

# 圆薄板大挠度问题的摄动参数\*

陈山林 光积昌

(北京清华大学 1980年3月20日收到)

## 摘 要

本文研究了在用正规摄动法求解均布载荷下的圆薄板大挠度问题时, 与载荷, 挠度, 转角, 内力等有关的各种摄动参数, 并对一般摄动参数情形用变分原理求得了解答. 本文从实验的角度阐明了各参数的适用范围, 结果表明, 相应的解答与用中心挠度为参数的解有较好的一致性; 对均布载荷的情形, 中心挠度仍可看做是较为合适的摄动参数; 本文推荐的摄动参数及用变分原理确定摄动解的方法, 具有普遍的适用性, 可以用来处理载荷联合作用等更为复杂的情形.

## 一、前 言

钱伟长教授(1947)以中心挠度为摄动参数, 用正规摄动方法有效地处理了均布载荷下圆板的大挠度问题[1]. 后来, 关于圆板, 椭圆板和矩形板的一系列大挠度问题用类似的摄动参数(最大挠度)得到了解决[4]—[8]. 以挠度做参数的这种摄动法得到的刚度特性(最大挠度与载荷的关系)与实验符合良好[9]. 处理板的大挠度问题的另一种方法是以载荷为摄动参数[2], 但结果不够理想. 近年来, R. Schmidt和D. A. DaDeppo(1973)选取 $(1-\nu^2)$  ( $\nu$ 是泊松系数)做摄动参数, 处理了膜和板的一些问题, 他们在比较了几种摄动解的结果后, 曾做过评论说: “仍以钱伟长的解较好.” [10], [11]

但是, 正如A. C. Вольмир[9]所指出的, 由钱伟长法得到的挠度曲线当挠度较大时, 中心区出现下凹现象(图1a), 然而在实验中没有观察到这种现象. 另外, 胡海昌也曾经指出, 中心挠度做参数对于中心集中载荷与分布载荷联合作用的情形并不总是合适的, 因为这时候中心挠度可以为零(图1b); 他在文[3]中对此做过一些研究, 但问题并没有得到解决.

为了解决上述问题, 一个很自然的想法是寻找另外的摄动参数, 以期得到更适宜的解答, 即更好的刚度和挠度特性, 且能适应复杂载荷的情况. 因此, 我们对与载荷、挠度、转角、内力有关的多种参数进行了研究, 并对一般摄动参数的情形, 用变分原理求得了解答. 本文研究了采用各种摄动参数所得的解的刚度及挠度特性, 并从实验的角度研究了解的适用范围, 对选取更好的参数的可能性也进行了讨论.

\*本文是在钱伟长教授指导下完成的, 钱伟长教授推荐.

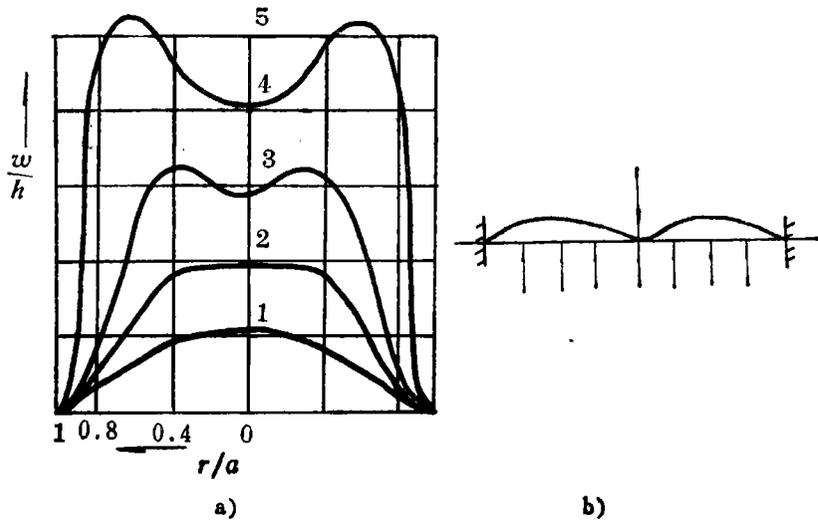


图 1

本文讨论仅限于均布载荷作用情形，考虑了常用的两种边界条件：固定夹紧和可移夹紧。类似的讨论不难推广到载荷和边界的其它情形。

## 二、基本方程和正规摄动解

我们以著名的卡门 (Kármán, 1910) 方程做为基本方程。对均布载荷作用下的圆薄板大挠度问题，卡门方程具有形式：

$$\left. \begin{aligned} D r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) &= r N_r \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} q r^2 \\ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) &= -\frac{1}{2} E h \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \\ N_r &= -\frac{d}{dr} (r N_r) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中，

$w$ —横向挠度，	$N_r$ —径向薄膜力
$N_r$ —环向薄膜力，	$r$ —径向坐标
$q$ —横向均匀压力，	$h$ —板厚

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \text{板抗弯刚度}$$

$E$ —弹性系数，  $\nu$ —泊松系数

我们还有中心及边界条件，  
对边缘固定夹紧情形：

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } r=0 \text{ 时} \quad w \text{ 及 } N_r \text{ 有限, } \frac{dw}{dr} = 0 \\ \text{当 } r=a \text{ 时} \quad w=0, \quad \frac{dw}{dr} = 0 \\ \quad \quad \quad (1-\nu)N_r + r\frac{dN_r}{dr} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.2a)$$

对边缘可移夹紧情形:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } r=0 \text{ 时} \quad w \text{ 及 } N_r \text{ 有限, } \frac{dw}{dr} = 0 \\ \text{当 } r=a \text{ 时} \quad w=0, \quad \frac{dw}{dr} = 0 \\ \quad \quad \quad N_r = 0 \end{array} \right\} \quad (2.2b)$$

式中,  $a$  为圆板半径.

