应用数学和力学，第1卷第3期（1980年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

轴对称圆环壳的一般解

钱伟长 郑思梁（清华大学基础部）

（1980年2月28日收到）

摘　要

本文是前文[1]的推广，它不限于细环壳 $\alpha=a/R\ll 1$ 的假定，其中 a 为环壳的截面半径，R 为环壳的总体半径．提出了轴对称圆环壳在 $0\leqslant\alpha<1$ 范围内的一般解，本文的解可以用来解决波纹壳、热膨胀器、高压容器的过渡部分和波登管等实用问题．本文的结果是前人从未求得的圆环壳的一般解．

一、基本方程及非齐次解

在 Love—Kirchhoff 薄壳假定下，B. B. Новожилов 导出的轴对称环壳复变量方程为：

$$(1+\alpha\sin\varphi)\frac{d^2V}{d\varphi^2}-\alpha\cos\varphi\frac{dV}{d\varphi}+2\mu i\sin\varphi V=2\mu P_0\cos\varphi \tag{1.1}$$

其中
$$V=-\frac{4\mu^2D}{\alpha a^2}(1+\alpha\sin\varphi)\chi+i\left\{\frac{2\mu}{\alpha}\frac{(1+\alpha\sin\varphi)^2}{\sin\varphi}Q-2\mu\frac{Q_0}{\alpha}\cot\varphi\right\} \tag{1.1a}$$

$$P_0=-\frac{1}{2}\alpha qai+\frac{Q_0}{\alpha}2\mu \tag{1.1b}$$

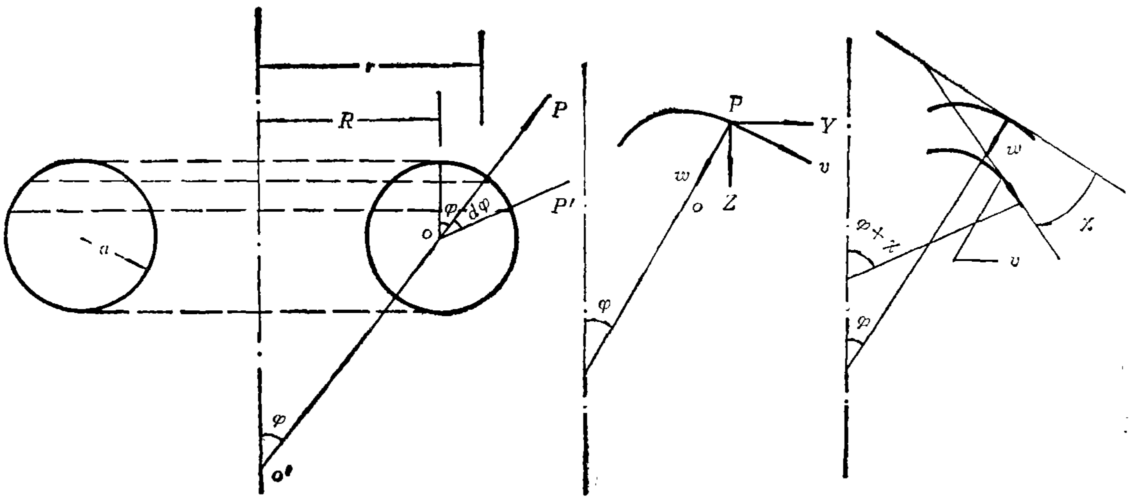
式中 $\alpha=a/R$、$\mu\cong\sqrt{3(1-\nu^2)}\dfrac{a^2}{Rh}$，$\nu$——泊桑比，$h$——壳的厚度，$q$——壳壁所受分布载荷（外向为正），$Q_0$——$\varphi=0$ 处的剪力，χ 和 Q 分别为壳的轴向转角变形和剪力．

如果根据（1.1）式求得解 V，我们可以用它的虚数部分（I_mV）和实数部分（R_eV）来表达内力和变形，内力素表达式为：

$$\left.\begin{aligned}
N_\varphi&=-\frac{\alpha\cos\varphi}{2\mu(1+\alpha\sin\varphi)^2}I_mV+\frac{1}{2}qa\frac{(2+\alpha\sin\varphi)}{1+\alpha\sin\varphi}+Q_0\frac{\alpha+\sin\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}\\
N_\theta&=-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{I_mV}{1+\alpha\sin\varphi}\right]+\frac{1}{2}qa-Q_0\frac{\alpha+\sin\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}\\
M_\varphi&=\frac{\alpha a}{4\mu^2}\left\{\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{R_eV}{1+\alpha\sin\varphi}\right]+\nu\frac{\alpha\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}R_eV\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

$$M_\theta=\frac{\alpha a}{4\mu^2}\left\{\nu\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{R_eV}{1+\alpha\sin\varphi}\right]+\frac{\alpha\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}R_eV\right\}$$

$$Q=\frac{\alpha}{2\mu}\frac{\sin\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}I_mV+Q_0\frac{\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}$$



(a) (b) (c)

