0} - \frac{1}{EJ_1} \right) \left[\frac{\{x-l\}^3}{6} + l \frac{\{x-l\}^2}{2} \right] R_A$$

$$+ \frac{1}{EJ_a} \frac{\{x-l\}^3}{6} R_B - \frac{1}{EJ_a} \frac{\{x-l\}^2}{2} M_B$$

边界条件为: $x=0$ 处 $y=0$, 得到 $y_0=0$; $x=l$ 处 $y=0$, $y'=-\frac{M_B}{k}$. 根据边界条件和平衡条件得到

$$\begin{cases} 0 = \theta_0 l + \frac{l^3}{6EJ_l} R_A \\ -\frac{M_B}{k} = \theta_0 + \frac{l^2}{2EJ_l} R_A \\ R_A + R_B = P \\ R_A l + Pa - M_B = 0 \end{cases}$$

联立求解, 得到

$$R_A = \gamma P, \quad R_B = (1 - \gamma)P, \quad M_B = \left(\frac{\gamma l}{a} + 1 \right) Pa$$

$$\left(\theta_0 = -\frac{l^2}{6EJ_l} R_A = -\frac{l^2}{2EJ_l} R_A - \frac{M_B}{k} \right)$$

其中

$$\gamma = \frac{-\frac{a}{k}}{\frac{l^2}{3EJ_l} + \frac{l}{k}}$$

以这组解答代入 y 表示式即得挠曲线方程. 再以 $x=l+a$ 代入就可得到轴端挠度 f_c , 整理化简后得到

$$f_c = \frac{al^2\gamma P}{3EJ_l} - \frac{a^3P}{3EJ_a} = -\frac{M_B a}{k} - \frac{a^3P}{3EJ_a}$$

(和[5]中结果一致).

三、挠曲线方程的一般表示式

上节介绍的方法, 对分段较多的梁, 应用时仍较繁琐. 本节给出挠曲线方程的一般表示式, 对分段较多的阶梯梁代入一般表示式求解在一定程度上可以简化计算. 同时, 也可利用其来编排电算程序, 以及进一步作动态计算以及优化设计等.

图7所示代表阶梯轴受力的一般情况, R_i 、 M_i 中有一部份为未知的支座约束反力. 为了统一书写, 另外再规定

$$a_{-1} = a_0 = 0; \quad q_{-1} = q_0 = 0; \quad \frac{1}{E_0 J_0} = 0 \quad (3.1)$$

根据上节方法, 化简整理后, 得到

$$y'' = \sum_{i=0}^{n-1} [A_i \{x-a_i\}^0 + B_i \{x-a_i\} + \frac{C_i}{2} \{x-a_i\}^2] \quad (3.2)$$

其中

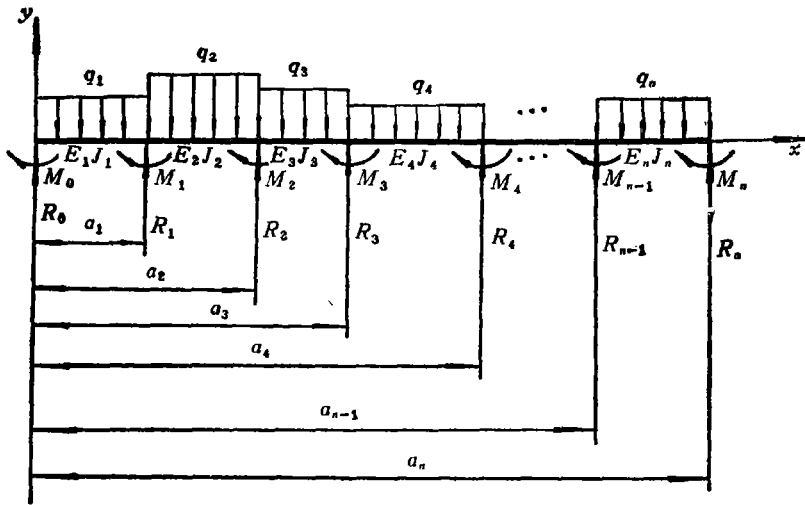


图 7

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{E_i J_i} M_i + \left(\frac{1}{E_{i+1} J_{i+1}} - \frac{1}{E_i J_i} \right) \sum_{j=0}^i [M_j + R_j(a_i - a_j) \\ &\quad + \frac{1}{2}(q_{j-1} - q_j)(a_i - a_{j-1})^2] \\ B_i &= \frac{1}{E_i J_i} R_i + \left(\frac{1}{E_{i+1} J_{i+1}} - \frac{1}{E_i J_i} \right) \sum_{j=0}^i [R_j - q_j(a_i - a_{j-1})] \\ C_i &= \frac{1}{E_i J_i} q_i - \frac{1}{E_{i+1} J_{i+1}} q_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