引入无量纲量

$$\left. \begin{array}{l} Y = \frac{w}{h} \sqrt{12(1-\nu^2)} \quad P = \frac{a^4 q}{Eh^4} 12(1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)} \\ S_t = -\frac{a^2 N_t}{Eh^3} \cdot 12(1-\nu^2) \quad S_r = -\frac{a^2}{Eh^3} \rho N_r \cdot 12(1-\nu^2) \\ \rho = \frac{r}{a} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

式(2.1)简化为:

$$L\left(\rho \frac{dY}{d\rho}\right) = P\rho^2 - S_r \frac{dY}{d\rho} \quad (2.4a)$$

$$L(\rho S_r) = \frac{1}{2} \left(\frac{dY}{d\rho}\right)^2 \quad (2.4b)$$

$$S_t = \frac{d}{d\rho} S_r \quad (2.4c)$$

式中,

$$\text{算子 } L(\dots) = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\dots)$$

式(2.2a), (2.2b)简化为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \rho=0 \text{ 时 } Y \text{ 有限, } \frac{dY}{d\rho} = 0, \quad S_r = 0 \\ \text{当 } \rho=1 \text{ 时 } Y=0, \quad \frac{dY}{d\rho} = 0, \quad \frac{dS_r}{d\rho} - \nu S_r = 0 \end{array} \right\} \quad (2.5a)$$

及

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \rho=0 \text{ 时 } Y \text{ 有限, } \frac{dY}{d\rho} = 0, \quad S_r = 0 \\ \text{当 } \rho=1 \text{ 时 } Y=0, \quad \frac{dY}{d\rho} = 0, \quad S_r = 0 \end{array} \right\} \quad (2.5b)$$

在 (2.5a) 中, 令  $\nu \rightarrow \infty$  即可得 (2.5b) 式, 因此我们以后仅考虑边缘固定夹紧情形, 而在结果中取  $\nu \rightarrow \infty$  来得到可移夹紧的解.

记摄动参数为  $\varepsilon$ , 暂时我们对  $\varepsilon$  不做任何具体规定, 它可以是挠度、转角、载荷或内力的某一无量纲量, 也可以没有具体物理意义. 但我们假设, 此参数是随着问题的非线性程度变化而变化的, 特别是  $\varepsilon$  较小时, 问题成为线性的. 并且, 我们假设  $P$ 、 $Y$ 、 $S_r$ 、 $S_t$  诸量能够展成关于  $\varepsilon$  的如下渐近级数

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{32} &= \alpha_1 \varepsilon + \alpha_3 \varepsilon^3 + \dots \\ Y &= Y_1(\rho) \varepsilon + Y_3(\rho) \varepsilon^3 + \dots \\ S_r &= f_2(\rho) \varepsilon^2 + f_4(\rho) \varepsilon^4 \\ S_t &= g_2(\rho) \varepsilon^2 + g_4(\rho) \varepsilon^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中,  $\alpha_i$  为待定常数,  $Y_i(\rho)$ ,  $f_i(\rho)$ ,  $g_i(\rho)$  是关于  $\rho$  的待定函数. 将 (2.6) 代入 (2.4), (2.5), 收集  $\varepsilon$  的幂次相同的项, 可以得到一系列关于  $\alpha_i$ ,  $Y_i(\rho)$ ,  $f_i(\rho)$ ,  $g_i(\rho)$  等的线性微分方程及相应的边界条件.

对于  $\alpha_1$  和  $Y_1$ , 我们得到:

$$\left. \begin{aligned} L\left(\rho \frac{dY_1}{d\rho}\right) &= 32\alpha_1 \rho^2 \\ \text{当 } \rho=0 \text{ 时, } Y_1 \text{ 有限, } \frac{dY_1}{d\rho} &= 0 \\ \text{当 } \rho=1 \text{ 时, } Y_1 &= 0, \frac{dY_1}{d\rho} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

问题 (2.7) 的解为:

$$Y_1 = \alpha_1 (\rho^4 - 2\rho^2 + 1) \quad (2.8)$$

对于  $f_2$  和  $g_2$ , 我们得到:

$$\left. \begin{aligned} L(\rho f_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{dY_1}{d\rho}\right)^2 \\ \text{当 } \rho=0 \text{ 时} \quad f_2 &= 0 \\ \text{当 } \rho=1 \text{ 时} \quad \frac{df_2}{d\rho} - f_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

以及

$$g_2 = \frac{df_2}{d\rho} \quad (2.10)$$

问题 (2.9) 和 (2.10) 有解

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= \frac{\alpha_1^2}{6} [\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - (4+\lambda)\rho] \\ g_2 &= \frac{\alpha_1^2}{6} [7\rho^6 - 20\rho^4 + 18\rho^2 - (4+\lambda)] \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

式中,  $\lambda = \frac{1+\nu}{1-\nu}$ . 对于可移夹紧情形, 应令  $\nu \rightarrow \infty$ , 此时  $\lambda = -1$ .

