

# 浅正弦波纹圆板在均布载荷下 的大挠度弹性特征\*

陈山林 (北京清华大学)

(1979年12月收到)

## 摘 要

本文用修正迭代法求解了波纹圆板壳体大挠度方程, 得到了具中心平台的浅正弦波纹圆板在均布载荷下的弹性特征; 给出了初始近似修正系数  $\beta$  的计算公式, 并得到了能够简化特征迭代计算的一个积分。本文的解答较现有的波纹板壳体方程分析解更为符合实验结果, 精确度和适用范围有较大改进。

## 一、引 言

波纹圆板在灵敏弹性元件中起着重要的作用, 它的理论研究是人们注意的问题之一。文[1]从壳体大挠度方程出发, 用Галеркин方法研究了浅正弦波纹圆板的大挠度问题, 但解答仅适用于挠度不大的范围( $w/h < 2 \sim 2.5$ )。文[3]用同样的方法处理了较深波纹的情形, 文[2]、[4]、[5]、[8]将波纹圆板视做圆柱型正交异性板, 用不同的方法得到了大挠度时的弹性特征, 结果在更大的挠度范围与实验值符合。从这些研究结果看来, 用正交异性板处理波纹圆板的问题, 是一个有效的方法, 然而简化本身也带来一些不足: 第一, 它得到的特征缺少中心挠度的偶次项, 因而不能反映当载荷反向时波纹板不同的刚度特性, 而当波纹数较少及挠度较大时, 这种差别可以是显著的; 第二, 不能简便处理具中心平台的情形, 而在实际应用中, 这是更为大量碰到的; 第三, 它的解答也不能用于研究波纹板的应力分布和失稳现象。这就在一定程度上降低了正交异性板解的理论和实用意义。但是, 文[1]、[3]从壳体大挠度方程得到的解答, 却没有这些不足, 问题在于: 由于壳体大挠度方程本身的非线性和复杂性, 迄今的解答尽管相当繁杂, 精确性和适用范围却很差。所以, 进一步研究波纹板壳体大挠度方程的求解, 寻求更好的解答, 应当是有意义的。

本文利用文[7]最初采用的修正迭代法求解了浅正弦波纹圆板的壳体大挠度方程, 得到了具中心平台的波纹圆板在均布法向载荷作用下的弹性特征; 考虑了常用的两种边界条件: 固定夹紧和可移夹紧。本文改进了初始近似的选择, 并提出了初始近似修正系数  $\beta$  的计算公式, 因而保证了迭代解的良好收敛性。本文将波纹圆板的微分方程边值问题化为一组积分方程, 发现了确定弹性特征的一个简便积分, 有助于简化迭代计算。

\* 叶开沅推荐

## 二、基本方程和边界条件

设有同心波纹圆板，其外半径为 $a$ ，内半径为 $b$ ，波形为 $z=f\cos\left(\frac{\pi}{l}r+\varphi\right)$ ，波纹及中心平板厚均为 $h$ ，如图1所示。为求解方便，引入无量纲量

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \theta = \frac{dy}{d\rho}$$

$$y = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{w}{h}$$

$$s = -\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} a^2 \rho T_1$$

$$k = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{\pi a f}{lh}$$

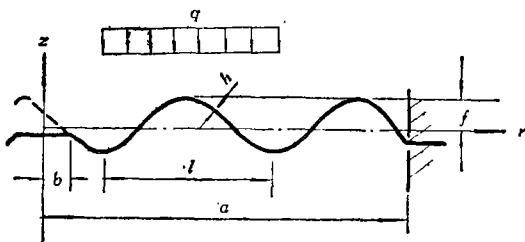


图 1

$$P = \frac{12(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Eh^4} a^4 q$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{l}, \quad \gamma = \frac{b}{a}$$

其中

$r$ ——向径， $T_1$ ——径向拉力，

$\nu$ ——泊松比， $E$ ——弹性模量，

$l$ ——半波长， $f$ ——波高，

$w$ ——法向挠度， $q$ ——均布法向载荷

则波纹部分的扁壳大挠度方程为<sup>[1]</sup>

$$\left. \begin{aligned} L(\rho\theta) &= P\rho^2 - s[k \sin(\alpha\rho + \varphi) + \theta] \\ L(\rho s) &= \theta \left[ k \sin(\alpha\rho + \varphi) + \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

中心平板部分的大挠度方程为

$$\left. \begin{aligned} L(\rho\theta) &= P\rho^2 - s\theta \\ L(\rho s) &= \frac{\theta^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中算子

$$L = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$$

引入 Heaviside 阶梯函数，它的定义为

$$\mathcal{U}(\rho - \gamma) = \begin{cases} 1 & (\rho \geq \gamma) \\ 0 & (\rho < \gamma) \end{cases} \quad (2.3)$$