图 1 环壳的尺寸、座标、位移和转角变形

轴向切线的变形转角χ、各点的径向位移 Y 和轴向位移 Z 的表达式为：

$$\left.\begin{aligned}\chi&=-\frac{R_eV}{Eha(1+\alpha\sin\varphi)}\\ Y&=\frac{R}{Eh}(1+\alpha\sin\varphi)(N_\theta-\nu N_\varphi)\\ Z&=Z_0-\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{R}{Eh}\frac{\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)}R_eVd\varphi\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

式中 E——弹性系数，$Z_0=Z_{\varphi=\varphi_0}$

方程（1.1）的非齐次解设为 V^*

$$\begin{aligned}V^*=&-2P_0\{A_1\cos\varphi+A_2\sin2\varphi-A_3\cos3\varphi-A_4\sin4\varphi+A_5\cos5\varphi\\&+A_6\sin6\varphi-A_7\cos7\varphi-A_8\sin8\varphi+\cdots+A_{4n+1}\cos(4n+1)\varphi\\&+A_{4n+2}\sin(4n+2)\varphi-A_{4n+3}\cos(4n+3)\varphi-A_{4n+4}\sin(4n+4)\varphi\\&+\cdots\}\end{aligned}\tag{1.4}$$

代入(1.1)，恒等两端有关项的系数，并利用三角关系式

$$\sin n\varphi\sin\varphi=\frac{1}{2}[\cos(n-1)\varphi-\cos(n+1)\varphi]$$

$$\cos n\varphi\sin\varphi=-\frac{1}{2}[\sin(n-1)\varphi-\sin(n+1)\varphi]$$

得递推关系：

$$A_1=\frac{1}{\dfrac{1}{\mu}-i\left(1+i\dfrac{2.3}{2\mu}\alpha\right)\dfrac{A_2}{A_1}} \tag{1.5a}$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{i\left[1+i\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\mu}\alpha\right]}{\dfrac{n^2}{\mu}-i\left[1+i\dfrac{(n+1)(n+2)}{2\mu}\alpha\right]\dfrac{A_{n+1}}{A_n}} \tag{1.5b}$$

$$(n=1,2,3\cdots)$$

令

$$S_n=\frac{A_n}{A_{n-1}} \tag{1.6}$$

很易证明

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1} \tag{1.7}$$

所以，根据 O. Perron 定理[3]，连分式的极限比例收敛至(1.7)式的小根，于是，当 $\alpha<1$时

$$|S|<1 \tag{1.8}$$

亦即(1.4)是绝对收敛的.

在实际计算中，可以直接利用(1.5b)，逐一计算系数比值$\frac{A_n}{A_{n-1}}$，$\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}$，$\cdots\frac{A_4}{A_3}$，$\frac{A_3}{A_2}$，$\frac{A_2}{A_1}$，然后代入(1.5a)求得A_1，有了A_1之后，$A_2=\frac{A_2}{A_1}\cdot A_1\ \cdots\ A_n=\frac{A_n}{A_{n-1}}\cdot A_{n-1}$，从而计算得系数. A_1、A_2、A_3、$\cdots A_n$.

(1.4)式的解是B. B. Новожилов[4]求得的周期解，因此，它无法满足边界条件. 为此，我们必须求得(1.1)式的齐次解.

二、齐 次 解

(1.1)的齐次方程可写成

$$\left[1-\frac{\alpha i}{2}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})\right]\frac{d^2V}{d\varphi^2}-\frac{\alpha}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\frac{dV}{d\varphi}+\mu(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})V=0 \tag{2.1}$$

设其解为

$$V=e^{\lambda\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\varphi} \tag{2.2}$$

其中λ为待定的指数，C_n 为待定系数. 代入(2.1)得有关系数的递推公式

$n>0$

$$\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{-\{\mu-\dfrac{\alpha i}{2}[\lambda+i(n-1)][\lambda+i(n-2)]\}}{(\lambda+in)^2-\{\mu-\dfrac{\alpha i}{2}[\lambda+i(n+1)][\lambda+i(n+2)]\}\dfrac{C_{n+1}}{C_n}} \tag{2.3a}$$

$n<0$

$$\frac{C_n}{C_{n+1}}=\frac{\{\mu-\frac{\alpha i}{2}[\lambda+i(n+1)][\lambda+i(n+2)]\}}{(\lambda+in)^2+\{\mu-\frac{\alpha i}{2}[\lambda+i(n-1)][\lambda+i(n-2)]\}\frac{C_{n-1}}{C_n}} \tag{2.3b}$$

$n=0$

$$[\mu-\frac{\alpha i}{2}(\lambda-i)(\lambda-2i)]\frac{C_{-1}}{C_0}+\lambda^2-[\mu-\frac{\alpha i}{2}(\lambda+i)(\lambda+2i)]\frac{C_1}{C_0}=0 \tag{2.3c}$$

令

$$\left.\begin{aligned} S_n^{(1)}&=\frac{C_n}{C_{n-1}} \quad n>0 \\ S_n^{(2)}&=\frac{C_n}{C_{n+1}} \quad n<0 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

容易证明

$$\left.\begin{aligned} S^{(1)}&=\lim_{n\to\infty}S_n^{(1)}=i\left(\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}\right) \\ |S^{(1)}|&=\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1} \\ S^{(2)}&=\lim_{n\to\infty}S_n^{(2)}=i\left(-\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}\right) \\ |S^{(2)}|&=-\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其中$\alpha<1$

正如文[2]所证明，级数的系数比收歛到极限二次式的“大根”，而连分式则收歛至“小根”，所以它们是收歛的.