解(2.8)和(2.11)给出了级数(2.6)第一项, 通常叫做一次渐近解.

对于 $\alpha_3$ 和 $Y_3$ , 我们得到

$$\left. \begin{aligned} L\left(\rho \frac{dY_3}{d\rho}\right) &= 32\alpha_3\rho^2 - f_2 \frac{dY_1}{d\rho} \\ \text{当 } \rho=0 \text{ 时, } Y_3 \text{ 有限, } \frac{dY_3}{d\rho} &= 0 \\ \text{当 } \rho=a \text{ 时, } Y_3 &= 0, \quad \frac{dY_3}{d\rho} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

问题(2.12)有解

$$\begin{aligned} Y_3 &= \alpha_3(\rho^4 - 2\rho^2 + 1) \\ &+ \alpha_1^3 \left( -\frac{1}{2160}\rho^{12} + \frac{1}{240}\rho^{10} - \frac{5}{288}\rho^6 + \frac{10+\lambda}{216}\rho^6 \right. \\ &\left. - \frac{4+\lambda}{48}\rho^4 + \frac{57+20\lambda}{720}\rho^2 - \frac{123+50\lambda}{4320} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

对于 $f_4$ 和 $g_4$ , 我们得到

$$\left. \begin{aligned} L(\rho f_4) &= \frac{dY_1}{d\rho} \cdot \frac{dY_3}{d\rho} \\ \text{当 } \rho=0 \text{ 时 } f_4 &= 0 \\ \text{当 } \rho=1 \text{ 时 } \frac{df_4}{d\rho} - \nu f_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

以及

$$g_4 = \frac{df_4}{d\rho} \quad (2.15)$$

问题(2.14)、(2.15)的解是

$$\left. \begin{aligned} f_4 &= \alpha_1\alpha_3 \left( \frac{1}{3}\rho^7 - \frac{4}{3}\rho^5 + 2\rho^3 - \frac{4+\lambda}{3}\rho \right) \\ &+ \alpha_1^4 \left( -\frac{1}{10080}\rho^{15} + \frac{17}{15120}\rho^{13} - \frac{13}{2160}\rho^{11} \right. \\ &+ \frac{15+\lambda}{720}\rho^9 - \frac{11+2\lambda}{216}\rho^7 + \frac{177+50\lambda}{2160}\rho^5 \\ &\left. - \frac{57+20\lambda}{720}\rho^3 + \frac{1242+755\lambda+112\lambda^2}{30240}\rho \right) \\ g_4 &= \alpha_1\alpha_3 \left( \frac{7}{3}\rho^6 - \frac{20}{3}\rho^4 + 6\rho^2 - \frac{4+\lambda}{3} \right) \\ &+ \alpha_1^4 \left( -\frac{1}{672}\rho^{14} + \frac{221}{15120}\rho^{12} - \frac{143}{2160}\rho^{10} \right. \\ &+ \frac{15+\lambda}{80}\rho^8 - \frac{77+14\lambda}{216}\rho^6 + \frac{177+50\lambda}{432}\rho^4 \\ &\left. - \frac{57+20\lambda}{240}\rho^2 + \frac{1242+755\lambda+112\lambda^2}{30240} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

解(2.13)和(2.16)给出了级数(2.6)第二项,通常叫做第二次渐近解.两次渐近解中的 $\alpha_1$ , $\alpha_3$ 均待定.本文关于摄动参数的讨论,仅限于渐近级数(2.6)的前二项,其解为(2.8), (2.11), (2.13)和(2.16)式.