方程(2.1)、(2.2)便可以组合为

$$\left. \begin{aligned} L(\rho\theta) &= P\rho^2 - s[\mathcal{U}(\rho - \gamma)k \sin(\alpha\rho + \varphi) + \theta] \\ L(\rho s) &= \theta \left[ \mathcal{U}(\rho - \gamma)k \sin(\alpha\rho + \varphi) + \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4a, b)$$

我们讨论两种常用的边界条件: 1) 固定夹紧情形

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \quad \theta=0, \quad s=0 \\ \text{当 } \rho=1 \text{ 时, } \quad \theta=0, \quad \frac{ds}{d\rho} - \nu \frac{s}{\rho} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

2) 可移夹紧情形

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \quad \theta=0, \quad s=0 \\ \text{当 } \rho=1 \text{ 时, } \quad \theta=0, \quad s=0 \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

显然, 令  $\nu \rightarrow \infty$ , 可由(2.5)得到(2.6), 即可移夹紧解可以从固定夹紧解中取  $\nu \rightarrow \infty$  得到。因此, 我们仅限于讨论边值问题(2.4)、(2.5)。

无量纲挠度  $y$  与  $\theta$  之间关系为

$$y = \int_1^{\rho} \theta d\rho$$

令  $\rho=0$ , 得中心挠度

$$y_0 = \int_1^0 \theta d\rho \quad (2.7)$$

### 三、问题的求解

1. 算子  $L = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$  的积分

记

$$f(\rho) = \theta \left[ \mathcal{U}(\rho - \nu) k \sin(a\rho + \varphi) + \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.1)$$

则(2.4b)可写做

$$L(\rho s) = f(\rho)$$

积分, 得

$$\begin{aligned} \rho s &= \int \rho d\rho \int \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho + A\rho^2 + B \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 \int \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{1}{2} \int \rho f(\rho) d\rho + A\rho^2 + B \end{aligned}$$

式中  $A$ 、 $B$  为积分常数。用(2.5)式中相应的条件确定积分常数, 并写做定积分形式, 得

$$\begin{aligned} s &= \frac{\rho}{2} \int_1^{\rho} \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{1}{2\rho} \int_0^{\rho} \rho f(\rho) d\rho \\ &\quad - \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \rho \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho \end{aligned} \quad (3.2)$$

令  $\nu \rightarrow \infty$ , (3.2)式成为

$$s = \frac{\rho}{2} \int_1^{\rho} \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{1}{2\rho} \int_0^{\rho} \rho f(\rho) d\rho + \frac{\rho}{2} \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho \quad (3.3)$$

显然, 对 $\theta$ 可以得到与(3.3)式形式相同的积分。如记

$$F(\rho) = -s[\mathcal{U}(\rho-\gamma)k \sin(\alpha\rho+\varphi)+\theta] \quad (3.4)$$

则对于 $\nu$ 有

$$\theta = \frac{P}{8}(\rho^3 - \rho) + \frac{\rho}{2} \int_1^{\rho} \frac{F(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{1}{2\rho} \int_0^{\rho} \rho F(\rho) d\rho + \frac{\rho}{2} \int_0^1 \rho F(\rho) d\rho \quad (3.5)$$

(3.2)和(3.5)式是与边值问题(2.4)、(2.5)等价的积分方程组。

将(3.5)式代入(2.7)式, 则中心挠度

$$y_0 = \frac{P}{32} + \int_1^{\nu} \frac{\rho}{2} d\rho \int_1^{\nu} \frac{F(\rho)}{\rho} d\rho - \int_1^{\nu} \frac{1}{2\rho} d\rho \int_0^{\rho} \rho F(\rho) d\rho \\ + \int_1^{\nu} \frac{\rho}{2} d\rho \int_0^1 \rho F(\rho) d\rho$$

用部分积分法容易证明

$$\int_1^{\nu} \rho d\rho \int_1^{\nu} \frac{F(\rho)}{\rho} d\rho + \int_1^{\nu} \rho d\rho \int_0^1 \rho F(\rho) d\rho = 0$$

于是有

$$y_0 = \frac{P}{32} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\rho \int_0^{\rho} \rho F(\rho) d\rho \quad (3.6)$$

或写做

$$P = 32y_0 - 16 \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{\rho} \rho F(\rho) d\rho \quad (3.7)$$

