

# 平面曲轴八缸 V 型内燃机二阶往复 惯性力二轴平衡条件的直接 推求及滑块平衡方案

刘先志 (山东工学院)

(本文1979年12月收到)

## 摘 要

文[1]曾用“四轴概念”进行分析,并得出了平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力的平衡方案;文[2]又迂回地从前案简化出“二轴平衡”规则。本文系用“二轴概念”直接推出了跟文[2]完全符合“异途同归”的结果,并提出了“滑块平衡”方案,作为一个侧重于数学的附带收获,我们可能发现了一个新型曲线,被命名为“奇形四叶玫瑰花曲线”。

## 一、平面曲轴八缸 V 型内燃机二阶往复惯性力向量

众所熟知,单缸内燃机的往复惯性力可表达成

$$f = f_1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j} = m_h r \omega^2 \left\{ a_1 \cos \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2 a_{2n} \cos 2n\alpha \right\}$$

$$\text{其中 } a_1 = 1, a_2 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16} + \frac{15}{512} \lambda^5 + \dots, a_4 = -\frac{1}{64} \lambda^3 - \frac{3}{256} \lambda^5 - \dots, a_6 = \frac{1}{512} \lambda^5 + \dots$$

$m_h$ 是单缸中往复运动的质量,  $r$ 是曲柄半径,  $\omega$ 是曲柄角速度,  $\lambda = r/l$ ,  $l$ 是连杆长度,  $\alpha = \omega t$ 是曲柄转角;从而看出,二阶往复惯性力是

$$f_2 = m_h r \omega^2 \left( \lambda + \frac{1}{4} \lambda^3 + \dots \right) \cos 2\alpha$$

由于  $\lambda$  是个相对的小量,所以通常引用

$$f_2 = m_h r \omega^2 \lambda \cos 2\alpha \quad (1.1)$$

力  $f_2$  作用在气缸中心线方向。

平面曲轴单排四缸内燃机的二阶往复惯性力是

$$g_2 = 4\lambda m_h r \omega^2 \cos 2\alpha \quad (1.2)$$

如图1所示,对于平面曲轴八缸V型内燃机,其左、右两排各四缸的二阶往复惯性力各为

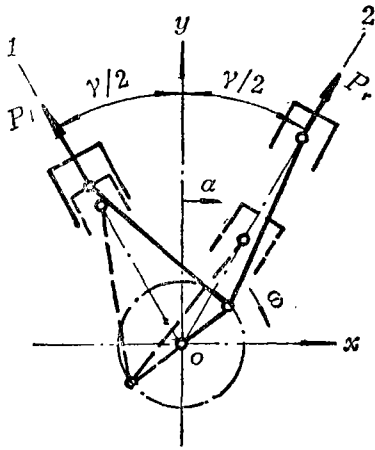


图1 平面曲轴八缸V型内燃机的主要安排

$$\left. \begin{aligned} P_l &= 4\lambda m_h r \omega^2 \cos 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \\ P_r &= 4\lambda m_h r \omega^2 \cos 2\left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

其中下指标  $l$  表示左, 下指标  $r$  表示右,  $\gamma$  是两排的夹角, 因此平面曲柄八缸V型内燃机总的二阶往复惯性力显然是(1.3)式中二力的矢量和

$$\begin{aligned} \bar{P}_{2V8} &= K \left\{ \left( i \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cos 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left( i \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cos 2\left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

其中  $K = 4\lambda m_h r \omega^2$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . 把  $\cos 2\left(\alpha \pm \frac{\gamma}{2}\right)$  展开后, 再利用变换式

$$2 \begin{Bmatrix} \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \end{Bmatrix} = \cos \frac{\gamma}{2} \mp \cos \frac{3\gamma}{2}$$

则得 
$$\bar{P}_{2V8} = K \left\{ e^{i(2\alpha + \frac{\gamma}{2})} \cos \frac{3\gamma}{2} + e^{-i(2\alpha - \frac{\gamma}{2})} \cos \frac{\gamma}{2} \right\} \quad (1.4)$$

或再用  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  把上式写成

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{2V8} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \\ \bar{F}_1 &= iK e^{-i2\omega t} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \bar{F}_2 &= iK e^{i2\omega t} \cos \frac{3\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

上式说明, 平面曲柄八缸V型内燃机的二阶往复惯性力  $\bar{P}_{2V8}$  可表示为两个旋转矢量  $\bar{F}_1$  和  $\bar{F}_2$  的几何和; 矢量  $\bar{F}_1$  的模是  $K \cos \frac{\gamma}{2}$ , 它用角速  $-2\omega$  (与曲轴的转向相同) 旋转; 矢量  $\bar{F}_2$  的模是  $\left| K \cos \frac{3\gamma}{2} \right|$ , 它用角速  $2\omega$  (与曲轴的转向相反) 旋转。当  $2\omega t = \alpha = 0$  时, 即当曲拐平面位于  $y$  轴位置时,  $|\bar{F}_1|$  和  $|\bar{F}_2|$  都落在  $y$  轴上。

## 二、平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力二轴平衡的要求

平面曲轴八缸V型内燃机的二阶往复惯性力既能表示为两个定值旋转矢量之和, 这就启示我们, 可设置两根带旋转重块的平衡轴, 让它们可用角速度  $\pm 2\omega$  作异向旋转, 并这样调定其定位, 从而使它们在旋转中所产生的离心力时刻与  $\bar{F}_{1,2}$  的朝向相反, 以达平衡。

