

# 均布荷载下悬臂矩形板的弯曲

张福范 (北京 清华大学)

(1980年4月15日收到)

## 摘 要

在薄板理论中, 悬臂矩形板的弯曲, 长期以来是个难题. 因而, 现有的解均属于近似解. 如列出几位曾解过这问题的作者, 可提到 L. V. Kantorovich, D. L. Holl, W. A. Nash, H. J. Plass, Jr. 等. 他们所用的方法为变分法或差分法. 本文将作出一个精确解. 它满足微分方程及复杂的边界条件, 包括自由角点条件.

在我们的方法中, 用了叠加法及广义简支边这概念. 它的特点是: 沿边各点的弯矩为零, 但挠度是存在的. 因而要满足自由边的条件, 只须消除剩余的剪力. 顾及自由角点的位移, 只须叠加符合要求的一些简单的弯曲面方程.

所得的结果与近似解很好地核对, 充分证实了现在这解是正确的.

## 一、引 言

悬臂矩形板的一边为固定, 三边为自由, 并有两个自由角点. 要寻求一个满足微分方程及所有的边界和角点条件的精确解, 长期以来在薄板的弯曲理论中, 被认为是个难题. 但因这问题在工程中的重要性, 前人曾作过不少的工作, 例如用差分法, 能量法得到一个近似解, 或用富氏积分求解固定边为无限长的悬臂板. 最早, L. V. Kantorovich 用他自己的方法, 解在均布荷载作用下的悬臂矩形板. C. W. MacGregor 解了固定边为无限长的悬臂板, 在无限长的自由边上作用一集中力. 并用实验核对, 证实计算是正确的. 后来, D. L. Holl 用差分法解悬臂板. 板的固定边与相邻的自由边之比为 4:1, 并在与固定边平行的自由边的中点作用一集中力. I. J. Jaramillo 对无限长的悬臂板作了进一步的计算. 集中力不仅作用在自由边, 并且作用在板宽度 (垂直于固定边) 的  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$  等点的情形. W. A. Nash 亦以差分法解在均布荷载作用下的悬臂板, 而固定边与其相邻的自由边之比为 2:1. H. J. Plass, Jr 等用薄板的广义变分原理, 解悬臂方形板的平衡与振动. 近年来, 由于计算机的运用, 就有以有限元来计算悬臂板这问题, 虽然所得解还犹待作进一步的改进.

从以上所列举的工作可知: 到目前为止, 悬臂板的解, 还没有直接从解微分方程, 并同时满足边界条件与自由角点条件而获得的. 本文企图由解微分方程并满足所有的边界条件, 包括自由角点条件, 去寻求一个精确解.

为此, 须引用广义简支边这概念. 运用这概念并用叠加法, 就可解悬臂矩形板的弯曲. 与解固定边矩形板相似, 最后将导致一系列无穷联立方程. 广义简支边或称为变相的简支边, 曾由胡海昌同志及波兰的 Koskofsky 等提出. 施振东同志曾结合广义变分原理, 解矩形板的弯曲.

## 二、广 义 简 支 边

对于通常的简支边, 例如  $x=a$ , 相应的边界条件为: 沿边各点弯矩  $M_x=0$ , 及沿边各点的挠度  $W=0$ . 广义简支边与通常简支边的差别在于: 仍以边  $x=a$  为例, 沿边各点的挠度不为零, 而各点的弯矩为零, 即  $M_x=0$ . 至于剪力, 广义简支边与通常的简支边相同, 沿边各点剪力是存在的. 因而, 如果沿通常的简支边各点有沉陷, 这边就成了广义的简支边.

在解悬臂矩形板时, 要满足自由边的边界条件, 当以广义简支边为出发点, 只须消除沿边各点的剪力, 就达到满足自由边的边界条件.

在解悬臂矩形板之前, 先解以下这几个问题, 作为准备.

(1) 设矩形板的三边为简支边, 而  $y=b$  这边为广义简支边 (图 1). 沿边各点的挠度由正弦级数表示:

$$(W)_{y=b} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

板的弯曲面为:

$$W = \frac{1-\mu}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\sinh \alpha_m} \left\{ \left( \frac{2}{1-\mu} + \alpha_m \coth \alpha_m \right) \cdot \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cdot \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.1)$$

式中的  $\alpha_m = \frac{m\pi b}{a}$ . 沿  $y=b$  这边的剪力为:

$$(V_y)_{y=b} = -D \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=b}$$

$$= \frac{D}{2} (1-\mu)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} a_m \left[ \frac{3+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.2)$$

沿  $x=a$  这边的剪力为:

$$\begin{aligned} (V_x)_{x=a} &= -D \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} \\ &= -D \frac{1}{2} (1-\mu)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} \cdot \frac{a_m}{\sinh \alpha_m} \\ &\quad \cdot \left[ (\alpha_m \coth \alpha_m - 2) \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \cos m\pi \end{aligned}$$

将括号内的函数展成正弦级数, 得到系数  $E_i$ :