利用(3.6)或(3.7)式计算特征关系, 在最后的迭代过程中, 可以不必计算 $\theta$ , 因此大大简化了计算。

## 2 初始近似解

沿用文[6]的迭代程序, 略去(2.4a)中的 $s$ 项, 即取(3.4)式确定的函数 $F(\rho)=0$ , 由(3.5)式, 得第一次近似为

$$\theta_1 = \frac{P}{8}(\rho^3 - \rho) \quad (3.8)$$

将(3.8)式代入(2.7)式, 或直接由(3.7)式, 有相应的特征

$$P = 32y_0 \quad (3.9)$$

将(3.9)式代入(3.8)式, 得

$$\theta_1 = 4y_0(\rho^3 - \rho) \quad (3.10)$$

按[6]的迭代程序, 应当以此做为初始近似解, 但计算表明, 用(3.10)式, 即圆平板的小挠

度解做为初始近似求解边值问题(2.4)–(2.6), 得到的结果是不好的, 甚至完全是不收敛的\*。

实验事实指出, 当挠度增大时, 波纹圆板刚度也随之增加, 但其增加的程度较之相应的圆平板要小得多, 即非线性效应要弱; 换句话说, 大挠度时波纹板较相应的圆平板具有更大的柔韧性。为了保证特征也应有这种特性, 我们对(3.9)式做一些修正。

因为(3.9)式事实上是圆平板的小挠度特征, 它没有反映现有的波纹情形和中心平板部分的存在, 代替(2.7)式, 我们以下式来确定初始近似的特征:

$$y_0 = \int_0^{\gamma} \theta_1 d\rho + \int_0^{\gamma} \theta_1 \rho^{c-1} d\rho \quad (3.11)$$

式中  $c$  是与波纹有关的参数; 显然,  $c=1$  时, (3.11)式回到平板情形的(2.7)式。 $\gamma$  反映了中心平板部分的影响。将(3.10)式代入(3.11)式, 计算可以得到

$$P = 32\beta y_0 \quad (3.12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_0}{1 + \beta_0(2\gamma^2 - \gamma^4) - \frac{3+c}{2} \gamma^{1+c} + \frac{1+c}{2} \gamma^{3+c}} \\ \beta_0 &= \frac{(1+c)(3+c)}{8} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)'$$

将(3.12)式代入(3.8)式, 得到

$$\theta_1 = 4\beta y_0 (\rho^3 - \rho) \quad (3.13)$$

我们将用(3.13)式代替(3.10)式做为初始近似。我们称  $\beta$  为初始近似修正系数。

我们这样来选择  $c$ 、设  $D_r$ 、 $D_\phi$  分别表示波纹圆板在径向和环向的折合刚度, 取

$$c = \sqrt{D_r/D_\phi} \quad (3.14)$$

按文献[9],  $D_r$ 、 $D_\phi$  可近似表示为

$$D_r = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2}}$$

$$D_\phi = \frac{E f^2 h}{2} \left( 1 - \frac{0.81}{1 + \frac{2.5 f^2}{4l^2}} \right)$$

但在浅波纹情形,  $f$  与  $h$  差别不大, 在  $D_\phi$  中应当考虑到波纹截面对其中曲面的刚度, 这部分刚度是

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{s_0}{l} \approx \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( 1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \right)$$

式中,  $s_0$ —波纹半波弧长。于是我们取

$$D_r = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2}} \quad (3.15a)$$

\* 作者在兰州大学的毕业论文《浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度问题》(未发表)对此曾有讨论。参加该论文工作的尚有甄继庆、李建中、张廷贤。

$$D_v = \frac{E f^2 h}{2} \left( 1 - \frac{0.81}{1 + \frac{2.5 f^2}{4 l^2}} \right) + \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( 1 + \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2} \right) \quad (3.15b)$$

计算表明, 如上选取  $c$  后, 取(3.13)式做初始近似, 只须迭代到第二次近似, 结果便具有良好的精确度。对于平板,  $f=0$ ,  $c=1$ , 因而  $\beta=1$ ; 对于波纹板,  $c<1$ ,  $\nu<1$ , 因而  $\beta<1$ , 这表明特征(3.12)较(3.9)更为柔韧, 这正是我们希望的。

当波纹甚浅时,  $f^2/l^2 \ll 1$ , 此时(3.14)式可近似取做

$$c = \sqrt{\frac{1}{1 + 1.14(1-\nu^2) \frac{f^2}{h^2}}} \quad (3.16)$$

### 3. 弹性特征

以(3.13)式确定的  $\theta_1$  做第一次近似, 由(3.1)式, 有

$$f_1(\rho) = \theta_1 \left[ \mathcal{U}(\rho-\gamma) k \sin(\alpha\rho + \varphi) + \frac{\theta_1}{2} \right]$$