由(2.3)式，利用迭代法，可以得到λ及C_n系数值.

必须指出，如果将λ改为$-\lambda$，则(2.3)不变，其差别只在于有关的$\frac{C_{-n}}{C_0}$，$\frac{C_n}{C_0}$相互对调而已，因此

$$\left.\begin{aligned} V_{(1)}&=e^{\lambda\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\varphi} \\ V_{(2)}&=e^{-\lambda\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nC_ne^{-in\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

是一对独立解. λ、$\frac{C_n}{C_{n-1}}(n>0)$、$\frac{C_n}{C_{n+1}}(n<0)\cdots$都是复数.

令

$$\lambda=\beta+i\gamma,\quad \frac{C_n}{C_0}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n),\quad \frac{C_{-n}}{C_0}=\frac{1}{2}(a_{-n}+ib_{-n}) \tag{2.7}$$

则$V_{(1)}$，$V_{(2)}$可表为

$$\left.\begin{aligned} V_{(1)}&=e^{\beta\varphi}(\cos\gamma\varphi+i\sin\gamma\varphi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{in\varphi} \\ V_{(2)}&=e^{-\beta\varphi}(\cos\gamma\varphi-i\sin\gamma\varphi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n C_n e^{-in\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

如果环壳的区域为$\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$，其中$\varphi=\varphi_1$，$\varphi=\varphi_2$为壳的两条边界，我们认为在处理边值问题时，最方便合用的两个独立的齐次解，可写成

$$\begin{aligned} V_{(1)}&=(C_0'+i\bar{C}_0')e^{-\beta(\varphi_2-\varphi)}(\cos\gamma\varphi+i\sin\gamma\varphi)[f_1(\varphi)+if_2(\varphi)] \\ V_{(2)}&=(B_0'+i\bar{B}_0')e^{-\beta(\varphi-\varphi_1)}(\cos\gamma\varphi-i\sin\gamma\varphi)[g_1(\varphi)+ig_2(\varphi)] \end{aligned} \tag{2.9}$$

式中$f_1(\varphi)$、$f_2(\varphi)$、$g_1(\varphi)$和$g_2(\varphi)$为三角级数形式的实函数，C_0'、$\overline{C_0'}$、B_0'及$\overline{B_0'}$为待定的实数

$$f_1(\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n\cos n\varphi-q_n'\sin n\varphi) \tag{2.10a}$$

$$f_2(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n'\sin n\varphi+q_n\cos n\varphi) \tag{2.10b}$$

$$g_1(\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(p_n\cos n\varphi+q_n'\sin n\varphi) \tag{2.10c}$$

$$g_2(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-p_n'\sin n\varphi+q_n\cos n\varphi) \tag{2.10d}$$

其中

$$p_n=\frac{1}{2}(a_n+a_{-n}),\ q_n=\frac{1}{2}(b_n+b_{-n}),\ p_n'=\frac{1}{2}(a_n-a_{-n}),\ q_n'=\frac{1}{2}(b_n-b_{-n}) \tag{2.11}$$

由于(2.9)的解中有$e^{-\beta(\varphi-\varphi_1)}$和$e^{-\beta(\varphi_2-\varphi)}$，所以这些解在远离边界时衰减很快，这种衰减的性质指出，$V_{(1)}$、$V_{(2)}$都是代表边界效应性质的应力部分；在壳的内部，其应力分布主要决定于非齐次解．其次，上述齐次解适用于壳的全域，没有奇点，可见级数解的收敛域的限制，完全是由于采取级数解的形式所引起的，并不是微分方程解的本质问题．

三、$\lambda=\beta+i\gamma$的 计 算

根据(1.1)式，可以看到λ为μ和α的函数，对细环壳而言，$\alpha=0$．所以$\lambda(\mu,0)$为μ的函数．对于实际的薄环壳而言，$h/a\leqslant\frac{1}{10}$，于是，对于已给的μ值而言，对$\alpha=\frac{a}{R}$有一定限制，因为

$$\mu=\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{a^2}{Rh}\geqslant 10\alpha\sqrt{3(1-\nu^2)} \tag{3.1}$$

或

$$\alpha \leqslant \frac{\mu}{10\sqrt{3(1-\nu^2)}} = \frac{\mu}{16.52} \tag{3.2}$$

所以，对于薄壳而言，$\mu=1$ 时，$\alpha\leqslant 0.06$，$\mu=10$ 时 $\alpha\leqslant 0.605$，依此类推，我们将在(3.2)式的限制条件下，用迭代法计算（2.3）式的 λ 值.