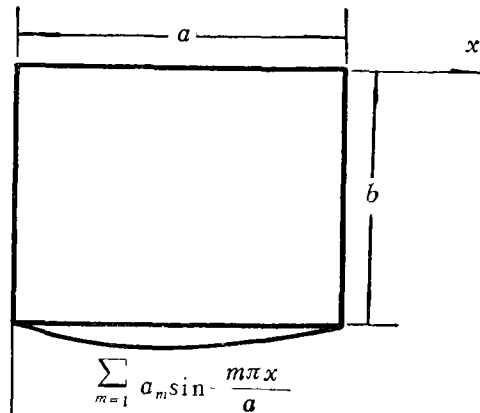


图 1

$$E_i = \frac{2}{b} \int_0^b \left[ (\alpha_m \coth \alpha_m - 2) \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{i\pi y}{b} dy$$

$$= \frac{4 \sinh \alpha_m}{b} \cdot \frac{\cos i\pi}{\pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{i^2}{b^2} \right)^2} \cdot \frac{i^3 \pi^3}{b^3}$$

代入上式, 得:

$$(V_x)_{x=a} = -D \frac{2(1-\mu)^2}{a^3} \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m} \cos m\pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3 \cos i\pi}{\left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.3)$$

同样得到沿  $x=0$  这边的剪力:

$$(V_x)_{x=0} = -D \frac{2(1-\mu)^2}{a^3} \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3 \cos i\pi}{\left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.4)$$

沿  $y=0$  这边板弯曲面的斜度为:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = \pi \frac{1-\mu}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m a_m}{\sinh \alpha_m} \left[ \frac{1+\mu}{1-\mu} + \alpha_m \coth \alpha_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.5)$$

作用在角点  $(a, b)$  及  $(0, b)$  的集中反力各为:

$$(R)_{x=a, y=b} = 2D(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b} = D(1-\mu)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^2 \cos m\pi$$

$$\cdot \left[ \frac{1+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right] \quad (2.6)$$

$$(R)_{x=0, y=b} = D(1-\mu)^2 \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^2 \left[ \frac{1+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right] \quad (2.7)$$

若广义简支边的挠度与边的中点对称, 则以上各式中的  $\sum_{m=1}^{\infty}$  应均改为  $\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}$ .

(2) 设矩形板的两边  $y=0, y=b$  为简支边, 而  $x=0, x=a$  这两边为广义简支边 (图 2). 沿边各点的挠度为:

$$(W)_{x=0} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin \frac{i\pi y}{b}$$

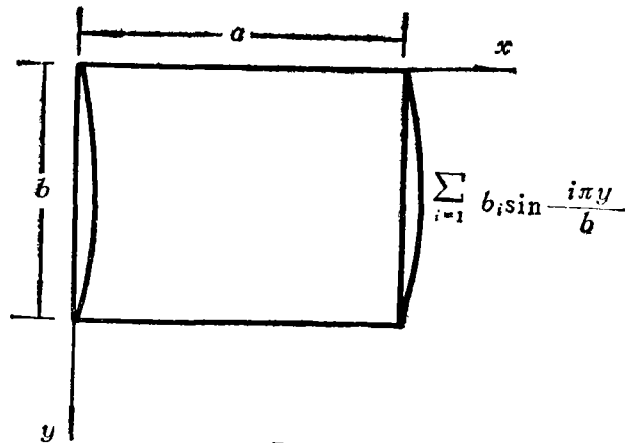


图 2

板的弯曲面为:

$$W = \frac{1-\mu}{2} \sum_{i=1} b_i \left\{ \frac{\cosh \beta_i - 1}{\sinh \beta_i} \left[ \left( \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} - \frac{2}{1-\mu} \right) \sinh \frac{i\pi x}{b} + \frac{i\pi x}{b} \cosh \frac{i\pi x}{b} \right] + \frac{2}{1-\mu} \cosh \frac{i\pi x}{b} - \frac{i\pi x}{b} \sinh \frac{i\pi x}{b} \right\} \sin \frac{i\pi x}{b} \quad (2.8)$$

式中的  $\beta_i = \frac{i\pi a}{b}$ .

沿  $x=a$  这边的剪力为:

$$(V_x)_{x=a} = \frac{D}{2} (1-\mu)^2 \sum_{i=1} b_i \frac{i^3 \pi^3}{b^3} \cdot \frac{\cosh \beta_i - 1}{\sinh \beta_i} \left[ \frac{3+\mu}{1-\mu} - \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right] \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.9)$$

将上式改为负, 即得沿  $x=0$  这边的剪力. 沿  $y=b$  这边的剪力为:

$$(V_y)_{y=b} = D \frac{(1-\mu)^2}{b^3} \pi^2 \sum_{i=1} b_i \frac{\cos i\pi}{i} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{m^3}{\left( \frac{m^2}{i^2} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.10)$$

沿  $y=0$  这边, 板弯曲面的斜度为:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{4}{b} \sum_{i=1} \frac{b_i}{i} \sum_{m=1,3,\dots} m \frac{(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} + \frac{m^2}{i^2}}{\left( \frac{m^2}{i^2} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.11)$$

作用于角点  $(a, b)$  的集中反力为:

$$(R)_{x=a, y=b} = D(1-\mu)^2 \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{i=1} b_i i^2 \left[ \frac{\cosh \beta_i - 1}{\sinh \beta_i} \left( \beta_i \coth \beta_i + \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - \beta_i \right] \cos i\pi \quad (2.12)$$

(3) 设有一四边简支的矩形板. 沿  $y=0$  这边作用分布弯矩 (图 3):

$$M(x) = \sum_{m=1} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

板的弯曲面为:

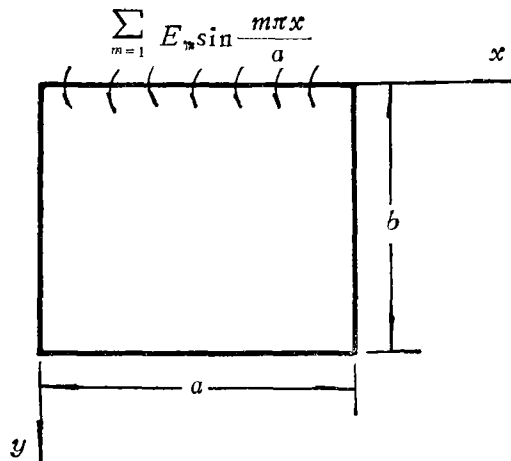


图 3

$$W = -\frac{a^2}{2D\pi^2} \sum_{m=1} \frac{E_m}{m^2} \left[ -\frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \coth \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (2.13)$$

式中的  $\alpha_m = \frac{m\pi b}{a}$ 。沿  $y=b$  这边的剪力为:

$$(V_y)_{y=b} = -(1+\mu) \frac{\pi}{2a} \sum_{m=1} \frac{mE_m}{\sinh \alpha_m} \left[ 1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} \alpha_m \coth \alpha_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.14)$$

沿  $x=a, x=0$  这两边的剪力各为:

$$(V_x)_{x=a} = \frac{2}{a} \sum_{i=1} \sum_{m=1} \frac{E_m i \left[ \frac{b^2}{a^2} + (2-\mu) \frac{i^2}{m^2} \right] \cos m\pi}{m \left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \sin \frac{i\pi x}{b} \quad (2.15)$$

$$(V_x)_{x=0} = \frac{2}{a} \sum_{i=1} \sum_{m=1} \frac{E_m i \left[ \frac{b^2}{a^2} + (2-\mu) \frac{i^2}{m^2} \right]}{m \left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.16)$$

板的弯曲面, 沿  $y=0$  这边各点的斜度为:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{a}{2D\pi} \sum_{m=1} \frac{E_m}{m} \left[ \operatorname{soth} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.17)$$

在板的两角点  $(a, b), (0, b)$ , 集中反力各等于:

$$(R)_{x=a, y=b} = -(1-\mu) \sum_{m=1} \frac{E_m}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m \coth \alpha_m - 1) \cos m\pi \quad (2.18)$$

$$(R)_{x=0, y=b} = -(1-\mu) \sum_{m=1} \frac{E_m}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m \coth \alpha_m - 1) \quad (2.19)$$

(4) 在均布荷载作用下的四为简支边的矩形板,  $q$  为荷载的集度.

沿  $x=a$  这边的剪力等于:

$$(V_x)_{x=a} = -\frac{2bq}{\pi^2} \sum_{i=1,3,\dots} \frac{1}{i^2} \left[ (3-\mu) \tanh \frac{\beta_i}{2} - (1-\mu) \frac{\frac{\beta_i}{2}}{\cosh^2 \frac{\beta_i}{2}} \right] \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.20)$$

沿  $y=0$  这边, 板弯曲面的斜度为:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2a^3 q}{D\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{m^4} \left[ \tanh \frac{\alpha_m}{2} - \frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2 \frac{\alpha_m}{2}} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.21)$$

沿  $y=b$  这边的剪力为:

$$(V_y)_{y=b} = -\frac{2aq}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{m^2} \left[ (3-\mu) \tanh \frac{\alpha_m}{2} - (1-\mu) \frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2 \frac{\alpha_m}{2}} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.22)$$

作用于角点  $(a, b)$  的集中反力为:

$$(R)_{x=a} = \frac{4(1-\mu)}{\pi^3} qa^2 \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{m^3} \left( \tanh \frac{a_m}{2} - \frac{\frac{a_m}{2}}{\cosh^2 \frac{a_m}{2}} \right) \quad (2.23)$$

有了以上这四个部分, 就可把它们叠加以满足各边的边界条件, 及自由角点的条件. 但仅有这四部分还不够, 不能实现两自由角点  $(0, b)$ ,  $(a, b)$  应有的位移. 因以上这四个部分仍保持这两角点被支承, 于是引入叠加的另一部分.

设板的弯曲面为:

$$W = ky \quad (2.24)$$

$k$  为一待定常数. 这其实是板绕  $x$  轴作一刚体转动. 这转动角度可用正弦级数表示为:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = k = \frac{4k}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.25)$$

### 三、在均布载荷作用下的悬臂矩形板

设悬臂矩形板如图 4. 边  $y=0$  为固定边, 其他三边为悬空. 所解的问题可归结为: 在板的边界内, 须满足方程

$$\nabla \nabla W = -\frac{q}{D} \quad (a)$$

并满足边界条件:

$$(W)_{y=0} = \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (b)$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \quad (c)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} = 0 \quad (c)$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (d)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (d)$$

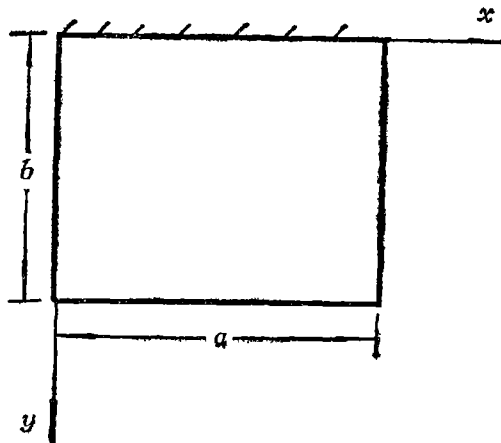


图 4

自由角点  $(0, b)$ ,  $(a, b)$ , 要求:

$$R = 2D(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (e)$$

以上这五个部分均满足板弯曲面的微分方程. 现只须将它们叠加, 以满足一边固定, 三边自由及两角点自由的条件. 这样所得的解应属于精确解.

