应用数学和力学，第1卷第3期（1980年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

从流体动力学观点看半导体物理中的两个问题

蔡树棠（合肥中国科技大学近代力学系）

（1980年2月25日收到）

摘　要

本文从流体动力学的观点出发讨论了半导体物理学中间常常遇到的两个问题．其一为p-n结问题，发现过去对它的处理方法和得到的结论都是错误的．其二为方块电阻的c系数问题，发现过去对它的处理过程中的数学方法是错误的．

一、p-n 结 问 题

在半导体物理学中通常讲p-n结的时候，都讲肖克莱理论[1][2][3]．在肖克莱理论里面，有很多模糊不清的地方．最后得到的电流密度为指数形式的公式，在和实验比较的时候，无论是正向还是反向，在电压较高的情况下，都有较大的偏离．在解释实验和理论偏离的时候，有些书上则归结为复合的影响．我们从流体动力学的连续方程式出发，用无量纲化的办法分析了这个问题．发现指数形式的公式本来就不是对一般情形都能适用的，所以实验和理论的偏离根本不能归结为复合的影响．因为这个问题有关晶体管和集成电路的设计的基本原理，所以我们把这个问题提出来讨论，作为今后设计晶体管和集成电路的一个参考意见．

我们考虑问题的出发点是电子和空穴的连续方程和“欧姆定律”（即电子和空穴的运动速度和电场强度成正比）．我们写出电子和空穴的连续方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot(p\mu_+\vec{E})=\nabla\cdot(D_+\nabla p)-Q' \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}-\nabla\cdot(n\mu_-\vec{E})=\nabla\cdot(D_-\nabla n)-Q \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial n_t}{\partial t}=Q-Q' \tag{1.3}$$

式中p为单位体积的空穴数，n为单位体积的电子数．μ_+为空穴迁移率，μ_-为电子迁移率．D_+为空穴扩散系数，D_-为电子扩散系数．Q'为电子从杂质能级到满带减去从满带到杂质能级的差数．Q为电子从导带到杂质能级减去从杂质能级到导带的差数．n_t为单位体积中杂质能级上的电子数．最后一个式子就是通常所说的陷阱效应．

我们假设半导体温度是均匀的，对于一维定常运动，我们就可写成

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu_+ p\frac{d\phi}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(D_+\frac{dp}{dx}\right)-Q \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\mu_- n\frac{d\phi}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(D_-\frac{dn}{dx}\right)-Q \tag{1.5}$$

式中ϕ为电势．我们引入特征长度L，特征电压$|V_0|$，本征电子空穴浓度n_i．令$p^*=\frac{p}{n_i}$，

$n^*=\frac{n}{n_i}$，$\phi^*=\frac{\varphi}{|V_0|}$，$x^*=\frac{x}{L}$．上面方程就化成

$$\frac{d}{dx^*}\left(D_+\frac{dp^*}{dx^*}+\mu_+|V_0|p^*\frac{d\phi^*}{dx^*}\right)-\frac{QL^2}{n_i}=0 \tag{1.4$'$}$$

$$\frac{d}{dx^*}\left(D_-\frac{dn^*}{dx^*}-\mu_-|V_0|n^*\frac{d\phi^*}{dx^*}\right)-\frac{QL^2}{n_i}=0 \tag{1.5$'$}$$

积分后，就有

$$\frac{dp^*}{dx^*}+\frac{\mu_+|V_0|}{D_+}p^*\frac{d\phi^*}{dx^*}-\frac{1}{D_+}\int\frac{L^2Q}{n_i}dx^*=-\frac{J_0^+L}{qn_iD_+} \tag{1.6}$$

$$\frac{dn^*}{dx^*}-\frac{\mu_-|V_0|}{D_-}n^*\frac{d\phi^*}{dx^*}-\frac{1}{D_-}\int\frac{L^2Q}{n_i}dx^*=\frac{J_0^-L}{qn_iD_-} \tag{1.7}$$