设 λ_k 为第 k 次的迭代值. 从（2.3c）式，有

$$\lambda_k = \sqrt{T_1(\lambda_{k-1}) - T_2(\lambda_{k-1})} \tag{3.3}$$

其中

$$T_1(\lambda_{k-1}) = \left[\mu - \frac{\alpha}{2} i(\lambda_{k-1}+i)(\lambda_{k-1}+2i)\right]\left(\frac{C_1}{C_0}\right)_{k-1}$$

$$T_2(\lambda_{k-1}) = \left[\mu - \frac{\alpha}{2} i(\lambda_{k-1}-i)(\lambda_{k-1}-2i)\right]\left(\frac{C_{-1}}{C_0}\right)_{k-1}$$

而且有 $n>0$ 时

$$\left(\frac{C_n}{C_{n-1}}\right)_{k-1} = \frac{-\left\{\mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda_{k-1}+i(n-1)][\lambda_{k-1}+i(n-2)]\right\}}{(\lambda_{k-1}+in)^2 - \left\{\mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda_{k-1}+i(n+1)][\lambda_{k-1}+i(n+2)]\right\}\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right)_{k-1}} \tag{3.4a}$$

$n<0$ 时

$$\left(\frac{C_n}{C_{n+1}}\right)_{k-1} = \frac{\left\{\mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda_{k-1}+i(n+1)][\lambda_{k-1}+i(n+2)]\right\}}{(\lambda_{k-1}+in)^2 + \left\{\mu - \frac{\alpha}{2} i[\lambda_{k-1}+i(n-1)][\lambda_{k-1}+i(n-2)]\right\}\left(\frac{C_{n-1}}{C_n}\right)_{k-1}} \tag{3.4b}$$

求（3.3）式的解，在实际上是在（y, λ）平面中，求曲线

$$\begin{aligned} &y=\lambda \\ &y=\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

的交点. 当然，因为 $\lambda=\beta+i\gamma$ 和 $\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 都是复数，所以，其说明比较复杂. 为了简单起见，先设 $\alpha=0$，于是不论 λ 和 $\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 都是实数. 通过实际计算，(3.5)式的两条曲线有图 2(a,b,c) 三种情况：

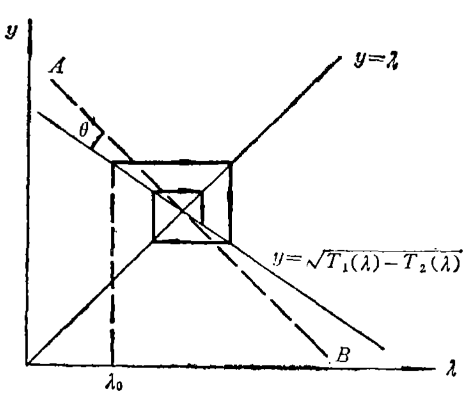


图2a $AB\perp(y=\lambda)$ $45°>\theta>0$

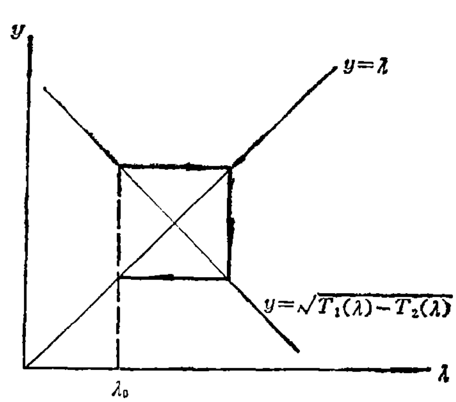


图2b $y=\lambda$ 和 $y=\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 正交

当图 2a 中，$45°>\theta>0$ 时，明显地看到，当用（3.3）式的简单迭代就能达到收敛于交点的结果．这是多数的情况，当 $\mu<1$ 时是这样的情况，简单迭代就能得到预期的结果．

在图 2b 中，$y=\lambda$ 和 $y=\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 正交，于是，当用（3.3）式的简单迭代时，达到临界状态，往复迭代，既不收敛也不发散．

在图 2c 中，$y=\lambda$ 和 $y=\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 不正交，设 AB 和 $y=\lambda$ 正交，$y=\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 和 AB 的交角 θ 和图 2a 相反，θ 向上，很容易看到，当用（3.3）式进行简单迭代时，是发散的．

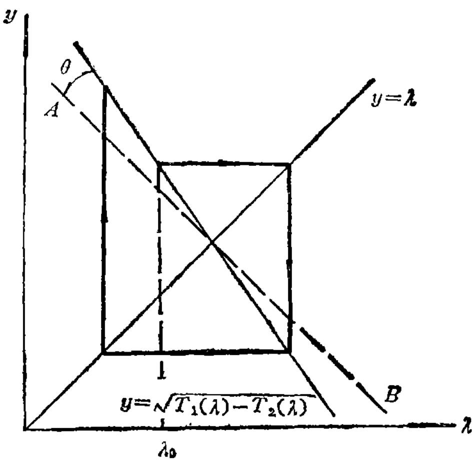


图2c　$y=\lambda$ 和 $y=\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 相交处，θ 从 AB 线向上