将上式代入(3.2)式, 积分后得

$$\begin{aligned} s_1 = & \mathcal{U}(\rho-\gamma) k \beta y_0 \left\{ -\frac{4}{\alpha^2} \rho^2 \sin(\alpha\rho + \varphi) - \frac{20}{\alpha^3} \rho \cos(\alpha\rho + \varphi) \right. \\ & + \left( \frac{48}{\alpha^4} + \frac{4}{\alpha^2} \right) \sin(\alpha\rho + \varphi) + \left( \frac{48}{\alpha^5} + \frac{4}{\alpha^3} \right) \frac{\cos(\alpha\rho + \varphi)}{\rho} \\ & + \left[ \left( \frac{2\gamma^2 - 2}{\alpha} - \frac{4}{\alpha^3} \right) \cdot \cos(\alpha\gamma + \varphi) - \frac{4\gamma}{\alpha^2} \sin(\alpha\gamma + \varphi) \right] \rho \\ & + \left( \frac{-2\gamma^4 + 2\gamma^2}{\alpha} + \frac{24\gamma^2 - 4}{\alpha^3} - \frac{48}{\alpha^5} \right) \cdot \frac{\cos(\alpha\gamma + \varphi)}{\rho} \\ & \left. + \left( \frac{8\gamma^3 - 4\gamma}{\alpha^2} - \frac{48\gamma}{\alpha^4} \right) \frac{\sin(\alpha\gamma + \varphi)}{\rho} \right\} \\ & + k \beta y_0 \left[ \left( -\frac{4 + 20\lambda}{\alpha^3} + \frac{48\lambda}{\alpha^5} \right) \cos(\alpha + \varphi) + \left( \frac{48\lambda}{\alpha^4} - \frac{4 + 4\lambda}{\alpha^2} \right) \sin(\alpha + \varphi) \right. \\ & + \left( \frac{-2\lambda\gamma^4 + (2\lambda - 2)\gamma^2 - 2}{\alpha} + \frac{24\lambda\gamma^2 + (4 - 4\lambda)}{\alpha^3} - \frac{48\lambda}{\alpha^5} \right) \cos(\alpha\gamma + \varphi) \\ & \left. + \left( \frac{8\lambda\gamma^3 + (4 - 4\lambda)\gamma}{\alpha^2} - \frac{48\lambda\gamma}{\alpha^4} \right) \sin(\alpha\gamma + \varphi) \right] \rho \\ & + \beta^2 y_0^2 \left( \frac{1}{6} \rho^7 - \frac{2}{3} \rho^5 + \rho^3 - \frac{4 + \lambda}{6} \rho \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

式中  $\lambda = \frac{1+\nu}{1-\nu}$ , 此时, 可移夹紧条件换为  $\lambda = -1$ 。可以验证,  $s_1$  在  $\rho = \gamma$  处是连续的。

我们只需做到第二次近似。此时直接采用(3.7)式是方便的, 这样可以避免  $\theta_1$  的繁复计算。

根据(3.7)式,

$$P = 32y_0 - 16 \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\rho \rho F_2(\rho) d\rho \quad (3.18)$$

式中  $F_2(\rho)$  按(3.4)式为

$$F_2(\rho) = -s_1 [\eta [(\rho - \gamma)k \sin(\alpha\rho + \varphi) + \theta_1]] \quad (3.19)$$

将(3.13)式和(3.17)式代入上式, 然后将上式代入(3.18)式, 积分后得

$$P = (32 + m_1 k^2 \beta) y_0 + m_2 k \beta^2 y_0^2 + m_3 \beta^3 y_0^3 \quad (3.20)$$