式中q为电子电荷绝对值．J_0^+和J_0^-为原点上的空穴电流密度和电子电流密度．令$\theta=\int\frac{Q}{n_i}dx^*$．并且利用爱因斯坦关系式

$$\frac{\mu_+}{D_+}=\frac{\mu_-}{D_-}=\frac{q}{kT} \tag{1.8}$$

令 $f=e^{\frac{q|V_0|}{kT}\phi^*}$，$x^*$的两端的值为$\alpha$和$\beta$，再把上式积分，就得到

$$p^*=\frac{1}{f}\left[-\int\frac{J_0^+L}{qn_iD_+}f\,dx^*+\int\frac{L^2}{D_+}f\theta\,dx^*+p_0^*f_0\right] \tag{1.9}$$

$$n^*=f\left[\int\frac{J_0^-L}{qn_iD_-}\frac{1}{f}dx^*+\int\frac{L^2}{D_-}\frac{\theta}{f}dx^*+\frac{n_0^*}{f_0}\right] \tag{1.10}$$

式中p_0^*、n_0^*、f_0为p^*、n^*、f在原点的值．令n_α^*、n_β^*、p_α^*、p_β^*、V_α、V_β为相应物理量在边界上的值．把边界条件代入．

$$\frac{n_0^*}{f(0)}+\frac{J_0^-L}{qn_iD_-}\int_0^\alpha\frac{1}{f}dx^*=\frac{n_\alpha^*}{f(\alpha)}-\frac{L^2}{D_-}\int_0^\alpha\frac{\theta}{f}dx^*$$

$$\frac{n_0^*}{f(0)}+\frac{J_0^-L}{qn_iD_-}\int_0^\beta\frac{1}{f}dx^*=\frac{n_\beta^*}{f(\beta)}-\frac{L^2}{D_-}\int_0^\beta\frac{\theta}{f}dx^*$$

解出

$$\frac{J_0^-L}{qn_iD_-}=-\left(\frac{n_\beta^*}{f(\beta)}-\frac{n_\alpha^*}{f(\alpha)}+\int_\beta^\alpha\frac{L^2}{D_-}\frac{\theta}{f}dx^*\right)\Big/\left(\int_\beta^\alpha\frac{1}{f}dx^*\right) \tag{1.11}$$

同样我们得到

$$\frac{J_0^+ L}{qn_i D_+} = -\left(p_\alpha^* f(\alpha) - p_\beta^* f(\beta) - \int_\beta^\alpha \frac{L^2}{D_+} f\theta dx^*\right) \Big/ \left(\int_\beta^\alpha f dx^*\right) \tag{1.12}$$

最后得到的总电流密度的表达式为

$$\begin{aligned}-(J_0^+ + J_0^-) = {} & \frac{qn_i}{L}\left[\frac{p_\alpha^* f(\alpha) - p_\beta^* f(\beta)}{\int_\beta^\alpha f dx^*} D_+ + \frac{\frac{n_\beta^*}{f(\beta)} - \frac{n_\alpha^*}{f(\alpha)}}{\int_\beta^\alpha \frac{1}{f} dx^*} D_-\right] \\ & + qn_i L\left[\frac{-D_+\int_\beta^\alpha \frac{1}{D_+} f\theta dx^*}{\int_\beta^\alpha f dx^*} + \frac{D_-\int_\beta^\alpha \frac{1}{D_-}\frac{\theta}{f} dx^*}{\int_\beta^\alpha \frac{1}{f} dx^*}\right]\end{aligned} \tag{1.13}$$

当平衡时候，Q 为零，电流密度为零，就有

$$p_\alpha^* f(\alpha) - p_\beta^* f(\beta) = 0$$

$$\frac{n_\alpha^*}{f(\alpha)} - \frac{n_\beta^*}{f(\beta)} = 0$$

$$\theta = 0$$

一般说来，在n_α^*和n_β^*之间总有一个大小．我们令$n_\alpha^* < n_\beta^*$．这样

$$\frac{p_\beta^*}{p_\alpha^*} = \frac{n_\alpha^*}{n_\beta^*} = \exp\left[\frac{q|V_0|(\phi_\alpha^* - \phi_\beta^*)_{平衡}}{kT}\right] = \exp\left[\frac{qV_{平衡}}{kT}\right]$$

$$V_{平衡} = \frac{kT}{q}\ln\frac{p_\beta^*}{p_\alpha^*} = \frac{kT}{q}\ln\frac{n_\alpha^*}{n_\beta^*} \quad < 0$$