在下边我们的中心任务是，在不准唤起附加力矩的要求下来确定两平衡轴应有的安装位置，以求这样来把二阶往复惯性力加以消除。

为此，我们首先发现，在区间  $0 \leq \gamma \leq \pi/3$  之内，当  $\alpha = 0$  时， $\vec{F}_1$  和  $\vec{F}_2$  有同一朝向，而在区间  $\pi/3 \leq \gamma \leq \pi$  之内，当  $\alpha = 0$  时，它们则有相反的朝向；因此，不产生附加力矩的要求，便使我们断定：在区间  $0 \leq \gamma \leq \pi/3$  之内， $\vec{F}_1$  和  $\vec{F}_2$  所在的两根平衡轴须同时安装在半平面  $y > 0$  之内，或安装在半平面  $y < 0$  之内，并且二轴又须分开落在上、下两半平面的不同象限之内；在区间  $\pi/3 \leq \gamma \leq \pi$  之内， $\vec{F}_1$  和  $\vec{F}_2$  所在的两根平衡轴则须同时安装在  $x > 0$  或  $x < 0$  两个半平面之内，并且同时须分开落在上、下两个不同象限之内；因为  $\vec{F}_1$  和  $\vec{F}_2$  是两个恒值反向旋转的矢量，在论述[2]里，我们是从另一个力学概念出发确实曾获得了这样的结果的。

按照图2所示意的安排， $|\vec{F}_1|$  和  $|\vec{F}_2|$  绕曲轴中心线的力矩是

$$M = (|\vec{F}_1| b_1 \sin \beta_1 + |\vec{F}_2| b_2 \sin \beta_2) \sin 2\alpha - (|\vec{F}_1| b_1 \cos \beta_1 - |\vec{F}_2| b_2 \cos \beta_2) \cos 2\alpha \quad (2.1)$$

条件  $M = 0$  先给出

$$|\vec{F}_1| b_1 \begin{Bmatrix} \sin \beta_1 \\ \cos \beta_1 \end{Bmatrix} \pm |\vec{F}_2| b_2 \begin{Bmatrix} \sin \beta_2 \\ \cos \beta_2 \end{Bmatrix} = 0$$

再给出

$$\sin \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \equiv \sin(\beta_1 + \beta_2) = 0$$

及其解

$$\beta_1 + \beta_2 = k\pi, (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.2)$$

我们的课题包括两部份，一部份的具体解则是

$$\beta_1 = -\beta_2, (k=0, \pi/3 \leq \gamma \leq \pi) \quad (2.3)$$

意即，安装两根平衡轴在  $x > 0$  或  $x < 0$  两半平面之内；按上列公式，两平衡轴自然不应落在同一象限之内。

我们的课题的另一解是

$$\beta_1 = -\beta_2 \pm \pi, (k=\pm 1, 0 \leq \gamma \leq \pi/3) \quad (2.4)$$

意即，安装两根平衡轴于  $y > 0$  或  $y < 0$  两个半平面之内；按上式的制约，该两平衡轴须分装在不同的象限之内才可。于是，关于  $\beta_i$  的有效区间，自然应为

$$\left. \begin{aligned} & \text{当 } \begin{cases} 0 \leq \beta_1 \leq 2\pi \\ 0 \geq \beta_1 \geq -2\pi \end{cases} \text{ 时, 则 } \begin{cases} 0 \geq \beta_2 \geq -2\pi \\ 0 \leq \beta_2 \leq 2\pi \end{cases}, (\beta_1 + \beta_2 = 0, \pi/3 \leq \gamma \leq \pi) \\ & \text{当 } \begin{cases} 0 \leq \beta_1 \leq 2\pi \\ 0 \geq \beta_1 \geq -2\pi \end{cases} \text{ 时, 则 } \begin{cases} \pi \geq \beta_2 \geq -\pi \\ \pi \leq \beta_2 \leq 3\pi \end{cases}, (\beta_1 + \beta_2 = \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi/3) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

在本节内，上面的结果跟论述[2]里的完全符合，那里是从理论力学的移置合并概念出发而获得了本节的结果，可以说是，异途同归了，也请参看论述[1]。

### 三、当 $\gamma = \pi/3$ 时，平衡系统的蜕化

在图2里，当  $|\vec{F}_1|$  垂直于  $b_1$  与  $|\vec{F}_2|$  垂直于  $b_2$  时，则得  $|\vec{F}_1| b_1 = |\vec{F}_2| b_2$ ；更因  $|\vec{F}_1| =$

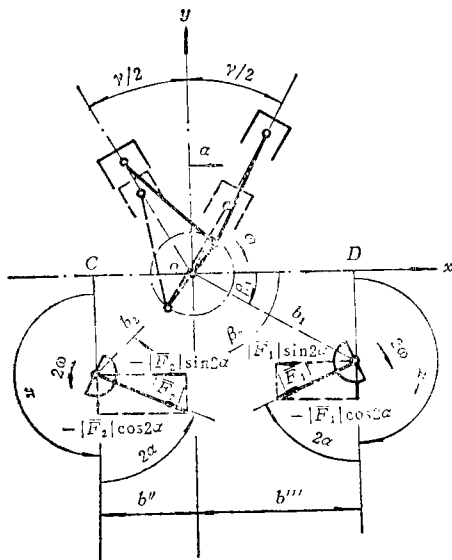


图2 为推导不唤起附加力矩的条件公式

$2F \cos \frac{\gamma}{2}$  和  $|\bar{F}_2| = 2F \cos \frac{3\gamma}{2}$  而得  $b_1 = b_2 \cos \frac{3\gamma}{2} / \cos \frac{\gamma}{2}$ . 于是导得下列三个极值

$$\left. \begin{aligned} b_1 \left|_{\gamma=\pi/3} = b_2 \frac{\cos \frac{3\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \right|_{\gamma=\pi/3} = 0 \\ |\bar{F}_2| \left|_{\gamma=\pi/3} = 0, \quad |\bar{F}_1| \left|_{\gamma=\pi/3} = 2\sqrt{3} \lambda m_h r \omega^2 \end{aligned} \right. \quad (3.1)$$

意即, 当夹角为  $60^\circ$  时, 则只须在坐标原点安装上一个旋转重块, 其离心力是  $2\sqrt{3} \lambda m_h r \omega^2$ , 就可把二阶往复惯性力平衡掉, 如图 3 所示, 其中又可将  $|\bar{F}_1|$  分为两等份, 在两虚线径距  $b_j$  和  $-b_j$  的两端点处各装一平衡轴, 就可完全达到这一特例机型的二阶往复惯性力的平衡, 也可参看论述[2]的图 5(b), 在此处所需要的关系是  $b_j = |-b_j|$ ,  $0 \leq \beta_j \leq 2\pi$ .