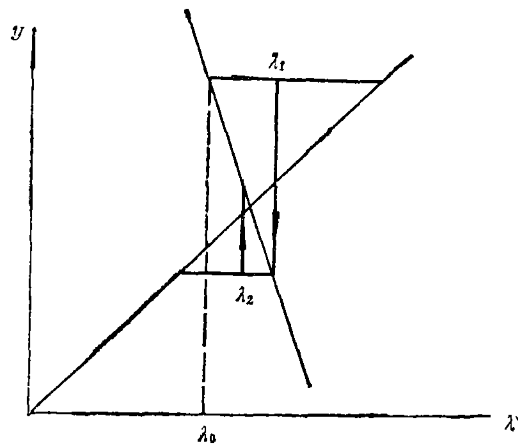


图 3　折算迭代法

$\lambda_1=\eta\lambda_0+(1-\eta)\sqrt{T_1(\lambda_0)-T_2(\lambda_0)}$

$\lambda_2=\eta\lambda_1+(1-\eta)\sqrt{T_1(\lambda_1)-T_2(\lambda_1)}$

在遇到图 2b 和图 2c 的情况时，我们不能用简单迭代．我们建议采用折算迭代法，称

$$\lambda_k=\eta\lambda_{k-1}+(1-\eta)\sqrt{T_1(\lambda_{k-1})-T_2(\lambda_{k-1})} \tag{3.6}$$

其中 η 取大于 1/2 的数．$\frac{1}{2}<\eta<1$．当图 2c 中的 θ 越大（$\leqslant 45°$）时，η 应该取越大的值．在 $\mu=3\sim6$ 之间，η 有时要取到 99/100 这样接近于 1 的数．见图 3，这样的折算迭代可以收到收敛的效果．

当曲线 $y=\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 很接近于 y 轴的平行线时，要求 λ_0 值的选择很接近于交点，不然，稍一偏离，$\sqrt{T_1(\lambda)-T_2(\lambda)}$ 值就相差很大，所以，要求用拉格朗日插入法从 μ、α 值附近的已知 $\lambda=\beta+i\gamma$ 值中估计 λ_0 值．