### 三、摄动参数及 $\alpha_1$ , $\alpha_3$ 的确定

我们将解(2.8), (2.11), (2.13), (2.16)式代入(2.6), 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{32} &= \alpha_1 \varepsilon + \alpha_3 \varepsilon^3 \\ Y &= \alpha_1 A_1(\rho) \varepsilon + [\alpha_3 A_1(\rho) + \alpha_1^3 A_2(\rho)] \varepsilon^3 \\ S_r &= \alpha_1^2 B_1(\rho) \varepsilon + [2\alpha_1 \alpha_3 B_1(\rho) + \alpha_1^4 B_2(\rho)] \varepsilon^3 \\ S_t &= \alpha_1^2 C_1(\rho) \varepsilon + [2\alpha_1 \alpha_3 C_1(\rho) + \alpha_1^4 C_2(\rho)] \varepsilon^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} A_1(\rho) &= \rho^4 - 2\rho^2 + 1 \\ A_2(\rho) &= -\frac{1}{2160} \rho^{12} + \frac{1}{240} \rho^{10} - \frac{5}{288} \rho^8 \\ &\quad + \frac{10+\lambda}{216} \rho^6 - \frac{4+\lambda}{48} \rho^4 + \frac{57+20\lambda}{720} \rho^2 - \frac{123+50\lambda}{4320} \\ B_1(\rho) &= \frac{1}{6} \rho^7 - \frac{2}{3} \rho^5 + \rho^3 - \frac{4+\lambda}{6} \rho \\ B_2(\rho) &= -\frac{1}{10080} \rho^{15} + \frac{17}{15120} \rho^{13} - \frac{13}{2160} \rho^{11} \\ &\quad + \frac{15+\lambda}{720} \rho^9 - \frac{11+2\lambda}{216} \rho^7 + \frac{177+50\lambda}{2160} \rho^5 \\ &\quad - \frac{57+20\lambda}{720} \rho^3 + \frac{1242+755\lambda+112\lambda^2}{30240} \rho \\ C_1(\rho) &= \frac{7}{6} \rho^6 - \frac{10}{3} \rho^4 + 3\rho^2 - \frac{4+\lambda}{6} \\ C_2(\rho) &= -\frac{1}{672} \rho^{14} + \frac{221}{15120} \rho^{12} - \frac{143}{2160} \rho^{10} \\ &\quad + \frac{15+\lambda}{80} \rho^8 - \frac{77+14\lambda}{216} \rho^6 + \frac{177+50\lambda}{432} \rho^4 \\ &\quad - \frac{57+20\lambda}{240} \rho^2 + \frac{1242+755\lambda+112\lambda^2}{30240} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式(3.1)中待定常数 $\alpha_1$ 和 $\alpha_3$ 习惯上是通过具体选定摄动参数来确定的.我们研究了有关载荷、挠度、转角和内力的各种参数及其对应的 $\alpha_1$ 、 $\alpha_3$ 值,现将几种具有代表性并较有价值的参数举例如下,同时说明确定 $\alpha_1$ 、 $\alpha_3$ 的过程.为了便于比较,中心挠度及载荷参数也同时列出.

(一) 取中心挠度为摄动参数,即取

$$\varepsilon = Y(0) = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{w_0}{h} \quad (3.3)$$

补充方程可由 (3.1) 式第二式得到, 令  $\rho = 0$ , 得:

$$\varepsilon = \alpha_1 A_1(0)\varepsilon + [\alpha_3 A_1(0) + \alpha_1^3 A_2(0)]\varepsilon^3 \quad (3.4)$$

比较同次幂  $\varepsilon$  的系数, 计算可得:

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_3 = \frac{123 + 50\lambda}{4320} \quad (3.5)$$

这正是钱伟长教授的结果[1].

(二) 取载荷为摄动参数, 即取

$$\varepsilon = \frac{P}{32} = \frac{[3(1-\nu^2)]^{3/2}}{8} \cdot \frac{a^4 q}{Eh^3} \quad (3.6)$$

补充方程可由 (3.1) 式第一式得到, 即

$$\varepsilon = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_3 \varepsilon^3$$

由此即得

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_3 = 0 \quad (3.7)$$

实际上, 这就是 Vincent[2] 的结果.

(三) 取挠度的均方根为摄动参数, 即取

$$\varepsilon^2 = \int_0^1 Y^2 d\rho = \frac{12(1-\nu^2)}{ah^2} \int_0^a w^2 dr \quad (3.8)$$

将 (3.1) 式第二式代入上式, 比较  $\varepsilon$  同次幂系数, 并略去含  $\varepsilon^6$  的项, 可得到:

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{\int_0^1 A_1^2(\rho) d\rho}$$

$$\alpha_3 = \frac{-\alpha_1^3 \int_0^1 A_1(\rho) A_2(\rho) d\rho}{\int_0^1 A_1^2(\rho) d\rho}$$

代入有关函数, 计算可得

$$\alpha_1^2 = \frac{315}{218}, \quad \alpha_3 = \frac{139934 + 58565\lambda}{5250960} \alpha_1^3 \quad (3.9)$$

(四) 取斜度 (转角) 的均方根为摄动参数, 即取

$$\varepsilon^2 = \int_0^1 \left( \frac{dY}{d\rho} \right)^2 d\rho = \frac{12(1-\nu^2)a}{h^2} \int_0^1 \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 dr \quad (3.10)$$

将 (3.1) 式第二式代入上式, 比较  $\varepsilon$  的同次幂系数, 并舍去含  $\varepsilon^6$  的项, 可得到:

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{\int_0^1 (A_1')^2 d\rho}$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1^3 \int_0^1 A_1' A_2' d\rho}{\int_0^1 (A_1')^2 d\rho}$$

将有关函数代入, 计算可得

$$\alpha_1^2 = \frac{105}{128}, \quad \alpha_3 = \frac{8718 + 3575\lambda}{308880} \alpha_1^3 \quad (3.11)$$

(五) 取边缘环向薄膜力为摄动参数, 即取

$$\varepsilon^2 = S_t(1) = -\frac{a^2 \cdot 12(1-\nu^2)}{Eh^3} N_t(a) \quad (3.12)$$

由(3.1)式最后一式, 令 $\rho=1$ , 可得

$$\varepsilon^2 = \alpha_1^2 C_1(1) \varepsilon^2 + [2\alpha_1 \alpha_3 C_1(1) + \alpha_1^4 C_2(1)]$$

计算可得

$$\alpha_1^2 = \frac{6}{1-\lambda}, \quad \alpha_3 = \frac{265 + 112\lambda}{10080} \alpha_1^3 \quad (3.13)$$

和历史上曾用过的前两种参数一样, 本文列举的后三种参数, 其物理意义都是十分明显的, 它们的大小能够反映问题的非线性程度, 但后者可不受载荷作用情形的限制, 具有普遍的适应性. 对上述参数相应的解的分析将在后面进行.