最后把  $|\bar{F}_1|$  分成两轴安装不是多余的, 因为一般而论, 把平衡重块安在曲轴的一端应当尽量避免, 不使它占刷这个应留作别用的重要位置。

由此得出, 二轴平衡概念的有效区间仍然是  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , 其中不存在任何奇异点区段。

此外, 若视图 3 中的  $\bar{F}_1$  是两个离心力  $4\lambda m_h r \omega^2$  的几何和, 并再把它们分别沿  $\beta_1 = -\gamma/2$  和  $\beta_2 = -(\pi - \gamma/2)$  这两条径线向外移置等距离, 这就又返回到“四轴概念”中的  $\gamma = \pi/3$  的二轴平衡, 为此可参看论述[2]的图 6 或论述[1]的图 5。

尚须提及, 两径距  $b_1$  和  $b_2$  的相对大小可自论述[2]的图 10 寻到, 可看那里的径距曲线, 此处不再赘载。

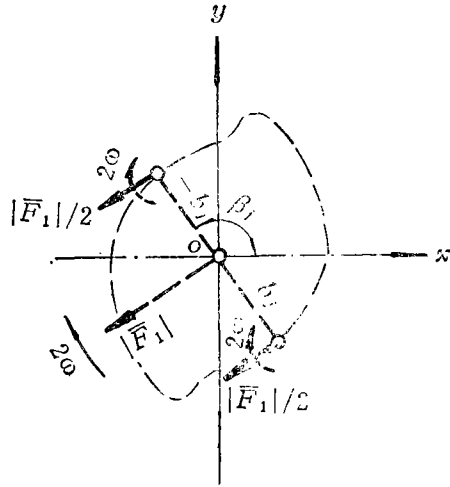


图 3 坐标原点上旋转力  $|\bar{F}_1|$ , 它可分成两半并挪移以成二轴平衡系统

#### 四、图 2 里点 C 和点 D 依夹角 $\gamma$ 的移动途径和移动速率

自参考文献[2]的图 2, 可通过引用  $b'' = OC = b \cos \beta_2 = b \cos \left( \pi - \frac{3\gamma}{2} \right) = -b \cos \frac{3\gamma}{2}$

和  $b''' = OD = b \cos \beta_1 = b \cos \frac{\gamma}{2}$ , 而得

$$\left. \begin{aligned} b''/b''' = -\cos \frac{3\gamma}{2} / \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \frac{db''}{d\gamma} = \frac{3}{2} b \sin \frac{3\gamma}{2} \\ \frac{db'''}{d\gamma} = -\frac{1}{2} b \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \frac{db''}{d\gamma} / \frac{db'''}{d\gamma} = -3 \sin \frac{3\gamma}{2} / \sin \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

表 1

图 4 里 各 条 曲 线 的 数 据

$\gamma [^\circ]$	0	30	60	90	120	150	180
$b''/b = -\cos \frac{3\gamma}{2}$	-1	-0.707	0	0.707	1	0.707	0
$b''/b = \cos \frac{\gamma}{2}$	1	0.966	0.866	0.707	0.5	0.258	0
$b''/b'' = -\cos \frac{3\gamma}{2} / \cos \frac{\gamma}{2}$	-1	-0.732	0	1	2	2.73	3
$\frac{1}{b} \frac{db''}{d\gamma} = \frac{3}{2} \sin \frac{3\gamma}{2}$	0	1.06	1.5	1.06	0	-1.06	-1.5
$\frac{1}{b} \frac{db''}{d\gamma} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$	0	-0.129	-0.25	-0.353	-0.433	-0.483	-0.5
$\frac{db''}{d\gamma} / \frac{db''}{d\gamma} = -3 \sin \frac{3\gamma}{2} / \sin \frac{\gamma}{2}$	-9	-8.21	-6	-3	0	2.19	3

从而得到表 1 和图 4 里的 6 条曲线；它们说明，以夹角  $\gamma$  为变数，点 C 和点 D 的移动路线，它们的移动速率以及两个速率的比例，其中重要的是：在路途中，点 C 和点 D 有两次会晤；第一次是当  $\gamma = \pi/2$ ，两点自逆向相逢；第二次是当  $\gamma = \pi$  时，点 C 追上点 D，从而在座标原点 O 相会。

点 C 的路程的长度是

$$s_C = \left| \int_0^{\pi/3} \frac{db''}{d\gamma} d\gamma \right| + \left| \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{db''}{d\gamma} d\gamma \right|$$

$$+ \left| \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{db''}{d\gamma} d\gamma \right| = |b-0| + |0-b| + |-b+0| = 3b$$

点 D 的路程的长度是

$$s_D = \left| -\int_0^{\pi} \frac{b}{2} \sin \frac{\gamma}{2} d\gamma \right| = \left| b \cos \frac{\gamma}{2} \Big|_0^{\pi} \right| = b$$

两点依夹角  $\gamma$  的速率最大比值是  $|-9|$ ，负号说明，其移动的方向相反。

关于点 C 和点 D 的移动情况，也请参看论述 [ 2 ] 的图 9 和图 10。

此外，我们还注意到，只要  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_i$ ，则与  $\beta_i$  的绝对值无关，两径距的比是夹角  $\gamma$  的一个不变函数，意即

$$b_2/b_1 = b''/b''' = -\cos \frac{3\gamma}{2} / \cos \frac{\gamma}{2}, (\beta_1 = \beta_2 = \beta_i, 0 \leq \beta_i \leq 2\pi) \quad (4.2)$$