λ 计算结果见表Ⅰ、Ⅱ及图 4a、b．有关非齐次解系数 A_n 和齐次解系数 a_n、a_{-n}、b_n 和 b_{-n}，因篇幅关系将另文发表．

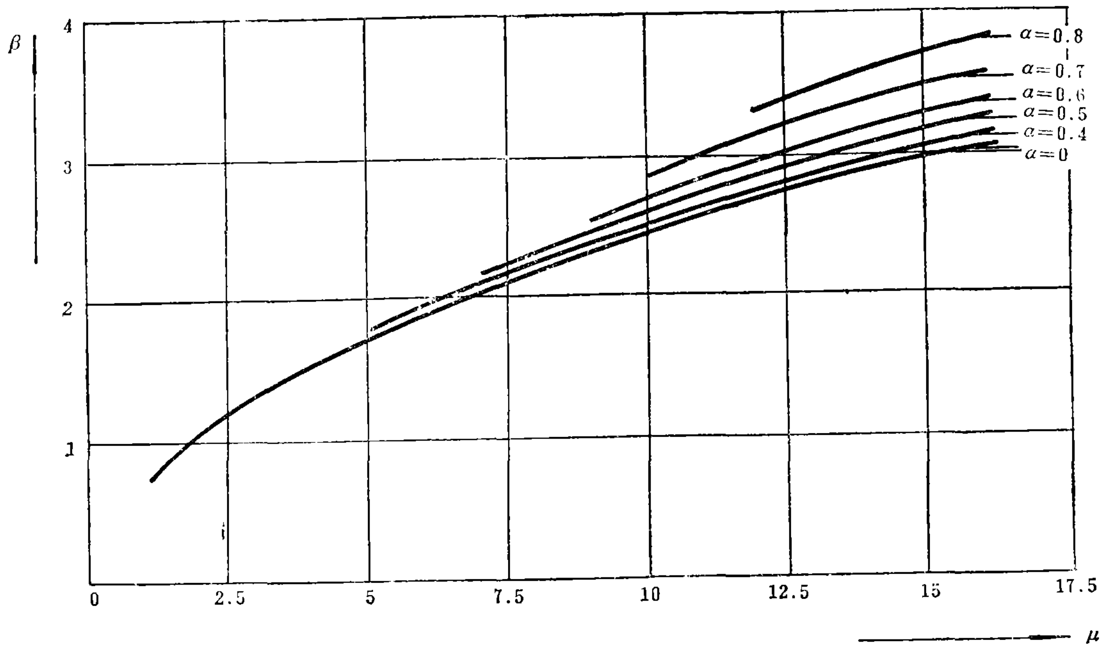


图4a　μ—β 关系曲线

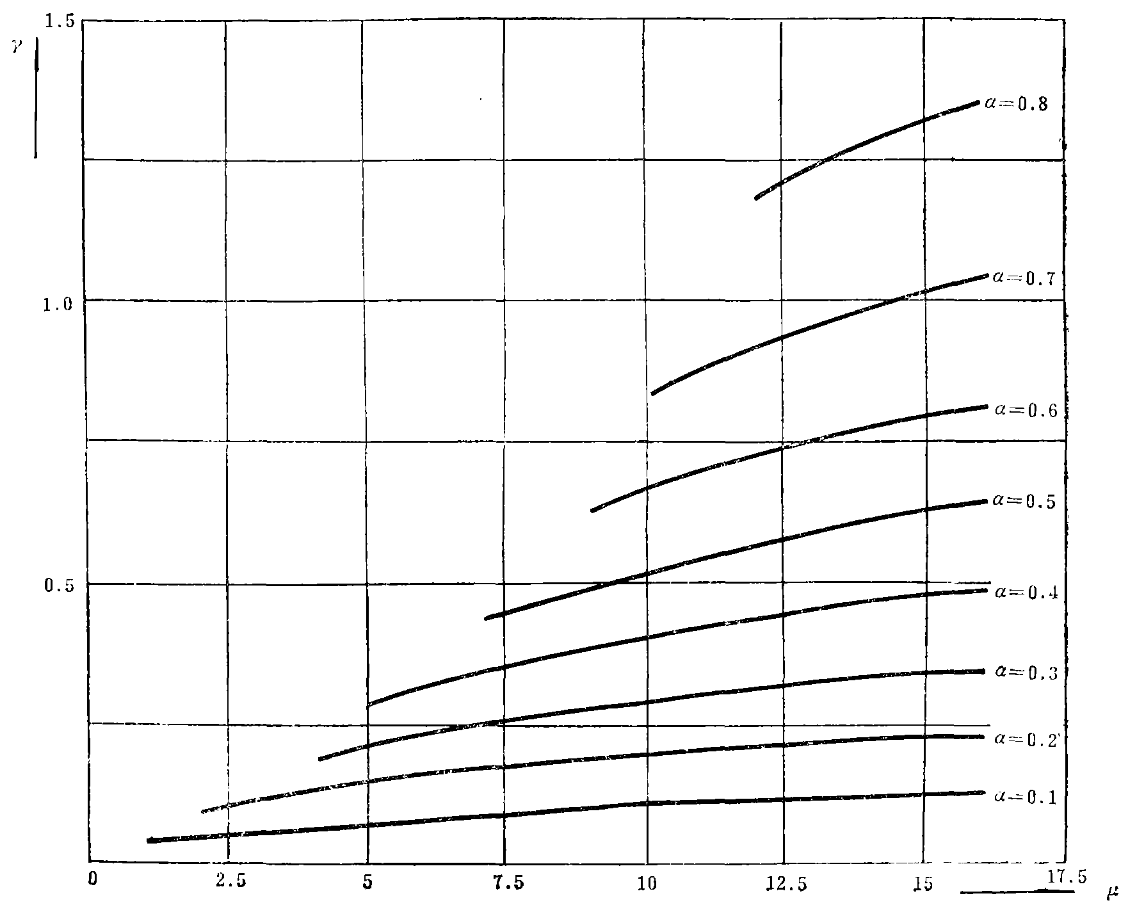


图4b　μ—γ 关系曲线

表 I　$\lambda=\beta+i\gamma$ 中的 β 值

μ \ α	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.015
0.1	0.137352$_2$	0.137354$_1$	0.137359$_9$	0.137369$_6$	0.137383$_1$	0.137400$_5$	0.137421$_7$	0.137446$_7$				
0.2	0.256150$_1$	0.256151$_2$	0.256154$_4$	0.256159$_7$	0.256167$_2$	0.256176$_8$	0.256188$_5$	0.256202$_3$				
0.3	0.353357$_5$	0.353358$_3$	0.353360$_5$	0.353364$_2$	0.353369$_4$	0.353376$_0$	0.353384$_2$	0.353393$_8$	0.353404$_9$	0.353417$_5$	0.353431$_5$	0.353523$_7$
0.4	0.433513$_4$	0.433513$_9$	0.433515$_7$	0.433518$_5$	0.433522$_6$	0.433527$_7$	0.433534$_1$	0.433541$_5$	0.433554$_4$	0.433559$_9$	0.433570$_8$	0.433642$_7$
0.5	0.501378$_6$	0.501379$_1$	0.501380$_5$	0.501383$_0$	0.501386$_3$	0.501390$_7$	0.501396$_0$	0.501402$_3$	0.501409$_9$	0.501417$_8$	0.501426$_9$	0.501487$_4$
0.6	0.560412$_7$	0.560413$_1$	0.560414$_4$	0.560416$_6$	0.560419$_6$	0.560423$_5$	0.560428$_2$	0.560433$_8$	0.560440$_2$	0.560447$_6$	0.560455$_8$	0.560509$_3$
0.7	0.612966$_1$	0.612966$_6$	0.612967$_8$	0.612969$_8$	0.612972$_6$	0.612976$_2$	0.612980$_6$	0.612985$_8$	0.612992$_1$	0.612998$_6$	0.613006$_2$	0.613056$_5$
0.8	0.660637$_6$	0.660637$_9$	0.660639$_1$	0.660641$_0$	0.660643$_7$	0.660467$_1$	0.660651$_3$	0.660656$_3$	0.660662$_3$	0.660668$_5$	0.660675$_8$	0.660723$_3$