式中

$$\begin{aligned} m_1 = & \frac{6 - 6\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{96 - 96\gamma^2}{\alpha^4} + \left( \frac{16\gamma^2 - 8\gamma^4}{\alpha^2} + \frac{192\gamma^2}{\alpha^4} \right) \ln \gamma \\ & + \frac{178}{\alpha^6} \cos 2(\alpha + \varphi) + \frac{60}{\alpha^5} \sin 2(\alpha + \varphi) + \left( \frac{-8 + 8\gamma^2}{\alpha^4} - \frac{178}{\alpha^6} \right) \\ & \times \cos 2(\alpha\gamma + \varphi) - \frac{60\gamma}{\alpha^5} \sin 2(\alpha\gamma + \varphi) + \frac{104\gamma^2}{\alpha^4} \ln \gamma \cos 2(\alpha\gamma + \varphi) \\ & + \left( \frac{-16\gamma + 16\gamma^3}{\alpha^3} - \frac{592\gamma}{\alpha^5} \right) \ln \gamma \sin 2(\alpha\gamma + \varphi) + \left( \frac{24}{\alpha^4} + \frac{340}{\alpha^6} \right) I_2 \\ & + \left( -\frac{48m_0}{\alpha^4} + \frac{(128 + 640\lambda)I_1}{\alpha^6} - \frac{1536\lambda I_1}{\alpha^8} \right) \cos(\alpha + \varphi) \\ & + \left( -\frac{16m_0}{\alpha^3} + \frac{(128 + 128\lambda)I_1}{\alpha^5} - \frac{1536\lambda I_1}{\alpha^7} \right) \sin(\alpha + \varphi) \\ & + \left( \frac{(32\gamma^2 - 32\gamma^4)I_1}{\alpha^2} + \frac{48m_0 + [-64 + (384 - 64\lambda)\gamma^2 + 64\lambda\gamma^4]I_1}{\alpha^4} \right. \\ & \left. + \frac{(-768 + 128\gamma - 768\lambda\gamma^2)I_1}{\alpha^6} + \frac{1536\lambda I_1}{\alpha^8} \right) \cos(\alpha\gamma + \varphi) \\ & + \left( \frac{16\gamma m_0 + (64\gamma + 128\gamma^3)I_1}{\alpha^3} + \frac{[(-768 + 128\lambda)\gamma - 256\lambda\gamma^3]I_1}{\alpha^5} \right. \\ & \left. + \frac{1536\lambda\gamma I_1}{\alpha^7} \right) \sin(\alpha\gamma + \varphi) + \frac{32\gamma m_0}{\alpha^3} \ln \gamma \sin(\alpha\gamma + \varphi) \\ & - \frac{16\gamma^2 m_0}{\alpha^2} \ln \gamma \cos(\alpha\gamma + \varphi) \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} m_2 = & \left( \frac{56 + 472\lambda}{9\alpha^3} - \frac{16 + 320\lambda}{3\alpha^5} - \frac{164160}{\alpha^7} + \frac{1281920}{\alpha^9} \right) \cos(\alpha + \varphi) \\ & + \left( \frac{104 + 104\lambda}{9\alpha^2} + \frac{48 - 320\lambda}{3\alpha^4} - \frac{42560}{3\alpha^6} + \frac{744320}{\alpha^8} \right) \sin(\alpha + \varphi) \\ & + \left( \frac{-(216 + 40\lambda)\gamma^2 + (432 + 40\lambda)\gamma^4 - 256\gamma^6 + 40\gamma^8}{9\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{144 + 8\lambda - (2160 + 480\lambda)\gamma + 2400\gamma^4 - 440\gamma^6}{9\alpha^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-3744 + 320\lambda + 24000\gamma^2 - 20240\gamma^4}{3\alpha^5} + \frac{237760\gamma^2 - 73600}{\alpha^7} - \frac{1281920}{\alpha^9} \Big) \\
& \times \cos(\alpha\gamma + \varphi) + \left( \frac{336 + 56\lambda - (1296 + 160\lambda)\gamma^3 + 1056\gamma^5 - 200\gamma^7}{9\alpha^2} \right. \\
& + \frac{(-288 + 320\lambda)\gamma + 1600\gamma^3 - 1360\gamma^5}{3\alpha^4} + \frac{-105600\gamma + 148160\gamma^3}{3\alpha^6} \\
& \left. - \frac{744320\gamma}{\alpha^8} \right) \sin(\alpha\gamma + \varphi) + \left( \frac{(32 + 8\lambda)\gamma^2 - 144\gamma^4 + 160\gamma^6 - 40\gamma^8}{3\alpha} \right. \\
& + \frac{1728\gamma^2 - 4800\gamma^4 + 2240\gamma^6}{3\alpha^3} + \frac{19200\gamma^2 - 22400\gamma^4}{\alpha^5} + \frac{268800\gamma^2}{\alpha^7} \Big) \\
& \times \ln \gamma \cdot \cos(\alpha\gamma + \varphi) + \left( \frac{-(64 + 16\lambda)\gamma + 576\gamma^3 - 960\gamma^5 + 320\gamma^7}{3\alpha^2} \right. \\
& + \frac{-1152\gamma + 6400\gamma^3 - 4480\gamma^5}{\alpha^4} + \frac{-38400\gamma + 89600\gamma^3}{\alpha^6} - \frac{5376\gamma}{\alpha^8} \Big) \\
& \times \ln \gamma \sin(\alpha\gamma + \varphi) + \left( \frac{64 + 16\lambda}{3\alpha^3} + \frac{1152}{\alpha^5} + \frac{38400}{\alpha^7} + \frac{537600}{\alpha^9} \right) I_1 \quad (3.21b)
\end{aligned}$$