#### 四、用变分原理确定待定常数

通过摄动参数的具体选择决定待定常数的方法, 是简便和实用的. 但是不同的参数选择其结果可能很不相同, 因此, 要得到较适宜的解答, 要求工作者必须有丰富的经验和对问题物理本质的深刻认识. 这里, 我们建议另一种途径, 即通过变分原理来确定待定常数, 从而确定摄动解, 虽然计算略复杂一些, 但却具有较普遍的适应性.

假定摄动参数 $\varepsilon$ 是没有具体物理意义的一般参数, 其解由(3.1)及(3.2)式给出. 我们首先对待定常数 $\alpha_1, \alpha_3$ 做进一步的简化.

如果引入

$$\alpha = \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \quad (4.1)$$

则可用 $\alpha_1, \alpha$ 代替 $\alpha_1, \alpha_3$ 做为新的一组待定常数.

(3.1)式用 $\alpha_1, \alpha$ 重新改写, 则为

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{32} &= \alpha_1 \varepsilon + \alpha (\alpha_1 \varepsilon)^3 \\ Y &= A_1(\rho) \alpha_1 \varepsilon + [\alpha A_1(\rho) + A_2(\rho)] (\alpha_1 \varepsilon)^3 \\ S_r &= B_1(\rho) (\alpha_1 \varepsilon)^2 + [2\alpha B_1(\rho) + B_2(\rho)] (\alpha_1 \varepsilon)^4 \\ S_t &= C_1(\rho) (\alpha_1 \varepsilon)^2 + [2\alpha C_1(\rho) + C_2(\rho)] (\alpha_1 \varepsilon)^4 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

式中诸函数均由(3.2)式给出. 由上式可看出, 无论 $\alpha_1$ 取何值( $\alpha_1 \neq 0$ ), 对解没有任何影响. 换句话说, 所有相差某一个常数倍的摄动参数都给出同一的 $\alpha$ 值, 这些参数应看做是等同的, 并且可用一个参数 $\zeta = \alpha_1 \varepsilon$ 来代表,  $\zeta$ 也可看做是取 $\alpha_1 = 1$ 的摄动参数. 于是解(4.2)式可用 $\zeta$ 代入简化为

$$\left. \begin{aligned} P &= \zeta + \alpha \zeta^3 \\ Y &= A_1 \zeta + (\alpha A_1 + A_2) \zeta^3 \\ S_r &= B_1 \zeta^2 + (2\alpha B_1 + B_2) \zeta^4 \\ S_t &= C_1 \zeta^2 + (2\alpha C_1 + C_2) \zeta^4 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

这样, 解答(4.3)仅依赖于一个待定常数 $\alpha$ . 这是一个简单的事实, 但指出这一点并非不重要, 因为这样一来, 我们就有可能简便地讨论解的合理确定问题了. 需要指出, (4.3)式形式的解对一般载荷和一般边界条件也是如此, 只是其中函数 $A_i, B_i, C_i$ 等与问题的具体形式有关罢了.

解(4.3)是由逐次渐近的线性微分方程得到的, 对于基本方程(2.4)和边界条件(2.5a)、(2.5b)来说, 它仍满足边界条件, 同时满足(2.4)的第三式, 但并不满足平衡方程(2.4a)和协调方程(2.4b). 问题的完整的泛函应当考虑到所有这些情况. 但是, 我们寻求的解只是渐近意义下的解答, 因此, 在建立泛函时, 相对来说, 含 $\zeta$ 的高次项可以略去, 计算表明, 考虑了协调方程(2.4b)得到的项正是属于 $\zeta$ 的高次项, 因此可以认为解(4.3)近似地满足(2.4b), 于是我们可以应用最小总势能原理. 按文[6], 由板的总势能之一阶变分为零的条件可得到

$$\int_0^1 \left[ L \left( \rho \frac{dY}{d\rho} \right) + S_r \frac{dY}{d\rho} - P \rho^2 \right] \delta \left( \frac{dY}{d\rho} \right) d\rho = 0 \quad (4.4)$$

将(4.3)式代入上式, 变分对 $\alpha$ 进行, 注意到各次渐近解已满足的相应方程, 同时略去 $\zeta$ 的高次项, 计算可得

$$\int_0^1 [B_1(\alpha A_1' + A_2') + (2\alpha B_1 + B_2) A_1'] A_1' d\rho = 0 \quad (4.5)$$

由此解出 $\alpha$

$$\alpha = -\frac{I_1 + I_2}{3I_3} \quad (4.6)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 B_2 (A_1')^2 d\rho \\ I_2 &= \int_0^1 B_1 \cdot A_1' A_2' d\rho \\ I_3 &= \int_0^1 B_1 (A_1')^2 d\rho \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

(4.6)和(4.7)式对一般载荷和边界条件也是成立的. 在我们讨论的问题中,  $A_1, A_2, B_1, B_2$ 由(3.2)式给出, 将它们代入(4.7), 计算可得

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{10583 + 8745\lambda + 1848\lambda^2}{748440} \\ I_2 &= \frac{10583 + 8745\lambda + 1848\lambda^2}{1496880} \\ I_3 &= -\frac{16 + 7\lambda}{63} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

将(4.8)代入(4.6)式, 最后得到

$$\alpha = \frac{10583 + 8745\lambda + 1848\lambda^2}{23760(16 + 7\lambda)} \quad (4.9)$$

结果是十分简便的. 将 $\alpha$ 代回(4.3)式, 即得由变分原理确定的摄动解, 此时,  $\epsilon$ 并不具有具体的意义, 仅是一般参数.