由于在均布荷载作用下, 板的弯曲面与板的垂直于固定边的中线对称, 系数  $a_m$  与  $E_m$  的下标  $m$  应等于  $1, 3, 5, \dots$ . 于是所有算式中的  $\sum_{m=1}$  应改为  $\sum_{m=1,3,\dots}$ .

要满足固定边的条件 (b), 只须叠加由算式 (2.5), (2.11), (2.17), (2.21), (2.25),

分别所给的斜度，并使它们的和等于零。于是得到：

$$\begin{aligned}
 & (1-\mu) \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\alpha_m}{\sinh \alpha_m} \left[ \frac{1+\mu}{1-\mu} + \alpha_m \coth \alpha_m \right] + 2 \frac{a}{b} \sum_{i=1} b_i \frac{1}{i} \cdot \frac{\frac{m^2}{i^2} + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2}}{\left( \frac{m^2}{i^2} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \\
 & + \frac{a^2}{4\pi D} \cdot \frac{E_m}{m^2} \left[ \coth \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right] + \frac{qa^4}{\pi^4 D} \cdot \frac{1}{m^5} \left[ \tanh \frac{\alpha_m}{2} - \frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2 \frac{\alpha_m}{2}} \right] \\
 & + \frac{2}{m^2} \cdot \frac{ka}{\pi} = 0 \quad m=1, 3, 5 \dots \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

为了使沿  $y=b$  这边的剪力  $V_y$  为零，叠加算式(2.2)，(2.10)，(2.14)，(2.22)所给的剪力，并使它们的和等于零，得到：

$$\begin{aligned}
 & -\frac{qa^4}{D\pi^4} \cdot \frac{2}{m^5} \left[ (3-\mu) \tanh \frac{\alpha_m}{2} - (1-\mu) \frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2 \frac{\alpha_m}{2}} \right] \\
 & + 4(1-\mu)^2 \frac{a^3}{b^3} \sum_{i=1} \frac{b_i}{i} \frac{\cos i\pi}{\left( \frac{m^2}{i^2} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} + (1-\mu)^2 \pi \frac{a_m}{2} \left[ \frac{3+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right] - (1+\mu) \frac{a^2}{2\pi D} \cdot \frac{E_m}{m^2 \sinh \alpha_m} \left[ 1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} \alpha_m \coth \alpha_m \right] = 0 \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

要使沿  $x=a$  这边的剪力  $V_x$  为零，叠加算式(2.3)，(2.9)，(2.15)，(3.2)所给的剪力，并使它们的和等于零，得到第三个方程。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{qb^4}{D\pi^4} \cdot \frac{1}{i^5} \left[ (3-\mu) \tanh \frac{\beta_i}{2} - (1-\mu) \frac{\frac{\beta_i}{2}}{\cosh^2 \frac{\beta_i}{2}} \right] \\
 & + (1-\mu)^2 \frac{b^3}{a^3} \cos i\pi \cdot \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\alpha_m}{m \left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \\
 & - \frac{1}{i^2 \pi^2} \cdot \frac{b^3}{Da} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{E_m \left[ \frac{b^2}{a^2} + (2-\mu) \frac{i^2}{m^2} \right]}{m \left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \\
 & + \frac{\pi}{4} (1-\mu)^2 b_i \frac{\cosh \beta_i - 1}{\sinh \beta_i} \left[ \frac{3+\mu}{1-\mu} - \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right] = 0 \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

式中的  $i=1, 2, 3 \dots$ 。但在第一项中，当  $i$  为偶数时，该项等于零。由于对称，对于  $x=0$  这边，将得一相同的方程。由于在自由角点  $(a, b)$  没有集中反力作用，叠加算式(2.6)，(2.12)，(2.18)，(2.23)所给的该角点的集中反力，并使它们之和等于零，得到以下这方程。

$$\frac{a^2}{b^2} \sum_{i=1} b_i i^2 \cos i\pi \left[ \frac{\cosh \beta_i - 1}{\sinh \beta_i} \left( \beta_i \coth \beta_i + \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - \beta_i \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1-\mu)\pi^2} \cdot \frac{a^2}{D} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{E_m}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m \coth \alpha_m - 1) \\
& - \sum_{m=1,3,\dots} m^2 a_m \cdot \left[ \frac{1+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right] \\
& + \frac{4}{(1-\mu)\pi} \cdot \frac{qa^4}{D\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{m^3} \left( \tanh \frac{\alpha_m}{2} - \frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2 \frac{\alpha_m}{2}} \right) = 0 \quad (3.4)
\end{aligned}$$

从另一自由角点，将得到相同的方程。这样，我们就有三个系的无穷联立方程 (3.1)，(3.2)，(3.3)，以及一个单独的方程 (3.4)。于是就可以解未知系数  $a_m$ ， $b_i$ ， $E_m$ ， $\frac{ka}{\pi}$ 。作为数例，我们将解两个问题。一是在均布荷载作用下的正方形悬臂矩形板，另一问题是边长  $a:b$  等于 2。