$$m_3 = \frac{123 + 50\lambda}{135} \quad (3.21c)$$

其中有关常数

$$I_1 = \int_{\gamma}^1 \frac{\cos(\alpha\gamma + \varphi) - \cos(\alpha\rho + \varphi)}{\rho} d\rho$$

$$I_2 = \int_{\gamma}^1 \frac{\cos 2(\alpha\gamma + \varphi) - \cos 2(\alpha\rho + \varphi)}{\rho} d\rho$$

$$\begin{aligned}
m_0 = & \left( -\frac{4 + 20\lambda}{\alpha^2} + \frac{48\lambda}{\alpha^4} \right) \cos(\alpha + \varphi) + \left( -\frac{4 + 4\lambda}{\alpha} + \frac{48\lambda}{\alpha^3} \right) \sin(\alpha + \varphi) \\
& + \left( 2\lambda\gamma^2 - 2\lambda\gamma^4 + \frac{-4\lambda + 24\lambda\gamma^2}{\alpha^2} - \frac{48\lambda}{\alpha^4} \right) \cos(\alpha\gamma + \varphi) \\
& + \left( \frac{-4\lambda\gamma + 8\lambda\gamma^3}{\alpha} - \frac{48\lambda\gamma}{\alpha^3} \right) \sin(\alpha\gamma + \varphi)
\end{aligned}$$

为了便于实际应用, 我们将(3.20)式转回到有量纲的形式

$$q = m_4 \omega_0 \left( \frac{8h^2}{3(1-\nu^2)} + m_1 \beta \alpha^2 f^2 + m_2 \beta^2 \alpha f \omega_0 + m_3 \beta^3 \omega_0^2 \right) \quad (3.22)$$

$$\text{式中, } m_4 = \frac{2Eh}{a^4}$$

(3.20)或(3.22)式便是我们要求的解答。(3.21)式中各有关三角函数值由波纹部分内、外边界连接状态决定。 $\omega_0$ 平方项的存在表明, 当载荷 $q$ 改变符号时, 特征也随之改变。特征



(3.20)或(3.22)可以进一步用于稳定性问题的研究。

平板情形, 此时 $\beta=1$ ,  $\gamma=1$ , 可以计算得

$$m_1 = m_2 = 0$$

于是得到

$$P = 32y_0 + \frac{123+50\lambda}{135}y_0^3 \quad (3.23)$$

或按(3.22)式

$$q = \frac{16Eh^3}{3(1-\nu^2)a^4}w_0 + \frac{(123+50\lambda)2Eh}{135a^4}w_0^3 \quad (3.24)$$

与取中心挠度做参数的摄动法结果完全一致。<sup>(6)</sup>

对无中心平台的整数波纹, 中心光滑情形, 此时 $\nu=0$ ,  $\varphi=0$ ,  $\alpha=2n\pi$ ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), 可以计算得

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{6}{\alpha^2} + \frac{88-64I_1+24I_2}{\alpha^4} + \frac{(-640+768\lambda)I_1+340I_2}{\alpha^6} \\ m_2 &= \frac{200+480\lambda+(192+48\lambda)I_1}{9\alpha^3} + \frac{-3760+3456I_1}{3\alpha^5} \\ &\quad + \frac{-237760+38400I_1}{\alpha^7} + \frac{537600I_1}{\alpha^9} \\ m_3 &= \frac{123+50\lambda}{135} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

式中,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1-\cos \alpha\rho}{\rho} d\rho$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1-\cos 2\alpha\rho}{\rho} d\rho$$

结果是十分简便的, 积分 $I_1$ 、 $I_2$ 可参阅有关积分表, 例如[10]。

#### 四、算 例

【例1】 绘制正弦波纹圆板的特征(图2)

已知: 半径  $a=76\text{mm}$ , 波幅  $f=0.7\text{mm}$ , 板厚

$$h=0.33\text{mm}, \quad \text{波数} \frac{a}{2l}=3, \quad E=1 \times 10^4 \text{kg/mm}^2,$$

$\nu=0.3$ ; 周边夹紧固定, 无中心平台。

按(3.12)'、(3.16)式计算得

$$\beta=0.607$$

将有关数据代入无中心平台情形的(3.25)式及(3.22)式,可计算得到

$$q = 0.0416\omega_0 - 0.00332\omega_0^2 + 0.00715\omega_0^3 \quad (4.1)$$

图2中,根据(4.1)式绘出了特征曲线,与文[1]实验值极为符合,较文[1]计算值有更好的精确度。由于载荷为负方向,故 $\omega_0^2$ 项前出现负号,这正反映了波纹板刚度特性与载荷作用方向有关。