### 五、二轴平衡方案的滑块平衡装置

当  $\alpha = 0$  时，对于八缸 V 型内燃机我们得到两个都落在  $y$  轴方向的惯性力

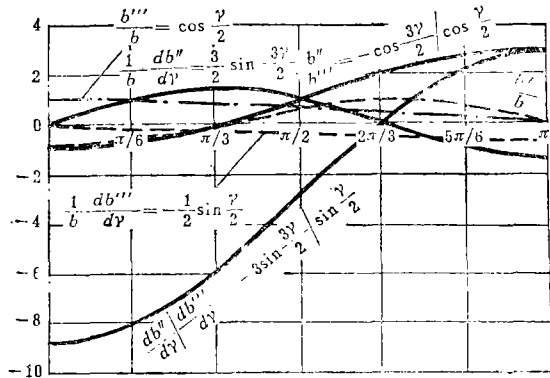


图 4 点 C 和点 D 的行途及它们依夹角  $\gamma$  的变化率

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1 &= iK \cos \frac{\gamma}{2} \\ \bar{F}_2 &= iK \cos \frac{3\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

其中  $K = 4\lambda m_b r \omega^2$  (5.2)

对于安装二轴平衡系统来说, 我们可在初位  $\alpha = 0$  时, 装上两根轴, 并使

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_j, \quad (0 \leq \beta_j \leq \pi, b_j \neq 0) \quad (5.3)$$

同时使重块的离心力各与  $\bar{F}_1$  和  $\bar{F}_2$  正形成反向的形势; 此刻, 平衡重块的离心力可引用新符号

表 2  $K = 4\lambda m_b r \omega^2 = 1$ ,  $Z_1$  和  $Z_2$  依夹角  $\gamma$  的数值

$\gamma [^\circ]$	0	30	60	90	120	150	180	109.5
$Z_1 = K \cos \frac{\gamma}{2}$	1	0.966	0.866	0.707	0.5	0.259	0	0.577
$Z_2 = K \cos \frac{3\gamma}{2}$	1	0.707	0	-0.707	-1	-0.707	0	-0.962

表 3 夹角  $\gamma$  和曲柄转角  $\alpha$  为参数,  $x$  轴和  $y$  轴上的平衡重块离心力

$\alpha [^\circ]$	0	22.5	45	67.5	90	112.5	135	157.5	180
$2\alpha [^\circ]$	0	45	90	135	180	225	270	315	360
$\cos 2\alpha$	1	0.707	0	-0.707	-1	-0.707	0	0.707	1
$\sin 2\alpha$	0	0.707	1	0.707	0	-0.707	-1	-0.707	0
$\gamma = 0^\circ$	$Z_x$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_y$	2	1.412	0	-1.412	-2	-1.412	0	1.412
$\gamma = 30^\circ$	$Z_x$	0	-0.184	-0.260	-0.184	0	0.184	0.260	0.184
	$Z_y$	1.672	1.180	0	-1.180	-1.672	-1.180	0	1.180
$\gamma = 60^\circ$	$Z_x$	0	-0.611	-0.866	-0.611	0	0.611	0.866	0.611
	$Z_y$	0.866	0.611	0	-0.611	-0.866	-0.611	0	0.611
$\gamma = 90^\circ$	$Z_x$	0	-0.996	-1.412	-0.996	0	0.996	1.412	0.996
	$Z_y$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\gamma = 120^\circ$	$Z_x$	0	-1.095	-1.5	-1.095	0	1.095	1.5	1.095
	$Z_y$	-0.5	-0.353	0	0.353	0.5	0.353	0	-0.353
$\gamma = 150^\circ$	$Z_x$	0	-0.680	-0.964	-0.680	0	0.680	0.964	0.680
	$Z_y$	-0.448	-0.316	0	0.316	0.448	0.316	0	-0.316
$\gamma = 180^\circ$	$Z_x$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_y$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\gamma = 109.5^\circ$	$Z_x$	0	-1.097	-1.539	-1.097	0	1.097	1.539	1.097
	$Z_y$	-0.385	-0.263	0	0.263	0.385	0.263	0	-0.263

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= K \cos \frac{\gamma}{2} \\ Z_2 &= K \cos \frac{3\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

为了简化计算，并由于只需要分析平衡机构的本质，可在此设  $K = 1$ ，并考虑  $Z_1$  和  $Z_2$  的旋向是相反，从而算得表 2 和表 3。

在表 3 里，我们曾引用下列缩代关系

$$\left. \begin{aligned} Z_{1x} &= Z_1 \sin 2\alpha, & Z_{1y} &= Z_1 \cos 2\alpha \\ Z_{2x} &= Z_2 \sin 2\alpha, & Z_{2y} &= Z_2 \cos 2\alpha \\ Z_x &= Z_{1x} - Z_{2x}, & Z_y &= Z_{1y} + Z_{2y} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

利用表 3 里的数据，可绘成图 5 里按夹角  $\gamma$  的变化分为 7 种机型的两根平衡轴的重块离心力端图。据此自然可以设想，我们代替前节书里所建议的二轴平衡方案，满可以用两个滑块的配合来完成在区间  $0 \leq \gamma \leq \pi$  之内的任何夹角的平面曲轴八缸 V 型内燃机二阶往复惯性力的平衡，如图 6 所示。

图 5 里的曲线，既可表示二阶往复惯性力端图，也可表示其平衡重块离心力向量端图，因为它们的大小相等而朝相反，由于这些曲线既对称于  $x$  轴，也对称于  $y$  轴，因而在把曲线绘