#### (A) 均布荷载作用下的正方形悬臂板

由于系数  $E_m$  收敛较慢，在计算中取 24 项。而系数  $a_m$  与  $b_i$  是收敛很快的。取  $\mu=0.3$ ，由计算机，自方程 (3.1)，(3.2)，(3.3)，(3.4) 得到：

$a_m = 0.16661 \frac{qa^4}{D\pi^4}$	$0.23645 \times 10^{-2}$	$0.20979 \times 10^{-3}$	$0.45943 \times 10^{-4}$
$0.15843 \times 10^{-4}$	$0.71954 \times 10^{-5}$	$0.39248 \times 10^{-5}$	$0.24276 \times 10^{-5}$
$0.18381 \times 10^{-5}$	$0.11742 \times 10^{-5}$	$0.87801 \times 10^{-6}$	$0.67675 \times 10^{-6}$
$0.53338 \times 10^{-6}$	$0.42755 \times 10^{-6}$	$0.34735 \times 10^{-6}$	$0.28528 \times 10^{-6}$
$0.23649 \times 10^{-6}$	$0.19762 \times 10^{-6}$	$0.16631 \times 10^{-6}$	$0.14086 \times 10^{-6}$
$0.12001 \times 10^{-6}$	$0.10280 \times 10^{-6}$	$0.88496 \times 10^{-7}$	$0.73545 \times 10^{-7}$
$b_i = -2.1193 \frac{qa^4}{D\pi^4}$	$-0.43681$	$-0.11579$	$-0.049370$
$-0.023495$	$-0.013385$	$-0.79574 \times 10^{-2}$	$-0.52219 \times 10^{-2}$
$-0.33926 \times 10^{-2}$	$-0.24922 \times 10^{-2}$	$-0.17934 \times 10^{-2}$	$-0.12527 \times 10^{-2}$
$-0.10234 \times 10^{-2}$	$-0.80302 \times 10^{-3}$	$-0.62996 \times 10^{-3}$	$-0.50918 \times 10^{-3}$
$-0.41063 \times 10^{-3}$	$-0.33963 \times 10^{-3}$	$-0.27992 \times 10^{-3}$	$-0.23583 \times 10^{-3}$
$-0.19881 \times 10^{-3}$	$-0.16918 \times 10^{-3}$	$-0.14379 \times 10^{-3}$	$-0.12470 \times 10^{-3}$
$E_m = -65.860 \frac{qa^2}{\pi^4}$	$-20.212$	$-10.780$	$-6.8540$
$-4.7718$	$-3.5163$	$-2.6969$	$-2.1325$
$-1.7282$	$-1.4297$	$-1.2039$	$-1.0298$
$-0.89311$	$-0.78423$	$-0.69634$	$-0.62455$
$-0.56526$	$-0.51583$	$-0.47424$	$-0.43896$
$-0.40881$	$-0.38285$	$-0.36036$	$-0.34075$
$\frac{ka}{\pi} = 4.0101 \frac{qa^4}{D\pi^4}$			



从所得的结果可以看出,  $a_m$  与  $b_i$  收敛得非常快, 并且  $E_{47}$  约为  $E_1$  的 0.5%. 首先, 计沿自由边  $y=a$  各点的挠度.

$$k=4.0101 \frac{qa^3}{D\pi^3}=0.12933 \frac{qa^3}{D}$$

沿自由边  $y=a$  的挠度曲线为:

$$\begin{aligned} (W)_{y=a} &= ka + \sum_{m=1,3,\dots} a_m \sin \frac{m\pi x}{a} \\ &= 0.12933 \frac{qa^4}{D} + \frac{qa^4}{D\pi^4} \left\{ 0.16661 \sin \frac{\pi x}{a} + 0.0023645 \sin \frac{3\pi x}{a} \right. \\ &\quad \left. + 0.00020979 \sin \frac{5\pi x}{a} + 0.000045943 \sin \frac{7\pi x}{a} + 0.000015842 \sin \frac{9\pi x}{a} \right\} \end{aligned}$$

$10^{-5}$  以下的项均已忽略.

最大的挠度发生于边的中点, 并等于:

$$\begin{aligned} (W) &= 0.12933 \frac{qa^4}{D} + \frac{qa^4}{D\pi^4} [0.16661 - 0.0023645 + 0.00020979 \\ &\quad - 0.000045943 + 0.000015842] = (0.12933 + 0.0016879) \frac{qa^4}{D} = 0.13102 \frac{qa^4}{D} \end{aligned}$$

最早, 由 Kantorovich 所得的近似解为  $0.1192 \frac{qa^4}{D}$ . 两者之差约为 9%. 以下这表,

给出沿自由边  $y=a$  几个点的挠度. 并同时列出由有限元法所得的结果(注), 作为比较.

$x$	$0.5a$	$0.375a$	$0.25a$	$0.125a$	$0$
$(W)$	$0.13102 \frac{qa^4}{D}$	0.13091	0.13056	0.12998	0.12933
有限元解	0.12905	0.12892	0.12851	0.12788	0.12708
Kantorovich	0.1192				0.1211

这自由边  $y=a$  将稍微向上凹. 而按 Kantorovich 的解, 两角点的挠度比边中点的稍大, 因而自由边  $y=a$  将稍微向下凹进.