[例2] 已知无中心平台的正弦波纹圆板,周边可移夹紧(图3)。

各有关数据为

半径  $a=76\text{mm}$ , 波幅  $f=0.6\text{mm}$ , 板厚  $h=0.33\text{mm}$ ,

波数  $\frac{a}{2l}=3$ ,  $E=1 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,

按(3.12)'、(3.16)式计算得

$$\beta=0.64$$

将有关数据代入(3.25)式及(3.22)式,并令 $\lambda=-1$ ,可得

$$q = 0.0307\omega_0 - 0.00044\omega_0^2 + 0.0028\omega_0^3 \quad (4.2)$$

比较(4.2)与(4.1)式,可以看到可移夹紧较之固定夹紧,载荷反向时引起的刚度差别要小得多。

图3中按(4.2)式绘出了特征曲线,在文[1]已有的实验值范围内( $w/h \approx 10$ ),本文结果与实验符合良好。当 $\omega_0=3\text{mm}$ 时,本文结果与实验值相差约为8%。

从图3中可以看到,本文结果较文[1]理论值有更高的精确度。需要指出的是,图中文[1]的结果是用Галеркин方法得到的二次近似解,其计算十分繁冗,而本文对应的解答(3.25)、(3.22)式是相当简便的。

与文[8]对同一例的正交异性板解比较,本文结果在实验值上方,文[8]结果在实验值下方;与实验值相较,本文的误差虽稍大些,但仍足以应用,并且特性的计算较文[8]仍然要简便。

[例3] 已知具中心平台的正弦波纹圆板周边夹紧固定(图4),各有关数据为

外半径  $a=25\text{mm}$ ,

内半径  $b=1.9\text{mm}$ ,

波幅  $f=0.375\text{mm}$ ,

板厚  $h=0.22\text{mm}$ ,

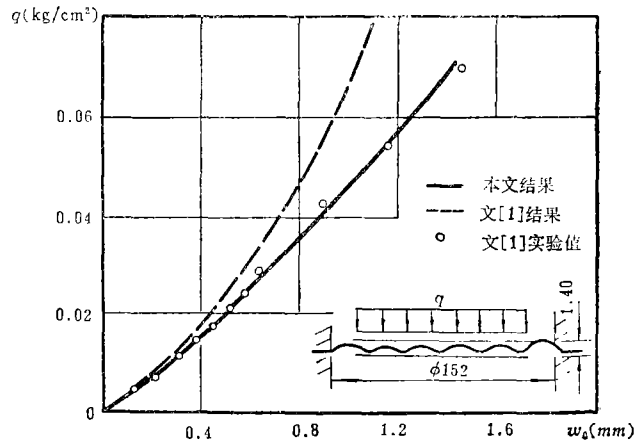


图 2

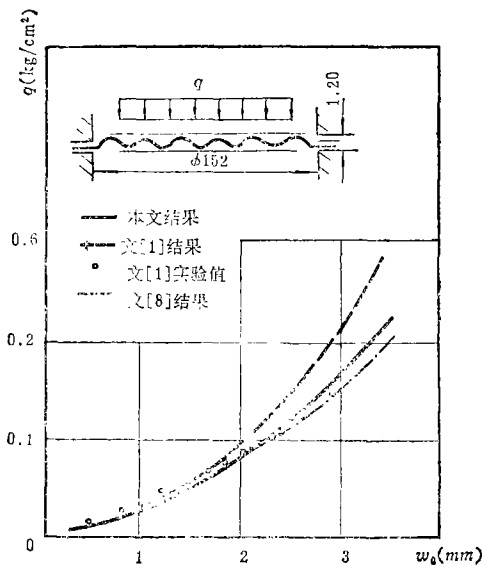


图 3

$$\text{波数} \frac{a-b}{2l} = 3.5,$$

$$E = 1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2, \nu = 0.3,$$

根据波纹与中心平台和边界的连接情况,可以得到

$$\begin{aligned} \cos(\alpha\gamma + \varphi) &= 0, & \sin(\alpha\gamma + \varphi) &= 1 \\ \cos(\alpha + \varphi) &= 0, & \sin(\alpha + \varphi) &= -1 \\ \cos 2(\alpha\gamma + \varphi) &= -1, & \sin 2(\alpha\gamma + \varphi) &= 0 \\ \cos 2(\alpha + \varphi) &= -1, & \sin 2(\alpha + \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

另外,由(3.13)、(3.14)、(3.15)各式算得

$$\beta = 0.65$$

将(4.3)式及各有关数据代入(3.21)、(3.22)式,计算后得到

$$q = 0.835\omega_0 - 0.277\omega_0^2 + 0.4688\omega_0^3 \quad (4.4)$$

图4中按(4.4)式绘出了特征曲线,与文[1]的实验值符合良好,当 $\omega_0 = 0.8$  mm时,误差约为3%,图中还绘出了文[1]的壳体方程解的结果和文[5]的正交异性板解的结果。本文结果较文[1]结果显然有高得多的精确度,本文结果与文[5]结果仍然分别在实验值上方和下方,与实验值比较,本文结果似乎稍好些。