在有外加电压的时候，外加电压V为

$$V = V_\alpha - V_\beta - V_{平衡} \tag{1.14}$$

正向时候$V>0$，反向时候$V<0$．这样总电流密度为

$$\begin{aligned}-(J_0^+ + J_0^-) = {} & \frac{qn_i}{L}\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)\left[\frac{p_\beta^* f(\beta)}{\int_\beta^\alpha f dx^*} D_+ + \frac{\frac{n_\alpha^*}{f(\alpha)}}{\int_\beta^\alpha \frac{1}{f} dx^*} D_-\right] \\ & + qn_i L\left[\frac{D_-\int_\beta^\alpha \frac{1}{D_-}\frac{\theta}{f} dx^*}{\int_\beta^\alpha \frac{1}{f} dx^*} - \frac{D_+\int_\beta^\alpha \frac{1}{D_+} f\theta dx^*}{\int_\beta^\alpha f dx^*}\right]\end{aligned} \tag{1.15}$$

当外加电压为负的时候，我们引入 $g = \frac{1}{f}$，则总电流密度为

$$\begin{aligned}-(J_0^+ + J_0^-) = {} & \frac{qn_i}{L}\left(e^{-\frac{q|V|}{kT}} - 1\right)\left[\frac{\frac{p_\beta}{g(\beta)}}{\int_\beta^\alpha \frac{1}{g} dx^*} D_+ + \frac{n_\alpha^+ g(\alpha)}{\int_\beta^\alpha g dx^*} D_-\right] \\ & + qn_i L\left[\frac{D_-\int_\beta^\alpha \frac{1}{D_-}\theta g dx^*}{\int_\beta^\alpha g dx^*} - \frac{D_+\int_\beta^\alpha \frac{1}{D_+}\frac{\theta}{g} dx^*}{\int_\beta^\alpha \frac{1}{g} dx^*}\right]\end{aligned} \tag{1.15'}$$

从这里可以看出肖克莱理论中的常数，实际上是

$$\frac{qn_i}{L}\left[\frac{p_\beta^* f(\beta)}{\int_\beta^\alpha f dx^*}D_+ + \frac{\frac{n_\alpha^*}{f(\alpha)}}{\int_\beta^\alpha \frac{1}{f}dx^*}D_-\right] \tag{1.16}$$

在正向电压增大时，这一项逐渐减小，所以电流密度增加得没有指数公式快．因此实验和理论不符合的原因并不象有些书上所说的是由于复合电流的缘故．因为真正代表复合电流的是包含 θ 的最后一项．

在反向电压增加的时候，这一项逐渐增大，因此没有明显的极限电流．

二、四针法测量方块电阻时的 c 系数问题

关于测量方块电阻时所用的 c 系数，一般都沿用已经算好的表．这个表最初是斯密兹[5]计算的，一直到现在还广为应用[6][7]．斯密兹 1958 年那篇文章是一篇流传极为广泛的文章．我们前些时候查看了文章原作者的计算，发现文章上的计算在数学上是错误的．文章原作者的错误在于对平面问题中有两个以上边界的源点汇点问题应用了点象法，以致得出了不收敛的结果．在流体动力学中，类似的问题称为二维势流问题，在渗流理论中碰到得尤其多．在流体动力学中，这类问题通常的解是把流动区域和复位势函数用保角映射法映射到半平面上或单位圆内来求解．我们现在来指出文章原作者的错误．

首先沿用文章作者原来的符号．考虑陪片的长度为a，宽为d，薄层的厚度为W，电导率为σ．考虑电势φ的二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

在通电时针尖上积聚电荷 q，正极为 $+q$，负极为 $-q$．正极和负极之间的距离为 $3s$（即相邻两针之间的距离为s）令 $a-3s\equiv 2l$．在电极附近应用高斯定理，得到

$$(2\pi rW)kE=4\pi q \tag{2.1}$$

式中 r 为圆半径，k为介电常数，E为电场强度．利用电荷守恒定律和欧姆定律，得到

$$(2\pi rW)\sigma E=I \tag{2.2}$$

(2.1)除以(2.2)得到

$$\frac{4\pi q}{I}=\frac{k}{\sigma} \tag{2.3}$$

因为四周有矩形边界，作者利用点象法来求解这个方程．边界条件为$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$．现在电荷和象点的位置在