## 五、关于摄动参数的评价

我们从实验事实的角度对前述的摄动参数(包括一般参数)进行研究, 主要考查它们对应的解答在刚度(载荷与中心挠度的关系)和挠度方面的特性. 我们取(4.3)形式的解, 此时各参数对应之 $\alpha$ 值由(4.1)确定, 一般参数情形由(4.9)式确定. 我们首先提出几个实验的标准.

在(4.3)中, 令 $\rho=0$ , 可得载荷与中心挠度的关系, 即刚度特性

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{32} &= \epsilon + \alpha \epsilon^3 \\ Y_0 &= \epsilon + (\alpha - \alpha_0) \epsilon^3 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

式中

$$\alpha_0 = \frac{123 + 50\lambda}{4320} \quad (5.2)$$

在均布载荷下的圆平板情形, 一个简单的实验事实是,  $P$ 与 $Y_0$ 之间是单值对应的. 在我们考虑的一定范围之内, 这个条件可以表示为

$$\frac{dY_0}{d\epsilon} = 1 + 3(\alpha - \alpha_0)\epsilon^2 \geq 0$$

即

$$\frac{1}{\epsilon^2} \geq 3(\alpha_0 - \alpha) \quad (5.3)$$

对于给定的摄动参数, 从而对于给定的 $\alpha$ 值, 由(5.1)及(5.3)式, 可以得到满足单值条件的挠度范围或载荷范围. 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时, (5.3)式恒成立, 即单值条件总是保证的.

另一实验事实是变形过程中板的中心区不应出现下凹现象, 这就对解的挠度曲线形状提出了要求, 这一点可以表示为对于转角应有

$$\frac{dw}{dr} \leq 0$$

在中心区, 特别是在中心的邻域成立. 因为下凹现象正好表明上式被破坏, 上式的无量纲形式是

$$\frac{dY}{d\rho} \leq 0$$

在 $\rho=0$ 的邻域内成立. 按(4.3)式, 可得

$$\frac{dY}{d\rho} = A_1' \epsilon + (\alpha A_1' + A_2') \epsilon^3 \leq 0$$

上式在 $\rho=0$ 的邻域, 可以近似取做

$$A_1''\zeta + [aA_1'' + A_2'']\zeta^3 \leq 0 \quad (\rho = 0)$$

计算后可得

$$\frac{1}{\zeta^2} \geq \frac{57 + 20\lambda}{1440} - a \quad (5.4)$$

对于一定的 $a$ 值, 由上式和(5.1)式可以估计出满足中心区不下凹条件的挠度或载荷范围,

当 $a \geq \frac{57 + 20\lambda}{1440}$ 时, 条件(5.4)总是保证的.

或许, 引入参数

$$\beta = \frac{a}{a_0} \quad (5.5)$$

更为方便, 式中 $a$ 由(4.1)定义,  $a_0$ 由(5.2)给出. 于是(5.1)、(5.3)、(5.4)式可以分别写做

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{32} &= \zeta + \beta a_0 \zeta^3 \\ Y_0 &= \zeta + (\beta - 1) a_0 \zeta^3 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\zeta^2} &\geq 3a_0(1 - \beta) \\ \frac{1}{\zeta^2} &\geq a_0 \left( \frac{171 + 60\lambda}{123 + 50\lambda} - \beta \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.7a, b)$$

当然, 解(4.3)也可用 $\beta$ 表示, 并由 $\beta$ 唯一决定.

除了条件(5.7)以外, 对应于一定的摄动参数、解的刚度及挠度曲线与实验结果在数值上也必须是吻合的. 如果说, 条件(5.7)仅是一种定性的要求, 那么后者则是定量的标准. 由于缺乏关于挠度曲线形状的充分的实验资料, 我们仅考察刚度特性.