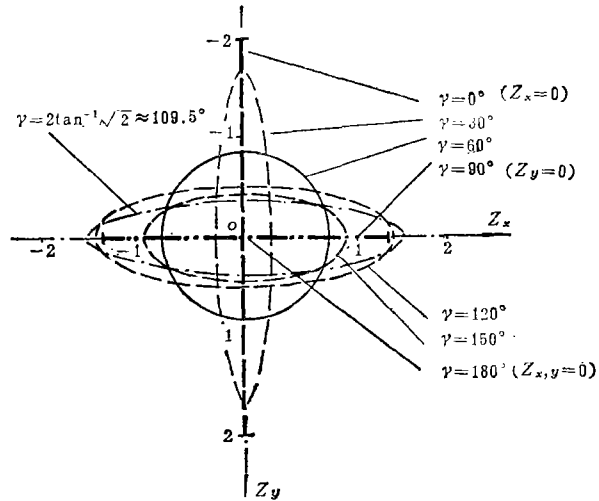


图 5 不同夹角，两平衡重块的离心力的端图

成后，座标轴的朝向就失去了严格的意义。

在图 5 里，我们曾故意使  $y$  轴异于以前的改为向下，从而使之符合表 3 里重块离心力之合的方向，虽然离心力合曲线对于两座标轴都形成对称。

自图 6 可以初步看出，滑块平衡法似应有下列优点：

- i) 推动轮的旋轴朝向在此形成无关紧要。
- ii) 滑块的中心的距离，也就是  $2\omega$  牙轮的安装地点也因此有了一定伸缩性。
- iii) 制造划一、安装地点一定，只需要更动两平衡滑

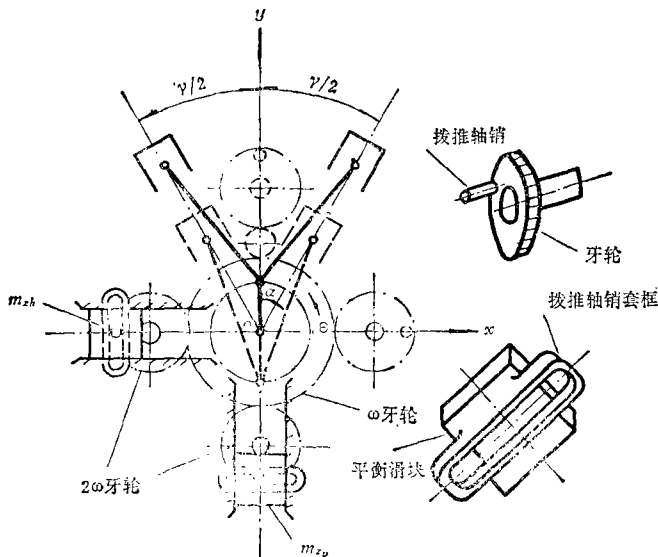


图 6 滑块平衡装置的示意安排

块 $m_{zh}$ 和 $m_{zv}$ 的长、宽、厚的尺寸。

再如图 6 所示,视情况的需要,也可把滑块安装在机器的另一侧,例如当 $\gamma$ 角较大时,夹角里的空位就更适用了。

此外,按目前的工艺水准,还可在滑块上安装上耐磨的小滚轮,并另外安装上用特殊材料制成的与小滚轮打配的轨条,以保证它们有足够的“寿命”。

滑块 $m_{zh}$ 和 $m_{zv}$ 是按表 3 里的 $|Z_y|_{\max}$ 和 $|Z_x|_{\max}$ 来配制;在安装时,须作应有的定位,自不待言,这是有关 $2\omega$ 牙轮上拨推轴销的定位问题。

滑块的选用配合,基本上是下列几种:

- 1) 当 $\gamma = 0$ 时,则 $m_{zh} = 0$ ,只需用 $m_{zv}$
- 2) 当 $0 < \gamma < \pi/3$ 时,则 $m_{zh} < m_{zv}$
- 3) 当 $\gamma = \pi/3$ 时,则 $m_{zh} = m_{zv}$
- 4) 当 $\pi/3 < \gamma < \pi$ 时,则 $m_{zh} > m_{zv}$
- 5) 当 $\gamma = \pi$ 时,则 $m_{zh} = m_{zv} = 0$

总说起来,我们初步认为,滑块平衡法比较简单节省,但这个认为还得最后聆听各制造厂的意见。

设拨推轴销中线至 $2\omega$ 牙轮中心线的距离是 $r_{zj}(j=h, v)$ ,则规定滑块质量及 $r_{zj}$ 的关系式是

$$\left. \begin{aligned} m_{zh}r_{zh}\omega^2 &= 4\lambda m_h r \omega^2 |Z_x|_{\max} \\ m_{zv}r_{zv}\omega^2 &= 4\lambda m_h r \omega^2 |Z_y|_{\max} \\ m_{zh}r_{zh} &= 4\lambda m_h r |Z_x|_{\max} \\ m_{zv}r_{zv} &= 4\lambda m_h r |Z_y|_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

其中自然有时需要  $r_{zh} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} r_{zv}$

## 六、平衡重块离心力分量 $Z_x$ 和 $Z_y$ 的极端值

在前面的分析中,夹角 $\gamma$ 不是连续使用的,如表 3 和图 6 所载的数据和离心力端图所示;但对于明了机动的全局,离心力分量的极端值发生在什么夹角上是不可缺少的,在这项分析中,我们有两个函数 $Z_x$ 和 $Z_y$ ,其中的变量是 $\gamma$ 和 $\alpha$ ,据此,寻求极端值须分两部分来进行:

### 1. 离心力分量 $Z_x$ 的极端值

由离心力分量 $Z_x = \left( \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{3\gamma}{2} \right) \sin 2\alpha$  先导得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z_x}{\partial \gamma} &= - \left( 2\cos \gamma \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right) \sin 2\alpha \\ \frac{\partial Z_x}{\partial \alpha} &= -4\sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