将(3.2)式逐项积分, 即可得到转角 \$\theta(x)\$ 和挠度 \$y(x)\$ 的通式

$$\theta(x) = \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left[A_i \{x - a_i\} + \frac{B_i}{2!} \{x - a_i\}^2 + \frac{C_i}{3!} \{x - a_i\}^3 \right] \quad (3.4)$$

$$y(x) = y_0 + \theta_0 \{x - 0\} + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{A_i}{2!} \{x - a_i\}^2 + \frac{B_i}{3!} \{x - a_i\}^3 + \frac{C_i}{4!} \{x - a_i\}^4 \right] \quad (3.5)$$

其中 \$\theta_0, y_0\$ 为积分常数. 由于 \$A_i, B_i, C_i\$ 中包含有未知约束反力, 代入边界条件后, 问题实质上转化为解线性代数方程组. 因为这个方程组的阶数只决定于约束反力的数目, 而和所取的节点数无关, 所以一般阶数不会很高.

例 3: 图 8 所示阶梯轴上带有重为 1300kg 和 2000kg 的两个重盘, 材料比重为 \$7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3\$, \$E = 2 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2\$, 其它尺寸见图. 试求由于盘重和轴自重引起的挠曲线方程.

解: 按本题数据, 参照图 7 符号, 先算出各段的 \$a_i, 1/E_i J_i, q_i, R_i\$ 值, 分别列于表 2 中第 2—5 列. 利用公式(3.3)算出 \$A_i, B_i, C_i\$ 的数值, 列于表 2 中第 6—8 列. 代入方程(3.5), 即得挠曲线方程. 用 \$x=0\$ 和 \$x=300\text{cm}\$ 处, \$y=0\$ 的条件, 定出

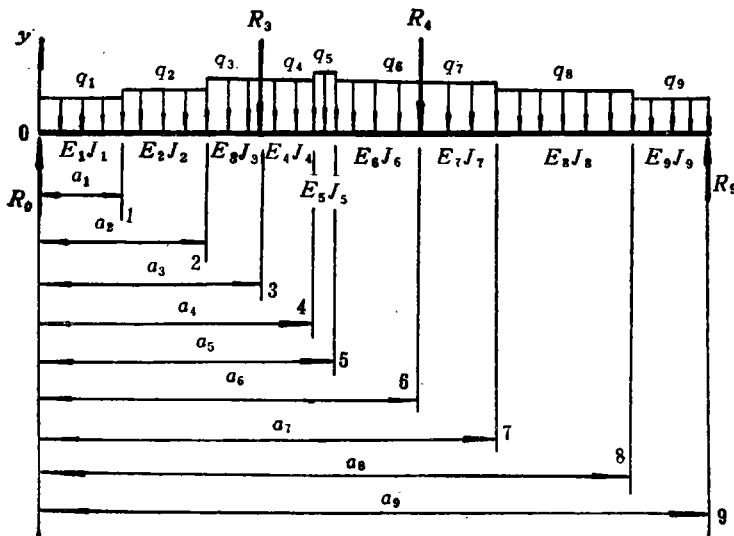
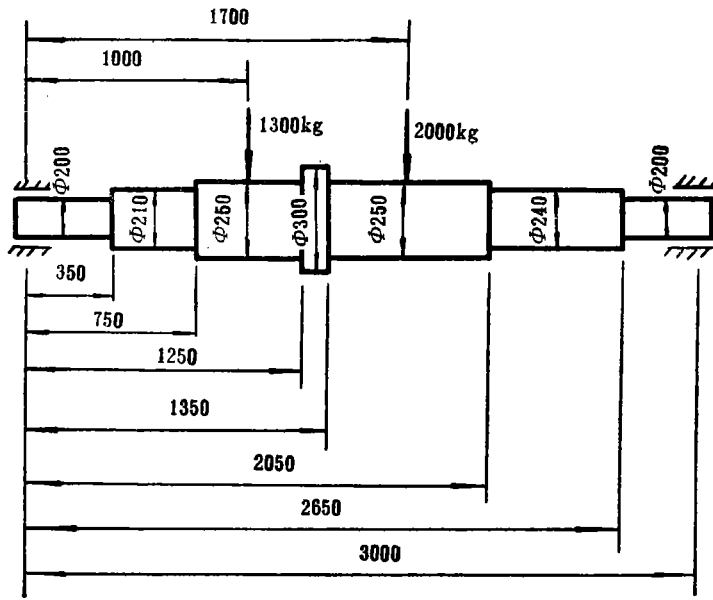