在图2中, 绘出了关于固定夹紧边界情形的刚度特性的实验值, 资料来源是文[11], 并

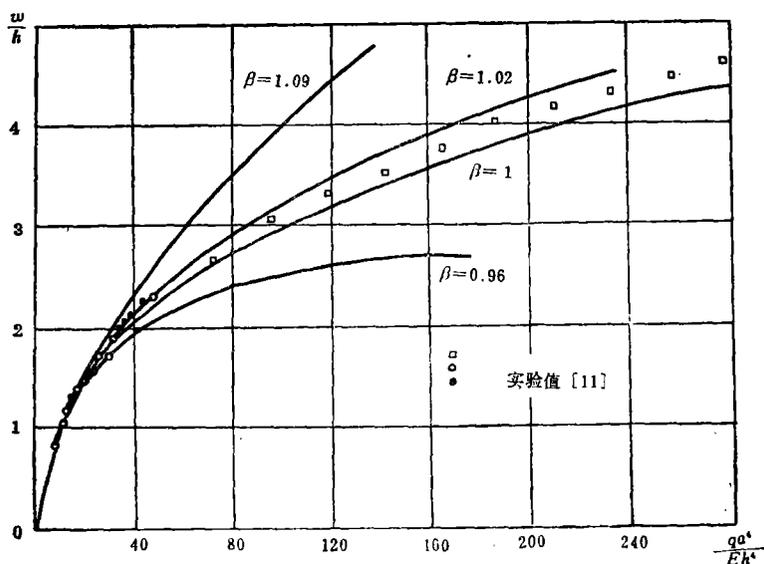


图2

给出了当 $\nu=0.3$ 时, 对应于 $\beta$ 各种取值时的摄动解答的刚度曲线(按(2.14)式计算)。我们看到, 曲线对 $\beta$ 的变化是极为敏感的, 尤其是当挠度较大( $\frac{w}{h} > 2$ )时, 仅在 $\beta \approx 1-1.02$ 的很小的范围内, 曲线与实验有较好的一致性。

为了直观, 我们将条件(5.7) ( $\nu=0.3$ ) 绘成曲线。(图3), 两条曲线相交于 $a$ 点, 在 $a$ 点下方, 即 $\beta$ 较小时, 条件(5.7a)起作用, 在 $a$ 点上方, 即当 $\beta$ 较大时, 条件(5.7b)起作用。对于一定 $\beta$ 值, 我们可以由图(3)曲线上对应点的横坐标估计出参数 $\epsilon$ 的适应范围。由(5.6)式即可得相应的挠度或载荷范围。

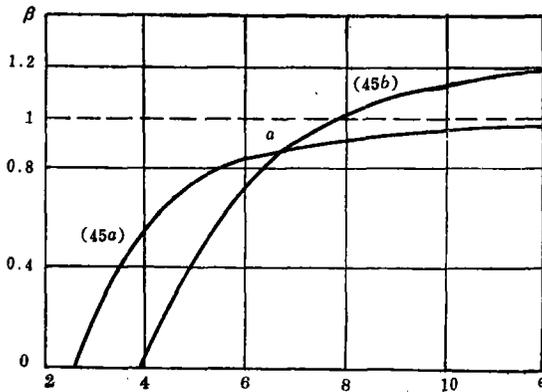


图 3

将图2和图3结合, 我们就可以对本文的各种摄动参数及其解的刚度, 挠度特定性做一评述了。

我们知道, 解的特性唯一地取决于 $\beta$ , 因此我们将有关摄动参数及其相应的 $\beta$ 值列在表I中,  $\beta$ 值由(5.5)式定义, 计算了固定夹紧和可移夹紧两种情形, 同时给出了由图3确定的挠度适用范围。

对固定夹紧边界, 我们所列举的前两种摄动参数的 $\beta$ 值和适用范围彼此是十分接近的, 可以预计它们给出的解彼此也将

表 I 摄动参数及 $\beta$ 值

参数名称	$\epsilon =$	$\alpha$	$\beta = \frac{\alpha}{\alpha_0}$		适用范围( $\frac{w}{h}$ )	
			固定夹紧 ( $\nu=0.3$ )	可移夹紧 ( $\lambda=-1$ )	固定夹紧	可移夹紧
中心挠度*	$Y(0)$	$\frac{123+50\lambda}{4320}$	1	1	2.44	3.23
均方根斜度	$\sqrt{\int_0^1 (Y')^2 d\rho}$	$\frac{8718+3575\lambda}{308880}$	0.9950	0.9853	2.38	3.09
一般参数	$\epsilon$	$\frac{10583+8745\lambda+1848\lambda^2}{23760(16+7\lambda)}$	0.9642	1.0200	2.31	3.42
均方根挠度	$\sqrt{\int_0^1 Y^2 d\rho}$	$\frac{139934+58565\lambda}{5250960}$	0.9479	0.9170	1.93	2.58
边缘环向薄膜力	$\sqrt{S_t(1)}$	$\frac{265+112\lambda}{10080}$	0.9391	0.8982	1.86	2.47
载荷**	$P$	0	0	0	0.52	0.90

\*钱伟长(1947), \*\*Vincent(1931)

十分接近, 以中心挠度给出的挠度适用范围最高( $w/h \approx 2.44$ ), 斜度的均方根也相当好, 由图(2)可以看到, 直到 $w/h \approx 2.3-2.4$ 附近, 它们与实验仍能很好地符合, 可以认为在这个范围内, 这些参数都是较为恰当的摄动参数。一般参数挠度的均方根和边缘环向薄膜力适用范围

围较小,但仍有一定价值.结合表 I 和图 2,可以认为它们的解的适用范围在  $\frac{w}{h} \approx 1.8$  左右. 载荷的适用范围很小,与实验的符合也差,这种参数不适用.