使(6.1)式的第一式等于零,则依次得

i)  $\sin 2\alpha = 0$ , 亦即 $2\alpha = k\pi$ , ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); 因此 $\alpha = k\pi/2$ , 从而

$$\alpha = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (6.2)$$



ii) 方程  $2\cos\gamma \sin\frac{\gamma}{2} + \sin\gamma \cos\frac{\gamma}{2} = 0$  可改写成

$$2\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} = 0$$

从而得  $\sin\frac{\gamma}{2} = 0$ , 亦即  $\gamma/2 = k\pi$ , ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 从而

$$\gamma = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad (6.3)$$

还可从另一个因子导得  $\gamma/2 = \tan^{-1}(\pm\sqrt{2})$ ; 在上式中若引用正号, 则  $\gamma/2 = 54.736^\circ = 54^\circ 44' 8''$

$$\text{亦即} \quad \gamma = 109.472^\circ = 109^\circ 28' 16'' \quad (6.4)$$

当引用负号, 则得  $\gamma/2 = \pi - 54.736^\circ = 125.264^\circ$  亦即

$$\gamma = 250^\circ 31' 44'' \quad (6.5)$$

再使(6.1)式的第二式等于零, 则得

(i)  $\cos 2\alpha = 0$ , 从而自  $2\alpha = k\frac{\pi}{2}$ , ( $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ) 获得

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{4}, \pm 3\frac{\pi}{4}, \pm 5\frac{\pi}{4}, \pm 7\frac{\pi}{4}, \dots \quad (6.6)$$

(ii)  $\sin\gamma = 0$ , 从而自  $\gamma = k\pi$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 获得

$$\gamma = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \quad (6.7)$$

(iii)  $\sin\frac{\gamma}{2} = 0$ , 从而自  $\gamma/2 = k\pi$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 获得

$$\gamma = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad (6.8)$$

为了检定极端值是否存在, 还需要下列式值

$$\frac{\partial^2 Z_x}{\partial \gamma^2} = -\left(2\cos\gamma \cos\frac{\gamma}{2} - \frac{5}{2}\sin\gamma \sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin 2\alpha \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial^2 Z_x}{\partial \alpha^2} = 8\sin\gamma \sin\frac{\gamma}{2}\sin 2\alpha \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial^2 Z_x}{\partial \gamma \partial \alpha} = -2\left(2\cos\gamma \sin\frac{\gamma}{2} + \sin\gamma \cos\frac{\gamma}{2}\right)\cos 2\alpha \quad (6.11)$$

若再引用符号  $\mathcal{D} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma \partial \alpha}\right)^2$  (6.12)

并把(6.9)式至(6.11)式代进, 再加简化整理, 则得

$$\mathcal{D}Z_x = -4\left(\sin\gamma \cos\frac{\gamma}{2} + 2\cos\gamma \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 4\left(\sin^2\gamma + 4\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\sin^2 2\alpha$$

若使用与  $\gamma/2 = \tan^{-1}(\pm\sqrt{2})$  相对应的  $\gamma/2 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ , 则得  $\mathcal{D}Z_x =$

$\frac{128}{9} > 0$ ; 此外  $\frac{\partial^2 Z_x}{\partial \gamma^2} = \frac{22}{3\sqrt{3}} > 0$ ,  $\frac{\partial^2 Z_x}{\partial \alpha^2} = \frac{16}{3\sqrt{3}} > 0$ ; 因此, 按二元极端值判据, 当

$\gamma/2 = \tan^{-1}\sqrt{2}$  时,  $Z_x$  有其极端值。

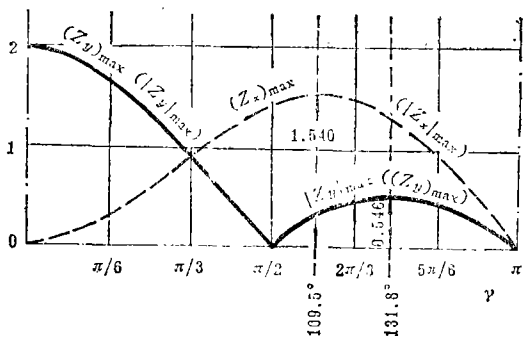
现在来核算其所属的极端值。利用  $\cos \frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $Z_x = \left( \cos \frac{3\gamma}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \right) \sin 2\alpha$ ,

$\cos \frac{3\gamma}{2} = 4\cos^3 \frac{\gamma}{2} - 3\cos \frac{\gamma}{2}$ , 则得  $Z_x = -\frac{8}{3\sqrt{3}} \approx -1.5396$ ; 或用  $\gamma/2 = 54^\circ 44'$  和  $3\gamma/2 = 164^\circ 12'$ , 从而得  $Z_x = \cos 164^\circ 12' - \cos 54^\circ 44' = -0.963 - 0.577 = -1.539$ , 这是最小值。

若用更细致的数值, 则得  $Z_x = \cos \frac{3\gamma}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} = -\cos 15^\circ 48' - \cos 54^\circ 44' = -0.962218 - 0.577383 = -1.539601$ ;  $Z_y = -0.962218 + 0.577383 = -0.384935$ 。

此外, 还可验证, 除  $\gamma = 109^\circ 28' - 109^\circ 30'$  之外, 其他的  $\gamma$  值均使  $\partial Z_x < 0$ , 意即, 均无极端值, 例如  $\partial Z_x|_{\gamma=\pm\pi} = -16(1 - \sin^2 2\alpha) \leq 0$ 。

依同理, 只是  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}, \pm 3\frac{\pi}{4}, \dots$  对于发生极端值而有效。因此利用  $\gamma = 109^\circ 28' - 109^\circ 30'$  又核算了  $Z_x$  和  $Z_y$  的数据列入了表 3 的最后。这样就能绘制图 7, 其中曾利用表 3