源点 $+q$ $\quad x=md(m=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)\quad y=2na+\frac{a}{2}\pm l(n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)$

汇点 $-q$ $\quad x=md(m=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)\quad y=2na-\frac{a}{2}\pm l(n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)$

(2.4)

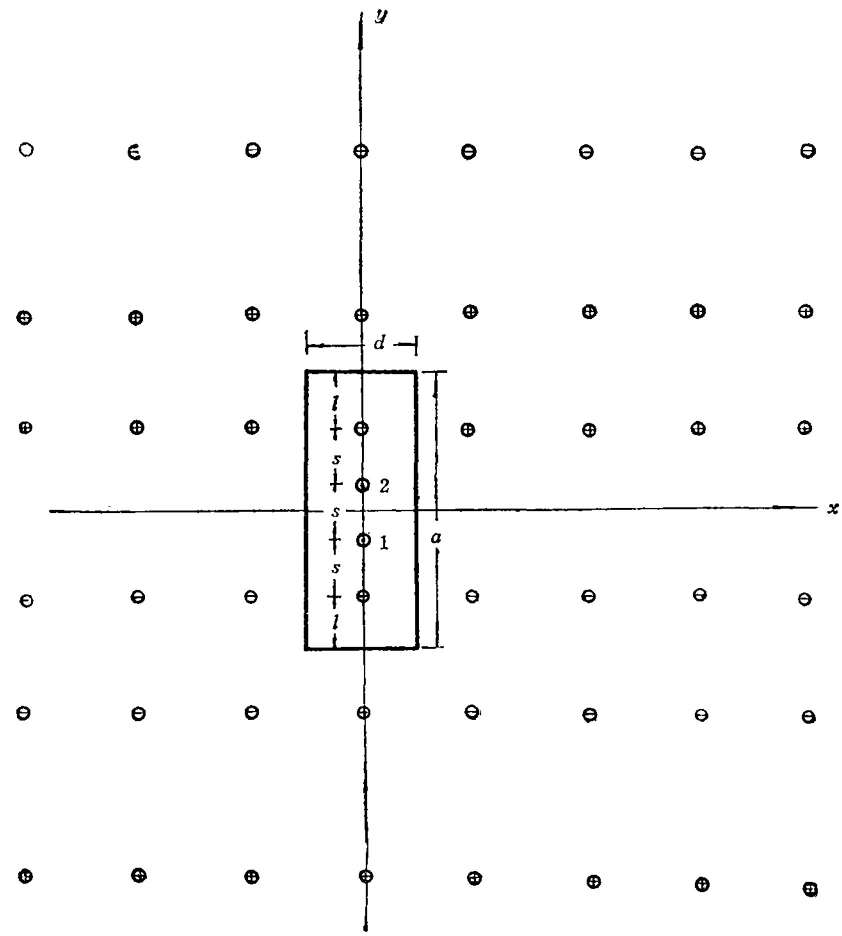

图 1

二维拉氏方程的基本解为

$$\varphi=-\frac{2q}{Wk}\ln r \tag{2.5}$$

所以测量电压差的两点上的电势各自为

$$\varphi_{(2)}=\frac{2q}{Wk}\left[\ln\frac{2s}{s}+\cdots\right]$$

$$\varphi_{(1)}=-\frac{2q}{Wk}\left[\ln\frac{2s}{s}+\cdots\right]$$

两点间的电位差为

$$V=\varphi_{(2)}-\varphi_{(1)}=\frac{4q}{Wk}\left[\ln\frac{2s}{s}+\cdots\right]=\frac{I}{\pi\sigma W}\left[\ln\frac{2s}{s}+\cdots\right] \tag{2.6}$$

利用文章作者原来的符号

$$\rho_s=\frac{1}{W\sigma} \tag{2.7}$$

因此按 c 系数的定义

$$V=\frac{I\rho_s}{\pi}\left[\ln\frac{2s}{s}+\cdots\right]\equiv\rho_s I\frac{1}{C} \tag{2.8}$$

可以得到

$$C=\frac{\pi}{\left[\ln\frac{2s}{s}+\cdots\right]} \tag{2.9}$$

而括号内的量可以按电荷和象点的贡献总加起来.