μ \ α	0	0.010	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05	0.06	0.07	0.08
0.3	0.353357$_5$		0.353653$_0$									
0.4	0.433513$_4$		0.433743$_5$	0.433872$_5$								
0.5	0.501378$_6$		0.501572$_3$	0.501680$_8$	0.501813$_5$	0.501970$_7$						
0.6	0.560412$_7$		0.560585$_4$	0.560681$_6$	0.560800$_8$	0.560940$_5$	0.561101$_8$					
0.7	0.612966$_1$		0.613126$_2$	0.613216$_2$	0.613326$_3$	0.613456$_6$	0.613606$_2$	0.613777$_0$				
0.8	0.660637$_6$		0.660790$_0$	0.660876$_6$	0.660981$_7$	0.661105$_6$	0.661249$_3$	0.661412$_2$	0.661594$_4$			
0.9	0.704534$_4$		0.704682$_8$		0.704869$_6$		0.705130$_8$		0.705465$_8$			
1	0.745441$_4$	0.745477$_7$	0.745587$_6$		0.745771$_9$		0.746029$_8$		0.746360$_7$	0.746766$_3$		
2	1.066549$_3$	1.066589$_3$	1.066704$_6$		1.066899$_1$		1.067170$_4$		1.067520$_5$	1.067948$_0$	1.068454$_1$	1.069038$_7$

表1 λ=β+iγ 中的β值（续）

μ \ α	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.745441$_4$	0.749129$_3$								
2	1.066519$_3$	1.070446$_1$	1.082331$_7$							
3	1.310949$_2$	1.315140$_6$	1.327948$_4$							
4	1.516731$_1$	1.521217$_5$	1.534943$_2$	1.558767$_0$						
5	1.697751$_9$	1.702535$_2$	1.717180$_0$	1.742628$_8$	1.780710$_4$					
6	1.861235$_0$	1.866307$_3$	1.881839$_9$	1.908858$_1$	1.919336$_9$					
7	2.011469$_3$	2.016818$_2$	2.033203$_3$	2.061719$_3$	2.101487$_8$	2.165255$_6$				
8	2.151236$_4$	2.156850$_6$	2.174051$_1$	2.204003$_1$	2.218956$_0$	2.312891$_2$				
9	2.282461$_3$	2.288328$_5$	2.306312$_4$	2.337639$_7$	2.384685$_1$	2.451619$_0$	2.546099$_2$			
10	2.406530$_1$	2.412653$_7$	2.431390$_1$	2.464038$_6$	2.513093$_4$	2.582961$_4$	2.681586$_7$	2.824532$_7$		
11	2.524527$_9$	2.530877$_2$	2.550438$_9$	2.584263$_8$	2.635252$_2$	2.707912$_5$	2.810548$_5$	2.959425$_7$		
12	2.637244$_1$	2.643820$_3$	2.663984$_0$	2.699137$_8$	2.751992$_5$	2.827346$_2$	2.933847$_2$	3.088134$_6$	3.330356$_7$	
13	2.745334$_7$	2.752130$_1$	2.772972$_8$	2.809318$_1$	2.863976$_7$	2.941935$_3$	3.052168$_0$	3.212264$_4$	3.462984$_7$	
14	2.849326$_3$	2.856337$_7$	2.877838$_7$	2.915336$_5$	2.971746$_4$	3.052225$_1$	3.166067$_8$	3.331494$_9$	3.590716$_6$	4.082103$_5$
15	2.949655$_3$	2.956875$_2$	2.979014$_6$	3.017632$_9$	3.075740$_0$	3.158665$_2$	3.276011$_9$	3.446601$_4$	3.711051$_5$	4.221358$_8$
16	3.016682$_7$	3.051101$_0$	3.076865$_6$	3.116573$_6$	3.176330$_4$	3.261633$_5$	3.382382$_9$	3.557986$_9$	3.833429$_8$	4.356166$_4$