里的数值, 最高点确实与推导结果符合, 同时也把  $Z_y$  的最大值曲线用表 3 里的数据绘入, 虽然我们将下边才探索其极端值的所在地点。

## 2. 离心力分量 $Z_y$ 的极端值

离心力分量  $Z_y = \left( \cos \frac{3\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \right) \cos 2\alpha$

图 7 平衡重块离心力分量  $Z_x$  和  $Z_y$  的极端值 可改写成  $Z_y = 2\cos\gamma \cos \frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha$ , 从而导得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z_y}{\partial \gamma} &= -\left( 2\sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + \cos\gamma \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cos 2\alpha \\ \frac{\partial Z_y}{\partial \alpha} &= -4\cos\gamma \cos \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

使 (6.13) 式的第一式等于零, 则得

i)  $\cos 2\alpha = 0$ , 亦即  $2\alpha = k\frac{\pi}{2}$ , ( $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ), 从而

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4}, \pm 3\frac{\pi}{4}, \pm 5\frac{\pi}{4}, \dots \quad (6.14)$$

ii)  $2\sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + \cos\gamma \sin \frac{\gamma}{2} = 4\sin \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \left( \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) \sin \frac{\gamma}{2} = 0$ , 意即

$\sin \frac{\gamma}{2} = 0$ , 从而  $\gamma/2 = k\pi$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 于是

$$\gamma = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad (6.15)$$

当用  $4\cos^2\frac{\gamma}{2} + \cos^2\gamma - \sin^2\gamma = 0$  时, 则得  $\tan\frac{\gamma}{2} = \pm\sqrt{5}$ ; 用  $+\sqrt{5}$ , 则  $\gamma/2 = 65.905^\circ = 65^\circ 54' 19''$  从而  $\gamma = 131^\circ 48' 38''$  (6.16)

利用  $-\sqrt{5}$  时, 则  $\gamma/2 = \pi - 65^\circ 54' - \pi - 65^\circ 55' = 114^\circ 6' - 114^\circ 5'$ , 于是

$$\gamma = 228^\circ 12' - 228^\circ 10' \quad (6.17)$$

再使 (6.13) 式的第二式等于零, 则得

i)  $\sin 2\alpha = 0$ , 亦即  $2\alpha = k\pi$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 从而有

$$\alpha = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 2\pi, \dots \quad (6.18)$$

ii)  $\cos\gamma = 0$ , 亦即  $\gamma = k\frac{\pi}{2}$ , ( $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ), 从而得

$$\gamma = \pm\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5\frac{\pi}{2}, \dots \quad (6.19)$$

而当  $\cos\frac{\gamma}{2} = 0$  时, 亦即  $\gamma/2 = k\frac{\pi}{2}$ , ( $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ), 从而得

$$\gamma = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots \quad (6.20)$$

为要检定是否发生极端值, 尚需要

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 Z_y}{\partial \gamma^2} &= -\left\{ \frac{5}{2} \cos\gamma \cos\frac{\gamma}{2} - 2\sin\gamma \sin\frac{\gamma}{2} \right\} \cos 2\alpha \\ \frac{\partial^2 Z_y}{\partial \alpha^2} &= -8\cos\gamma \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ \frac{\partial^2 Z_y}{\partial \gamma \partial \alpha} &= 2 \left( 2\sin\gamma \cos\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma \sin\frac{\gamma}{2} \right) \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

把(6.21)式代进符号式(6.12), 则得

$$\mathcal{D}Z_y = -4 \left( 2\sin\gamma \cos\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma \sin\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 4 \left( 4\cos^2\frac{\gamma}{2} + \cos^2\gamma \right) \cos^2 2\alpha,$$

用以前的分析结果, 可以检证

$$\mathcal{D}Z_y = 4\cos^2 2\alpha > 0, \quad (\gamma = 0, \pm\pi, \dots)$$

$$\mathcal{D}Z_y = 4\cos^2 2\alpha > 0, \quad (\gamma = 0; \alpha = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \dots)$$

$$\mathcal{D}Z_y = 4 \left( 4\cos^2\frac{\gamma}{2} + \cos^2\gamma \right) \cos^2 2\alpha > 0,$$

$$\left( \gamma = 0, \frac{\pi}{2}, \pi; \alpha = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 2\pi, \dots \right)$$

$$\frac{\partial^2 Z_y}{\partial \gamma^2} \Big|_{\gamma=0} = -\frac{5}{2} \cos 2\alpha \Big|_{\alpha=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots} < 0$$

$$\frac{\partial^2 Z_y}{\partial \alpha^2} = -8\cos\gamma \cos\frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha \Big|_{\gamma=0} = -8\cos 2\alpha \Big|_{\alpha=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots} = -8 < 0$$

现在检查当  $\gamma = 131^\circ 48' - 131^\circ 50'$  时的情况。利用  $\gamma/2 = \tan^{-1} \sqrt{\gamma} = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{6}} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{5}{6}}$ , 则  $\mathcal{D}Z_y = 4\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)\cos^2 2\alpha > 0$ , 意即, 此处有极端值, 因而算得

$$Z_y = 2\left(\cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)\cos \frac{\gamma}{2} = 2\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{7.34} = -0.544, \text{ 这个数值是个相}$$

对的极端值, 它并非  $Z_y$  的绝对最大值, 见图 7 中的曲线。

## 七、径距 $b'$ 、 $b''$ 及 $b'''$ 的图解

为此, 可自(4.1)式取来下列三式

$$\left. \begin{aligned} b' &= bb''/b' = -b\cos\frac{3\gamma}{2} / \cos\frac{\gamma}{2} \\ b'' &= -b\cos\frac{3\gamma}{2}, \quad b''' = b\cos\frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} (0 \leq \gamma \leq \pi) \quad (7.1)$$

