

# 沿两条内部平行裂纹受压时 材料的断裂问题

A.N.古兹<sup>1</sup> V.M.那柴林柯<sup>1</sup> I.P.斯太洛杜切夫<sup>1</sup>

(1996年11月17日收到)

## 摘 要

顺着平面内的平行裂纹受压材料的断裂问题并不能在线性断裂力学的框架内进行描述。Griffith-Irvin型或COC型的断裂判据, 虽然可以用来处理经典的线性断裂力学, 但对本题则完全不适用。这是因为这些压力对应力强度系数没有影响, 与裂缝孔隙值也没有关系<sup>[1,2]</sup>。

这一类问题只能采用新的方法, 本文的第一作者曾建议过一种新方法, 在这一方法中仍然使用了线性关系, 但这种线性关系是从变形固体力学中的非线性方程导出的<sup>[3,4,5]</sup>。这里必须指出, 这种方法曾在变形体稳定性问题中广泛地采用过。

作为断裂开始的判据, 我们采用了裂缝缺陷附近的局部失稳的判据, 在这类情况下, 我们认为从失稳过程引发断裂过程的。

**关键词** 断裂 平行裂纹 断裂判据

## 一、非线性理论关系和在变形前的坐标中推导线性关系

引用下述记号:  $x_j \equiv x^j$  为拉氏坐标, 它在自然(未变形)状态下, 和卡氏坐标(其正交矢量为  $\mathbf{g}_j$ ) 相重合。坐标  $x_j$  被假定是“冻结”在物体中的。我们将采用格林变形张量

$$2e_{nm}^0 = \frac{\partial u_n^0}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} + \frac{\partial u_k^0}{\partial x_n} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_m} \quad (1.1)$$

来度量变形。其中  $u_n^0$  为位移矢量  $\mathbf{u}$  的分量。下文中, 凡有“零”指数的量, 都是和临界前(初始)状态有关的量。

一般说来, 在本文讨论的问题中, 物体在未变形前的几何状态是已知的。所以, 我们将把有关量都用未变形前的体积和面积来衡量。于是, 在描述应力状态时, 我们将采用克希霍夫的反对称应力张量  $\mathbf{t}^0$  和对称应力张量  $\mathbf{S}^0$ <sup>[4]</sup>, 后者相当于广义应力张量  $\sigma^{*0}$ 。张量  $\mathbf{t}^0$  和  $\mathbf{S}^0$  的分量满足下列关系

$$t_i^j = S_i^n \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right), \quad t_i^j \mathbf{g}_j \equiv t_i^0 \mathbf{g}^j \quad (1.2)$$

这里的  $\delta_{nj}$  为克氏符号(Kronecker符号)

临界状态的平衡方程<sup>[4]</sup>为:

1 乌克兰科学院力学研究所, 乌里沙大街3号, 基辅 252057, 乌克兰

$$\frac{\partial}{\partial x_i} t_{ij}^0 + F_j^0 = 0 \quad (1.3)$$

$F_j^0$  为质量力的分量。

物体表面的  $S_1$  部分上的应力边界条件和另一部分  $S_2$  上的位移边界条件分别为<sup>[4]</sup>

$$N_i^0 t_{ij}^0 |_{S_1} = P_j^0 \quad (1.4)$$

$$u_j^0 |_{S_2} = f_j^0 \quad (1.5)$$

其中  $N_i^0$  为物体在未变形状态下表面上的单位法向矢量的分量； $P_j^0$  为表面外力(单位面积)的分量(指变形状态下, 所受外力)； $f_j^0$  为边界上的位移分量。表面受力和体内质量力分别按变形前的单位面积和单位体积衡量。

对于不可压缩的物体而言, 常常需要写出不可压缩条件, 例如, 其方程式为[见4],

$$\det \|\delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}^0\| = 1 \quad (1.6)$$

把非线性力学的关系式进行线性化, 即得线性关系式。线性化的主要原则见[4]。

让我们考虑已变形的物体有两种状态, 第一种状态是临界前状态(或初始状态或未畸变状态), 第二种状态是畸变后状态, 所有畸变后状态的量都是由初始状态的量(用“0”指标)和畸变值(不加任何指标)相加而成。畸变值一般要小于初始值(即未畸变状态之值)。由于畸变值很小, 所有畸变后状态的关系式都能线性化。于是我们从第二状态(畸变后的状态)的关系式中减去第一状态(即未畸变状态)的关系式后, 即得畸变值的关系式, 并称这些关系式为线性弹性理论。