表Ⅱ λ=β+iγ 中的 γ 值

μ \ α	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.015
0.1	0	0.000658_9	0.001317_8	0.001976_5	0.002635_1	0.003293_5	0.003951_6	0.004609_4				
0.2	0	0.000569_1	0.001138_2	0.001707_3	0.002276_3	0.002845_3	0.003414_2	0.003983_1				
0.3	0	0.000495_9	0.000991_8	0.001487_7	0.001983_5	0.002479_4	0.002975_2	0.003471_0	0.003966_8	0.004462_5	0.004958_1	0.007435_7
0.4	0	0.000448_6	0.000897_3	0.001345_9	0.001794_5	0.002243_1	0.002691_7	0.003140_3	0.003588_9	0.004037_4	0.004485_9	0.006728_2
0.5	0	0.000421_0	0.000842_1	0.001263_1	0.001684_1	0.002105_1	0.002526_3	0.002947_1	0.003368_1	0.003789_1	0.004210_1	0.006314_8
0.6	0	0.000406_5	0.000813_2	0.001219_5	0.001625_9	0.002032_3	0.002438_8	0.002845_3	0.003251_8	0.003658_2	0.004064_7	0.006096_8
0.7	0	0.000400_4	0.000800_8	0.001201_1	0.001601_4	0.002001_8	0.002402_2	0.002802_6	0.003209_0	0.003603_3	0.004003_6	0.006005_4
0.8	0	0.000399_8	0.000799_4	0.001199_1	0.001598_8	0.001998_5	0.002398_3	0.002797_9	0.003197_7	0.003597_4	0.003997_1	0.005995_7

μ \ α	0	0.010	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050	0.060	0.070	0.080
0.3	0		0.009911_1									
0.4	0		0.008969_6	0.011209_8								
0.5	0		0.008419_1	0.010522_8	0.012625_8	0.011728_0						
0.6	0		0.008129_0	0.010160[illegible]	0.012192_1	0.014223_1	0.016253_8					
0.7	0		0.008007_1	0.010008[illegible]	0.012010_3	0.014011_8	0.016012_6	0.018014_3				
0.8	0		0.007994_1	0.009993_0	0.011991_6	0.013990_4	0.015989_2	0.017988_2	0.019987_2			
0.9	0		0.008051_8		0.012078[illegible]		0.016105_1		0.020133_0			
1	0	0.004077_0	0.008154_2		0.012232_1		0.016310_8		0.020391_1	0.024473_2		
2	0	0.004863_9	0.009728_5		0.014594_5		0.019462_6		0.024333_6	0.029208_2	0.034086_9	0.038970_8

表Ⅱ $\lambda=\beta+i\gamma$ 中的 γ 值（续）

μ \ α	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0	0.040821$_5$								
2	0	0.048756$_5$	0.098252$_3$							
3	0	0.056004$_1$	0.113053$_0$							
4	0	0.062443$_7$	0.126187$_0$	0.192728$_8$						
5	0	0.068336$_1$	0.138182$_9$	0.211270$_8$	0.289859$_0$					
6	0	0.073787$_6$	0.149269$_5$	0.228384$_2$	0.313653$_6$					
7	0	0.078876$_0$	0.159610$_9$	0.244332$_5$	0.335801$_4$	0.438035$_9$				
8	0	0.082661$_8$	0.169334$_1$	0.259319$_8$	0.356595$_8$	0.465501$_1$				
9	0	0.088190$_8$	0.178534$_9$	0.273495$_1$	0.376255$_6$	0.491446$_2$	0.626622$_7$			
10	0	0.092502$_0$	0.187291$_2$	0.286978$_8$	0.394944$_3$	0.516097$_4$	0.658437$_3$	0.836920$_5$		
11	0	0.096623$_0$	0.195658$_2$	0.299860$_7$	0.412795$_0$	0.539629$_5$	0.688789$_5$	0.876019$_0$		
12	0	0.100574$_9$	0.203684$_5$	0.312215$_7$	0.429908$_3$	0.562190$_5$	0.717861$_9$	0.913449$_2$	1.186380$_0$	
13	0	0.104379$_5$	0.211406$_9$	0.324103$_4$	0.446369$_6$	0.583865$_6$	0.745806$_8$	0.949407$_1$	1.233721$_7$	
14	0	0.108052$_1$	0.218860$_2$	0.335571$_1$	0.462246$_3$	0.604774$_7$	0.772743$_8$	0.984054$_2$	1.279319$_8$	1.790849$_3$
15	0	0.111603$_2$	0.226068$_8$	0.346661$_7$	0.477594$_8$	0.624987$_9$	0.798773$_7$	1.017523$_1$	1.323353$_4$	1.853455$_4$
16	0	0.115045$_3$	0.233055$_3$	0.357408$_9$	0.492471$_9$	0.644566$_4$	0.823984$_9$	1.049929$_0$	1.365962$_4$	1.913985$_2$

参 考 文 献

1. 钱伟长、郑思梁，轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解．清华大学学报 19 卷第一期27—47页（1979）．

2. 钱伟长，轴对称圆环壳级数解的收敛问题，兰州大学学报（力学专刊）（1979）．

3. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen第 7 章(1950)Springer—Verlage.

4. B. B. Новожилов《薄壳理论》，北京石油学院译，科学出版社 （1951）．

General Solutions of Axial Symmetrical Ring Shells

Chien Wei-zang Zheng Se liang

(Tsing Hua University, Peking)

Abstract

This paper gives the general solutions of axial symmetrical ring shells all for values of slenderness ratio This solution is new, and can be used to solve various practical problems, including corrugated tubes, thermal expansion joints, Borden tubes, etc.