作者的错误就在于用点象法来求解这个问题上，括号中的量实际上是一个振荡型的发散级数，并没有极限. 文章的原作者引用了别人的一个现成公式

$$\varphi-\varphi_0=-\frac{I\rho_s}{2\pi}\ln 2\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}x+\sin h^2\frac{\pi y}{d}}$$

对 $x=0$ 时,

$$\varphi-\varphi_0=-\frac{I\rho_s}{2\pi}\ln(e^{\frac{\pi y}{d}}-e^{-\frac{\pi y}{d}})$$

式子是对一排相距为 d 的源给出的. 座标原点放在某一个源上，源沿着 x 轴等距离地排放原作者根据这一个公式得到第 n 条源线对 1 和 2 两点之间电位差的贡献为

$$\Delta\varphi_n=-\frac{I\rho_s}{2\pi}\ln\left(\frac{e^{\frac{\pi(y_n+s)}{d}}-e^{\frac{-\pi(y_n+s)}{d}}}{e^{\frac{\pi y_n}{d}}-e^{\frac{-\pi y_n}{d}}}\right)$$

显然$\Delta\varphi_n$在n和 y_n 趋于无穷大时，它是趋于常数$-\frac{I\rho_s}{2\pi}\frac{\pi s}{d}=-\frac{I\rho_s}{2d}$的，并不是趋于零的，因此级数也是不收敛的.

现在按文章原作者的办法，把 s 取做单位长度. 经过代换$\Big($即用 d代$\frac{d}{s}$，a代$\frac{a}{s}$，y 代$\frac{y}{s}\Big)$以后，可以得到

$$\frac{2\pi}{|I|\rho_s}\Delta\varphi_n=\pm\left[-\frac{\pi}{d}-\ln(1-e^{-2\pi(y_n+1)/d})+\ln(1-e^{-2\pi y_n/d})\right] \tag{2.10}$$

$+$ 号对正源（源点）适用，$-$号对负源（汇点）适用. 文章原作者说把 $\Delta\varphi_n\frac{2\pi}{|I|\rho_s}$对$n$加和，括号中的第一项加起来给出的结果为$\frac{\pi}{d}$. 这句话是完全错误的，因为它违背了收敛级数最起码的条件

$$\lim_{n\to\infty}u_n\to 0 \tag{2.11}$$

现在$-\frac{\pi}{d}$是一个有限量，根本不趋近于零，那么怎么能够加出一个极限值来. 实际上括号中的第一项加出的和数是在 0 与$\frac{2\pi}{d}$之间摆动着的. 它的和为

$$s_{4n}^{0}=0\,,\quad s_{4n+1}^{0}=\frac{\pi}{d},\quad s_{4n+2}^{0}=\frac{2\pi}{d},\quad s_{4n+3}^{0}=\frac{\pi}{d} \tag{2.12}$$

所以原级数是一个振荡型的发散级数，怎么能加出一个值$\frac{\pi}{d}$呢？按照文章原作者的办法，我们有什么理由不取$\frac{2\pi}{d}$或0呢？所以文章原作者的计算方法是完全错误的．这一点对学流体力学的人来说本来是人所共知的事情．我们认为要排除这种发散困难，只要采用流体动力学中常用的复变函数保角变换的办法，把陪片矩形和复位势映射到半平面上（或单位圆内）再求解，就能避免这类发散困难．

参　考　文　献

1. Shockley, W., B. S. T. J. 28 435 (1949)
2. 谢希德，方俊鑫 《固体物理》（下册）63—74（1962年3月）
3. 《半导体手册第3编》10—13（1971年1月）
4. 北大物理系《晶体管原理》33—36（1960年9月）
5. Smits, F. M., *Bell system Tech. J.* 37 711 (1958)
6. 《集成电路制造工艺》国防工业出版社 168（1971年）
7. 《半导体集成电路》（上册）上海人民出版社 171（1971年）

Two Problems of the Semi-conductor Physics Discussed with the Point of View of the Fluid Dynamics

Tsai Shu-tang

(Department of Modern Mechanics of University of Science and Technology of China)

Abstract

In this article, we discuss the two problems of the semi-conductor physics with the point of view of the fluid dynamics. We get the conclusion that the methods of the usual treatment of these problems are mistaken.