图 8

$$y_0 = 0, \quad \theta_0 = -71202 \times 10^{-3}$$

最后其挠曲线方程可写成

$$\begin{aligned} y(x) = & [-71202x + (-41.647\{x-35\}^2 - 214.03\{x-75\}^2 - 151.17\{x-125\}^2 \\ & + 154.64\{x-135\}^2 + 42.59\{x-205\}^2 + 117.56\{x-265\}^2) \\ & + (2.364\{x-0\}^3 - 0.389\{x-35\}^3 - 0.907\{x-75\}^3 - 0.564\{x-100\}^3 \\ & - 0.122\{x-125\}^3 + 0.110\{x-135\}^3 - 0.867\{x-170\}^3 - 0.137\{x-205\}^3 \\ & - 1.096\{x-265\}^3) + (-0.00065\{x-0\}^4 + 0.0000558\{x-35\}^4 \end{aligned}$$

$$+0.000179\{x-75\}^4+0.000127\{x-125\}^4-0.000127\{x-135\}^4 \\ -0.0000354\{x-205\}^4-0.000199\{x-265\}^4]\times 10^{-8}$$

各节点处的挠度值 y_i ，列于表 2 中最后一列。（本题结果和 [6] 中例题 15、14 基本一致，但现在为精确解，而 [6] 中结果是将自重化为节点处集中力后用数值积分得出的）。

表 2

i	a_i, cm	$\frac{1}{E_i J_i}, \frac{1}{\text{kg}\cdot\text{cm}^2}$	$q_i, \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$	R_i, kg	$A_i, \frac{1}{\text{cm}}$	$B_i, \frac{1}{\text{cm}^2}$	$C_i, \frac{1}{\text{cm}^3}$	y_i, cm
0	0	0	0	2228.2	0	14.185×10^{-8}	-0.0156×10^{-8}	0
1	35	6.366×10^{-11}	2.450	0	-83.294×10^{-8}	-2.333×10^{-8}	0.00134×10^{-8}	-23.917×10^{-3}
2	75	5.277×10^{-11}	2.702	0	-428.060×10^{-8}	-5.442×10^{-8}	0.00430×10^{-8}	-44.547×10^{-3}
3	100	2.602×10^{-11}	3.829	-1300	0	-3.383×10^{-8}	0	-52.503×10^{-3}
4	125	2.602×10^{-11}	3.829	0	-302.341×10^{-8}	-0.731×10^{-8}	0.00304×10^{-8}	-57.184×10^{-3}
5	135	1.255×10^{-11}	5.513	0	309.283×10^{-8}	0.657×10^{-8}	-0.00304×10^{-8}	-58.145×10^{-3}
6	170	2.602×10^{-11}	3.829	-2000	0	-5.204×10^{-8}	0	-57.405×10^{-3}
7	205	2.602×10^{-11}	3.829	0	85.180×10^{-8}	-0.822×10^{-8}	-0.00085×10^{-8}	-49.258×10^{-3}
8	265	3.064×10^{-11}	3.529	0	235.123×10^{-8}	-6.580×10^{-8}	-0.00478×10^{-8}	-21.557×10^{-3}
9	300	6.366×10^{-11}	2.450	2077.6	/	/	/	0

参 考 文 献

1. 叶开沅，非均匀变厚度梁的弯曲，兰州大学学报（力学专号），（1）（1979）。
2. Shames, I. H., *Mechanics of Deformable Solids*, (1964).
3. Oden, J. T., *Mechanics of Elastic Structures*, (1967).
4. 米凯拉奇, III. E., «建筑力学的若干问题», 建筑工程出版社, (1956).
5. 杨叔子, 机床两支承主轴部件静刚度的分析与计算, 机床, 总39期 (1979)11页.
6. 费奥多谢夫, B. N., «材料力学», 高等教育出版社, (1965).

Apply Generalized Step Function to Solve the Bending Problem of Statically Indeterminate Beams with Variable Flexural Rigidity

Lin Xin-san Xu Bao-yuan Xiong Huan-guo

(Shanghai Part-time Institute of Technology, Shanghai)

Abstract

The present paper defines a generalized step function $\{x-a\}^n$ and the reciprocal of bending rigidity of beams $1/EJ$ as well as the bending moment are expressed in such a form $\{x-a\}^n$. Thus a general procedure for calculating the deformation of all types of straight beams is given and the general form of equation of elastic curve of beams is obtained.