因无损于图解的基本性质, 可取  $b=1$ , 于是可以简便地把这三式的曲线绘成图 8。

可以看出, (7.1)式的第三式代表一个圆, 其极点位于圆的周边上, 圆的直径落在正极

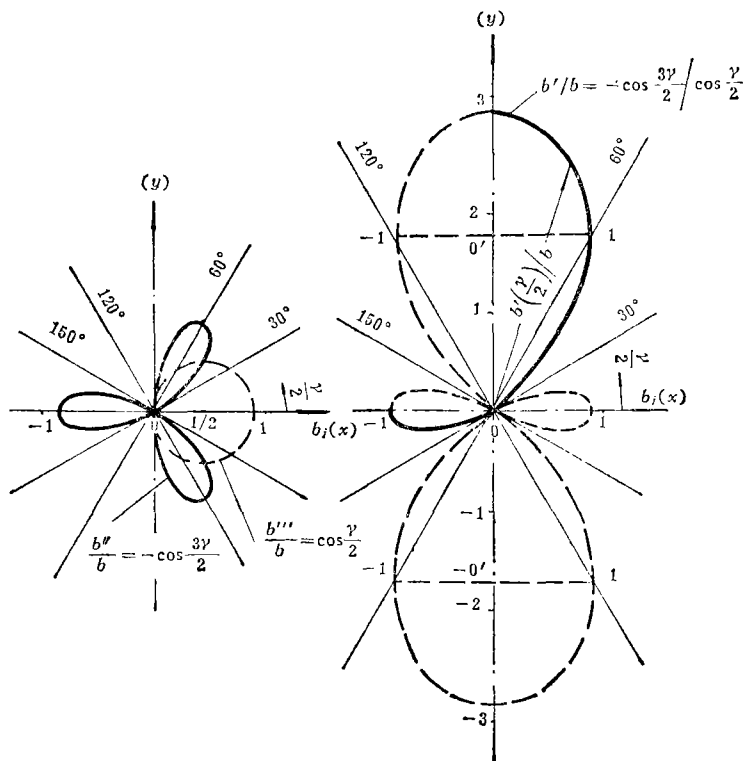


图 8 径距  $b'$ 、 $b''$ 、 $b'''$  的图解

轴上。(7.1)式的第二式可称为“对称于  $x$  轴的三叶玫瑰花曲线”, 用第三式去除第二式并乘以  $b$ , 则得(7.1)式的第一式, 其曲线可称为“俩俩相等四叶玫瑰花曲线 (或叫做异形四叶玫瑰

花曲线)。由于关系 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ , 可以看出, 该曲线既以 $x$ 轴为对称轴, 也以 $y$ 轴为对称轴。

在异形四叶玫瑰花曲线中, 我们曾用粗线突出了其中的一枝, 以表示二轴平衡当量系统所用到的一枝; 为此也请参阅论述[2]里的详尽插图, 那里是从另一概念出发得到了同一个结果。

对于进一步分析这三条曲线的独特性态以及它们之间的交点处的夹角, 可适用下列两式

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \theta + \tan^{-1} \left( b_j / \frac{db_j}{d(\frac{\gamma}{2})} \right) \\ \phi &= \tan^{-1} \left( b_1 / \frac{db_1}{d(\frac{\gamma}{2})} \right) - \tan^{-1} \left( b_2 / \frac{db_2}{d(\frac{\gamma}{2})} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

其中,  $\tau$ 是曲线动点的方向角,  $b_1$ 和 $b_2$ 是两相交曲线动点的动径,  $\phi$ 是两曲线相交之角,  $\theta$ 是动径与极轴之间的角。

还可利用代换

$$b_j = x^2 + y^2, \quad \gamma/2 = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}$$

把(7.1)式依次化成

$$(x^2 + y^2)^3 = b^2(3y^2 - x^2)^2 \quad (7.3)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = b(3xy^2 - x^3) \quad (7.4)$$

$$\left( x - \frac{b}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{4} \quad (7.5)$$

上列三式相当于图8中坐标轴上的数字均乘以 $b$ 的情况, 换言之, 在上列三式中使 $b=1$ , 则得图8中的三条曲线。此外, 在分析图8中的曲线性态时, 极坐标公式(7.1)是比较简便些。

异形四叶玫瑰花曲线可看作分为四枝; 在上文中我们曾说, 平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力二轴平衡分析中只涉及其中的一枝, 其实四枝全能用到, 这要看这种内燃机在空间如何安装及其曲轴依何朝向旋转; 例如, 图1所示平面曲轴八缸V型内燃机的 $y$ 轴可朝上朝下朝左朝右, 其曲轴一般而论又可左旋或右旋。

还可扩大上边的看法; 若由于某个原因, 平面曲轴八缸V型内燃机的 $y$ 轴须与铅垂线相差一角, 瞬时或定常的, 那么其相应的异形四叶玫瑰花曲线也须作相应的转移, 意即, 图1和图8中的两条 $y$ 座标轴在空间里须永恒地互相密合。

### 参 考 文 献

1. 刘先志, 平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力分析平衡法, 力学, 3(1976)。
2. 刘先志, 平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力二轴平衡法分析, 力学学报, 2(1978)

**A Two-shaft Balance System Analysis and a Slipper  
Balance Scheme for the Second Order Reciprocating  
Inertia Forces of Plane Crankshaft Eight-cylinder  
V-type Internal Combustion Engines**

Liu Hsien-chih (*The Shantung Institute of Technology*)

**Abstract**

By using "four shaft concept" a balance system for the second order reciprocating inertia forces of the plane crankshaft eight-cylinder V-type internal combustion engines was worked out as reported in the paper[ 1 ]. In paper[ 2 ] we have been able to acquire a "two shaft balance scheme" as a degeneracy of the "four shaft balance system" by pursuing a far roundabout way. By the way as a mathematical by-product it has been met possibly a new curve which could be named, perhaps, as "The Degenerated Four-Leaved Rose". which was intended to be discussed in detail with a special paper.