自由边  $x=a$  将弯曲成一曲线, 其挠度方程为:

$$\begin{aligned} (W)_{x=a} &= ky + \sum_{i=1} b_i \sin \frac{i\pi y}{a} = 0.12933 \frac{qa^3}{D} y - \frac{qa^4}{D\pi^4} \left\{ 2.1193 \sin \frac{\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. + 0.43681 \sin \frac{2\pi y}{a} + 0.11580 \sin \frac{3\pi y}{a} + 0.04937 \sin \frac{4\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. + 0.023495 \sin \frac{5\pi y}{a} + 0.013385 \sin \frac{6\pi y}{a} + 0.0079574 \sin \frac{7\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. + 0.0052219 \sin \frac{8\pi y}{a} + 0.0033926 \sin \frac{9\pi y}{a} + 0.0024922 \sin \frac{10\pi y}{a} \right\} \end{aligned}$$

(注) 这有限元解是由北京大学吴良芝同志所提供的. 这是他的有限元计算研究工作的一部分.

$$+ 0.0017935 \sin \frac{11\pi y}{a} + 0.0012528 \sin \frac{12\pi y}{a} + 0.0010234 \sin \frac{13\pi y}{a} \}$$

$10^{-3}$  以下的项已被忽略.

以下这表列出沿自由边  $x=a$  几个点的挠度, 并同时列出有限元法计算的结果.

$y$	0	0.25a	0.5a	0.75a	a
$ky$	0	$0.032333 \frac{qa^4}{D}$	0.064666	0.096999	0.12933
$\sum_{i=1} b_i \sin \frac{i\pi y}{b}$	0	-0.020384	-0.020339	-0.011952	0
(W)	0	$0.011949 \frac{qa^4}{D}$	0.044327	0.085046	0.12933
有限元解(W)	0	0.01182	0.043221	0.083888	0.12708

沿固定边弯矩的分布为:

$$M(x) = \sum_{m=1,3,\dots} E_m \sin \frac{m\pi x}{a} = -\frac{qa^2}{\pi^4} \left\{ 65.859 \sin \frac{\pi x}{a} + 20.212 \sin \frac{3\pi x}{a} \right. \\ + 10.780 \sin \frac{5\pi x}{a} + 6.8540 \sin \frac{7\pi x}{a} + 4.7718 \sin \frac{9\pi x}{a} + 3.5163 \sin \frac{11\pi x}{a} \\ + 2.6969 \sin \frac{13\pi x}{a} + 2.1325 \sin \frac{15\pi x}{a} + 1.7282 \sin \frac{17\pi x}{a} \\ + 1.4298 \sin \frac{19\pi x}{a} + 1.2039 \sin \frac{21\pi x}{a} + 1.0297 \sin \frac{23\pi x}{a} \\ + 0.98311 \sin \frac{25\pi x}{a} + 0.78422 \sin \frac{27\pi x}{a} + 0.69633 \sin \frac{29\pi x}{a} \\ + 0.62454 \sin \frac{31\pi x}{a} + 0.56526 \sin \frac{33\pi x}{a} + 0.51583 \sin \frac{35\pi x}{a} \\ + 0.47425 \sin \frac{37\pi x}{a} + 0.43869 \sin \frac{39\pi x}{a} + 0.40881 \sin \frac{41\pi x}{a} \\ \left. + 0.38248 \sin \frac{43\pi x}{a} + 0.36035 \sin \frac{45\pi x}{a} + 0.34075 \sin \frac{47\pi x}{a} \right\}$$

在以下表内, 列出了沿固定边几个点的弯矩值.

$X$	0.5a	0.375a	0.25a	0.125a	0.0625a	0.03125a	0
$M$	$-0.53560qa^2$	-0.53550	-0.53353	-0.51270	-0.47314	-0.39115	0
有限元解	-0.53092	-0.53058	-0.52760	-0.50399			0.34571

作为计算的校核, 计算固定边的总弯矩.

$$\int_0^a M(x) dx = \int_0^a \sum_{m=1,3,\dots} E_m \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \sum_{m=1,3,\dots} \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{E_m}{m} = -\frac{2qa^3}{\pi^5} \\ \left\{ 65.859 + \frac{1}{3} 20.212 + \frac{1}{5} 10.780 + \frac{1}{7} 6.8540 + \frac{1}{9} 4.7718 + \frac{1}{11} 3.5163 \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{13}2.6960 + \frac{1}{15}2.1325 + \frac{1}{17}1.7282 + \frac{1}{19}1.4298 + \frac{1}{21}1.2039 + \frac{1}{23}1.0297 \\
& + \frac{1}{25}0.89311 + \frac{1}{27}0.78422 + \frac{1}{29}0.69633 + \frac{1}{31}0.62454 + \frac{1}{33}0.56526 \\
& + \frac{1}{35}0.51583 + \frac{1}{37}0.47425 + \frac{1}{39}0.43896 + \frac{1}{41}0.40881 + \frac{1}{43}0.38284 \\
& + \frac{1}{45}0.36035 + \frac{1}{47}0.34075 \} = 0.50578qa^3
\end{aligned}$$

误差为  $\frac{0.50578 - 0.5}{0.5} = 1.16\%$

(B) 悬臂矩形板,  $a/b=2$

由于  $E_m$  收敛较慢, 各系数均取 24 项.  $\mu$  仍等于 0.3. 计算机所给的结果为:

$a_m = 0.019561 \frac{qa^4}{D\pi^4}$	0.0016322	$0.18039 \times 10^{-3}$	$0.35757 \times 10^{-4}$
$0.10885 \times 10^{-4}$	$0.41559 \times 10^{-5}$	$0.19308 \times 10^{-5}$	$0.10196 \times 10^{-5}$
$0.59338 \times 10^{-6}$	$0.37283 \times 10^{-6}$	$0.24922 \times 10^{-6}$	$0.17549 \times 10^{-6}$
$0.12860 \times 10^{-6}$	$0.97725 \times 10^{-7}$	$0.78471 \times 10^{-7}$	$0.61322 \times 10^{-7}$
$0.50186 \times 10^{-7}$	$0.41778 \times 10^{-7}$	$0.35277 \times 10^{-7}$	$0.30144 \times 10^{-7}$
$0.26018 \times 10^{-7}$	$0.22647 \times 10^{-7}$	$0.19856 \times 10^{-7}$	$0.17516 \times 10^{-7}$
$b_i = -0.12897 \frac{qa^4}{D\pi^4}$	-0.026367	$-0.69674 \times 10^{-2}$	$-0.29661 \times 10^{-2}$
$-0.14090 \times 10^{-2}$	$-0.80063 \times 10^{-2}$	$-0.47476 \times 10^{-3}$	$-0.31052 \times 10^{-3}$
$-0.20701 \times 10^{-3}$	$-0.14714 \times 10^{-3}$	$-0.10547 \times 10^{-3}$	$-0.79204 \times 10^{-4}$
$-0.59652 \times 10^{-4}$	$-0.46584 \times 10^{-4}$	$-0.36369 \times 10^{-4}$	$-0.29247 \times 10^{-4}$
$-0.23465 \times 10^{-4}$	$-0.19306 \times 10^{-4}$	$-0.15827 \times 10^{-4}$	$-0.13262 \times 10^{-4}$
$-0.11064 \times 10^{-4}$	$-0.94417 \times 10^{-5}$	$-0.79656 \times 10^{-5}$	$-0.68625 \times 10^{-5}$
$E_m = -15.980 \frac{qa^2}{\pi^4}$	-5.287	-3.0173	-2.0395
-1.4958	-1.1595	-0.92960	-0.78506
-0.64253	-0.54849	-0.47458	-0.41636
-0.36717	-0.32742	-0.29426	-0.26636
-0.24262	-0.22232	-0.20484	-0.18968
-0.17647	-0.16490	-0.15472	-0.14572
$k = 0.48604 \frac{qa^3}{D\pi^3}$			

从以上的系数可以看出,  $E_{i7}$  小于  $E_1$  的百分之一. 现计算自由边  $y=b$  的挠度.

$$k = 0.48604 \frac{qa^3}{D\pi^3} = 0.48604 \times 8 \frac{qb^3}{D\pi^3} = 0.12540 \frac{qb^3}{D}$$

自由边  $y=b$  的挠度曲线为:

$$(W)_{y=b} = kb + \sum_{m=1,3,\dots} a_m \sin \frac{m\pi x}{a} = 0.12540 \frac{qb^4}{D} + 16 \frac{qb^4}{D\pi^4} \left\{ 0.019561 \sin \frac{\pi x}{a} \right. \\ \left. + 0.0016322 \sin \frac{3\pi x}{a} + 0.00018039 \sin \frac{5\pi x}{a} + 0.000035757 \sin \frac{7\pi x}{a} \right. \\ \left. + 0.000010885 \sin \frac{9\pi x}{a} \right\}$$

$10^{-5}$  起的项均被忽略. 最大挠度在边的中点, 并等于:

$$(W) = 0.12540 \frac{qb^4}{D} + 16 \frac{qb^4}{D\pi^4} \{0.019561 - 0.0016322 + 0.00018039 \\ - 0.000035757 + 0.000010885\} = (0.12540 + 0.0029704) \frac{qb^4}{D} = 0.12837 \frac{qb^4}{D}$$

这数值只略大于  $0.125 \frac{qb^4}{D}$ , 当板的宽  $a$  很长板弯曲成为柱面. W. A. Nash 曾用差分法

解这问题, 得到的数值为  $0.1585 \frac{qb^4}{D}$ . 后来又用边界配值法得到  $0.141 \frac{qb^4}{D}$ , 这两结果都过

大. 以下这表列出沿自由边  $y=b$  几点的挠度值. 同时亦列出 Nash 的结果.

$x$	$0.5a$	$0.375a$	$0.25a$	$0.125a$	$0$
(W)	$0.12837 \frac{qb^4}{D}$	0.12825	0.12784	0.12691	0.12540
Nash	0.141		0.139		0.135