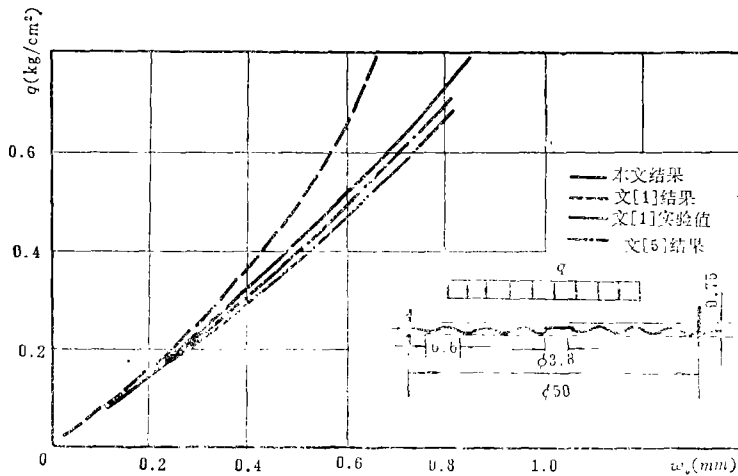


图 4

## 五、结 语

本文是用修正迭代法求解波纹圆板壳体大挠度方程的最初尝试。该方法在处理扁球壳<sup>[7]</sup>、正交异性板<sup>[8]</sup>以及其它一些壳体的大挠度问题时,都曾经是有效的。但在应用于波纹圆板壳体大挠度方程时,必须谨慎;本文表明,如果对初始近似解做适当改进,修正迭代法得到的结果仍然是良好的。

由于问题非线性带来的复杂性,几乎在使用此迭代法的所有情形下,作者们如同本文一样,都只做到了第二次近似。比较(3.21c)和(3.23)式,我们看到,对大挠度特征来说最为重要的 $\omega_0^3$ 项,仍然与平板情形解一样;这是修正迭代法的不足,也是本文改进初始近似,引入修正系数 $\beta$ 的原因所在;因为归根结底,得到明显修正的正是 $\omega_0^3$ 项。

本文得到的(3.6)或(3.7)式可以大大简化确定特征的迭代计算,这对于具有算子 $L$ 的类似边值问题,也有一定参考价值。

算例表明,本文结果较迄今已有的波纹圆板壳体方程解更为接近实验值,精确度和适用范围有较大改进,与正交异性板解的精确度是接近的。其次,本文得到的特征形式是简便

的。正交异性板解的显著优点之一是能适用于各种波纹形状，这是壳体方程解不能相比的。但是，正如引言中所述，由于壳体方程解所固有的一些优点，因而二者就理论和应用的意义说，是互相补充的。这也正是本文尝试的意义所在。

本文是在叶开沅先生指导下写成的，谨此致谢。

### 参 考 文 献

1. Феодосьев В. И., Упругие элементы точного приборостроения, Оборонгиз, (1949)  
(精密仪器弹性元件的理论与计算, 科学出版社, 北京, 1963)
2. Андреева Л. Е., Инженерный сборник, Т. 21 (1955)
3. Аксельрад Э. Л., Изв. АН СССР, Мех-Маш, 1(1964)
4. 赤坂埜, 日本航空学会志, 3(1955)
5. Андреева Л. Е., Упругие элементы приборов, М. Машгиз, (1962)
6. 钱伟长, 林鸿荪, 胡海昌, 叶开沅, 弹性圆薄板大挠度问题, 中国科学院出版, 北京, (1954)
7. 叶开沅, 刘人怀等, 兰州大学学报, 2(1965)
8. 刘人怀, 力学学报, 1(1978)
9. Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*(板壳理论, 科学出版社, 北京, 1977)
10. Трашпейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, М. Физматиз (1962)

## Elastic Behavior of Uniformly Loaded Circular Corrugated Plate with Sine-shaped Shallow Waves in Large Deflection

Chen Shan-lin(*Tsinghua University, Peking*)

### Abstract

By means of modified iteration method, this paper gives approximate solution of the large deflection equations of circular corrugated plate with sine-shaped shallow waves having a central platform under uniform lateral load. A formula of initial modification coefficient  $\beta$  is given, and an integral is obtained for the simplification of modified iteration calculations. The results of present paper shows better agreement with experimental data and larger applicable range than all other existing solutions of corrugated plates.