对可移夹紧边界,情况基本类似,但各参数适用范围普遍要大些.值得指出的是,对于一般参数由变分原理得到  $\beta \approx 1.02$ ,略高于中心挠度的  $\beta$  值,适用范围略大,说明变分摄动方法的结果可能不错.可惜我们没有可移夹紧边界的实验资料,不能对结果做进一步评价.

同时,需要指出,计算表明,边缘径向薄膜力  $S_r(1)$  和均方根面平均斜度  $\left(\sqrt{\int_0^1 (Y')^2 \rho d\rho}\right)$  做摄动参数时,结果与边缘环向薄膜力  $S_\theta(1)$  做参数完全相同;面平均曲率  $\left(\int_0^1 \frac{d^2 Y}{d\rho^2} \rho d\rho\right)$  和平均转角  $\left(\int_0^1 \frac{dY}{d\rho} d\rho\right)$  与中心挠度做参数时结果相同,等等.因此,本文几种摄动参数其实是相当多的参数的代表.

如要明显地改进解的挠度特性.从图 3 可看出,必须大大提高  $\beta$  值.例如,如果希望适用范围  $w/h \approx 4$ ,计算指出相应的  $\beta \approx 1.09$  但从图 2 可看出当  $\beta = 1.09$  时,解已大大偏离实验值.反之,如希望挠度较大时,解的刚度特性与实验很好地符合,则正如前述,应在  $\beta \approx 1 - 1.02$  的很小范围内才合适,但如对照图 3 则可知它的挠度特性较之中心挠度的解 ( $\beta = 1$ ) 并无明显改进.综合上述两方面的矛盾,可以认为 (4.3) 形式的摄动解仅在  $w/h \approx 2.5$  以下(固定夹紧边界),才能同时满足刚度和挠度的实验要求.

## 六、结 语

在我们所讨论的均布载荷情形,斜度的均方根所对应的解答虽然与中心挠度为参数的解相当一致,但仍以取中心挠度为参数较好,因为其更简便.但是本文所述其它参数(不包括载荷)因具有普遍适用的特点,建议可采用为研究复杂载荷作用情形的摄动参数.当然,不同载荷及边界情况,各参数的优劣可能不尽相同,应当具体分析,但在一定的范围内它们都可适用.本文对一般参数情形通过变分原理确定摄动解的方法,证明是可行的,值得注意.

关于解的挠度曲线中心区下凹问题,可移夹紧较之固定夹紧边界情况要略好些.本文的分析表明.如采用本文所述摄动程序和 (4.3) 式形式的摄动解,而要进一步明显提高现有解的适用范围,看来是难以奏效的.当然,如果方程、边界、载荷及摄动程序有所不同,自当别论.

## 参 考 文 献

1. Chien Wei-Zang (钱伟长), Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure. *Chinese Journal of Physics*, V 7 (1947), 102—113.
2. Vincent, J. J., The bending of a thin circular plate. *Phil. Mag.*, V 12 (1931), 185—196.
3. 胡海昌, 在均布及中心集中载荷下圆板的大挠度问题, 物理学报, V 10, 4 (1954), 383—392.
4. 钱伟长、叶开沅, 圆板的大挠度问题, 物理学报, V 10, 3 (1954), 209—238.
5. 叶开沅, 边缘载荷下环形薄板的大挠度问题, 物理学报, V 9, 1 (1953), 110—129.

6. 钱伟长, 林鸿荪, 胡海昌, 叶开沅, “弹性圆薄板大挠度问题” (文集) 中国科学院(1954).
7. Nash, W. A., Cooly, I. D., Large deflection of a clamped elliptical plate subjected to uniform pressure. *Transactions of A. S. M. E., J. of Appl. Mech.*, V 26, 2(1959) 291—293.
8. Chien, W. Z. (钱伟长) and Yeh, K. Y. (叶开沅), Large deflection of a rectangular plate under uniform pressure, *Proc. Ninth Intern. Congr. Appl. Mech.*, Brussels, V.6, 403 (1957).
9. Вольтмир, А. С., 柔韧板与柔韧壳 (中译本) 科学出版社 (1959).
10. Schmidt, R. and DaDeppo, D. A., A new approach to the analysis of shells, plates and membranes with finite deflections. *Int. J. of Non-Linear Mech.* V.9, 5 (1974), 409—419.
11. DaDeppo, D. A., Schmidt, R., Moderately large deflections of a loosely clamped circular plate under a uniformly distributed load. *Int. J. of Non-Linear Mech.*, V 25, 1(1975), 17—28.
12. McPherson, A. E., Ramberg, W., Levy, S., Normal pressure tests of circular plates with clamped edges, *NACA Report 744*(1944).

## The Perturbation Parameter in the Problem of Large Deflection of Clamped Circular Plates

Chen Shan-lin

Kuang Ji-chang

(Tsinghua University, Beijing)

### Abstract

In the problems of large deflection of clamped circular plates under uniformly distributed loads, various perturbation parameters relating to load, deflection, slope of deflection, membrane force, etc. are studied. For a general perturbation parameter, the variational principle is used for the solution of such a problem. The applicable range of these perturbation parameters are studied in detail. In the case of uniformly loaded plate, perturbation parameter relating to central deflection seems to be the best among all others. The method of determination of perturbation solution by means of variational principle can be used to treat a variety of problems, including the large deflection problems under combine loads.