沿固定边弯矩的分布为:

$$M(x) = \sum_{m=1,3,\dots} E_m \sin \frac{m\pi x}{a} = -\frac{qa^2}{\pi^4} \left\{ 15.980 \sin \frac{\pi x}{a} + 5.2857 \sin \frac{3\pi x}{a} \right. \\ \left. + 3.0173 \sin \frac{5\pi x}{a} + 2.0395 \sin \frac{7\pi x}{a} + 1.4985 \sin \frac{9\pi x}{a} + 1.1595 \sin \frac{11\pi x}{a} \right. \\ \left. + 0.92960 \sin \frac{13\pi x}{a} + 0.78506 \sin \frac{15\pi x}{a} + 0.64253 \sin \frac{17\pi x}{a} \right. \\ \left. + 0.54849 \sin \frac{19\pi x}{a} + 0.47458 \sin \frac{21\pi x}{a} + 0.41636 \sin \frac{23\pi x}{a} \right. \\ \left. + 0.36717 \sin \frac{25\pi x}{a} + 0.32742 \sin \frac{27\pi x}{a} + 0.29426 \sin \frac{29\pi x}{a} \right. \\ \left. + 0.26634 \sin \frac{31\pi x}{a} + 0.24262 \sin \frac{33\pi x}{a} + 0.22232 \sin \frac{35\pi x}{a} \right. \\ \left. + 0.20484 \sin \frac{37\pi x}{a} + 0.18968 \sin \frac{39\pi x}{a} + 0.17647 \sin \frac{41\pi x}{a} \right\}$$

$$+ 0.16490 \sin \frac{43\pi x}{a} + 0.15472 \sin \frac{45\pi x}{a} + 0.14572 \sin \frac{47\pi x}{a} \Big\}$$

在以下这表内列出沿固定边几点的弯矩. Nash 的结果亦列在表内作为比较.

$x$	$0.5a$	$0.375a$	$0.25a$	$0.125a$	$0.0625a$	$0$
$M$	$0.51049qb^2$	$0.51451$	$0.51386$	$0.51074$	$0.51472$	$0$
Nash	$0.5082$		$0.5047$			$0.4824$

可以看出, 沿固定边弯矩的分布几乎是均匀的. 作为校核以上的计算, 计算固定边的总弯矩,

$$\begin{aligned} \int_0^a M(x) dx = & -\frac{2qa^3}{\pi^5} \left\{ 15.980 + \frac{1}{3} 2.5827 + \frac{1}{5} 3.0173 + \frac{1}{7} 2.0395 \right. \\ & + \frac{1}{9} 1.4986 + \frac{1}{11} 1.1595 + \frac{1}{13} 0.9296 + \frac{1}{15} 0.76506 + \frac{1}{17} 0.64253 \\ & + \frac{1}{19} 0.54849 + \frac{1}{21} 0.47458 + \frac{1}{23} 0.41536 + \frac{1}{25} 0.36717 + \frac{1}{27} 0.32742 \\ & + \frac{1}{29} 0.29426 + \frac{1}{31} 0.26634 + \frac{1}{33} 0.24262 + \frac{1}{35} 0.22232 + \frac{1}{37} 0.20484 \\ & \left. + \frac{1}{39} 0.18968 + \frac{1}{41} 0.17647 + \frac{1}{43} 0.16490 + \frac{1}{45} 0.15472 + \frac{1}{47} 0.14572 \right\} \\ = & -1.0049qb^3 \end{aligned}$$

误差可被忽略.

本文的数字计算方面, 谢志成和黄晓梅两同志给了极大的帮助, 例如用试算办法去决定: 解联列方程究竟应取多少项为适当. 如果没有他们的不厌其烦的帮助, 本文将无法完成. 北大的吴良芝同志, 提供了他在有限元方面的研究成果, 与本文的结果互相校核, 对这三位同志, 谨表最大的感谢.

### 参 考 文 献

- Holl, D. L., Cantilever Plate with Concentrated Edge Load, *Journal of Applied Mechanics*, 4, (1937).
- Nowaski, W., A Contribution to the Theory of Plates and Shells.  
中国科学院力学研究所
- Nach, W. A., Several Approximate Analysis of the Bending of a Rectangular Cantilever Plate by Uniform Normal Pressure. *Journal of Applied Mechanics*, 19, 1 (1952)
- Plass, H. J., Games Jr, J. H., Newson C. D., Application of Reissner's Variational Principle to Cantilever Plate Deflection and Vibration Problems. *Journal of Applied Mechanics*, 29, (1962).
- 舒德坚, 施振东 弹性薄板广义变分原理及其应用. 北京航学院学报, 1957, 第1期.
- 张福范, 悬臂矩形板的弯曲 (有一集中力作用于自由边的中点) 清华学报 19 卷 2 期 1979.
- 张福范. <弹性薄板> 科学出版社, 1965.
- 张福范, 悬臂矩形板的弯曲 II. (弯曲面为不对称的一般情形). 未发表.

## Bending of Uniformly Loaded Cantilever Rectangular Plates

Chang Fo-van

(*Tsing Hua University, Peking*)

### Abstract

In the theory of thin plates, the bending of cantilever rectangular plates has long remained one of the most difficult problems in this field of study. As a consequence, the solution now available are all limited to the approximate ones. To mention the authors who have solved this noted problem, there are: L. V. Kantorovich, D. L. Holl, W. A. Nash and H. J. Plass, Jr., et. al. The methods they used are either variational methods or the method of difference. In this paper it is attempted to get an exact solution, which satisfies both the differential equation and the complicated boundary conditions including the free corners.

In our solution, we use the method of superposition together with the idea of modified simply supported edge. It is characterized by the fact that while the bending moments along the edge vanish, the deflections are in existence. Thus, to satisfy the conditions of free edge, it merely requires the elimination of the remaining transverse forces. Moreover, in taking care of the free corners, we have to superpose some very simple equations for the deflection surface, which will serve our purpose.

Our results may check nicely with the approximate solutions which necessarily indicate the validity of the present solution.