在进行了上述线性化过程后, 我们得到线性化几何关系:

$$2\varepsilon_{nm} = \left[ \left( \delta_{mj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_n} + \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \frac{\partial}{\partial x_m} \right] u_j \quad (1.7)$$

线性化平衡方程

$$\frac{\partial}{\partial x_i} t_{ij} + F_j = 0 \quad (1.8)$$

线性化边界条件

$$N_i t_{ij} |_{S_1} = P_j, \quad u_j |_{S_2} = f_j \quad (1.9)$$

还有不可压缩条件在线性化后为

$$g_{nm}^{*0} \varepsilon_{nm} = 0 \quad (1.10)$$

其中  $g_{nm}^{*0}$  为未变形状态物体的坐标系  $x_m$  在变形后的基本度规张量的协变分量。

克希霍夫张量  $\mathbf{t}$  和对称张量  $\mathbf{S}$  间的关系式为(见[3])

$$t_{ij} = \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \quad (1.11)$$

$S^{in}$ ,  $S_0^{in}$  的值可以通过分解求得(见[3]),

$$t_0^{ij} g_j = S_0^{ij} g_j^{*0} \quad (1.12)$$

其中  $g_j$ ,  $g_j^{*0}$  为未变形和变形后的协变基本矢量。

本节所谈的一切线性化关系, 同样都适用于临界前的大变形理论; 对于临界前小变形理论有关变量的关系式也可以从上述关系中分别简化求得, 见[3]。在临界前小变形理论中,  $S_0^{ij} = \sigma_{ij}^0$ , 这就是通常应力的意义,

## 二、问题的表述及其解

让我们考虑下列平面断裂问题：在无穷大的物体中顺着 $x_1$ 轴向有两条平行的裂缝，其长为 $2a$ ，裂缝在 $x_3$ 轴向延伸止无穷远。这两条平行裂缝分别位于 $x_2=0$ ， $x_2=-2h$ 的平面上，这个物体承受 $x_1$ 轴向的单向压力（见图1）。

由于无穷大物体中受均匀单向压力，其结果必为<sup>[5]</sup>

$$\left. \begin{aligned} S_{i1}^0 &= \text{const}, S_{22}^0 = 0, S_{11}^0 \neq 0, S_{33}^0 \neq 0 \\ u_m^0 &= \delta_{im}(\lambda_i - 1)x_i, \lambda_i = \text{const}, \lambda_3 = 1 \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 $\lambda_i$ 为顺着轴向的初始伸长度( $\lambda_1 < 1$ )。

当受压物体在临界前的状态下有位能函数 $\varphi_i$  ( $i=1$ ,

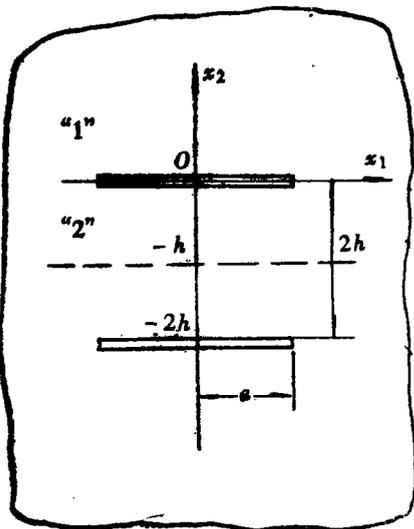
2)时的线性化问题方程组(2.1)的一般解有下列两种形式<sup>[6,7]</sup>

特征方程有等根( $n_1^p = n_2^p$ )时的解为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &\parallel -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ u_2 &= (n_1^p)^{-1/2} \left[ (m_1^p + 1 - m_2^p) F - m_1^p \Phi - m_1^p z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right] \\ t_{21} &= C_{14}^p (n_1^p)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \left( -\frac{\omega_{2112}}{\omega_{2121}} + m_1^p - m_2^p + 1 \right) F \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{2121}} + m_2^p \right) \Phi - \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{2121}} + m_1^p \right) z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right\} \\ t_{22} &= C_{14}^p \left\{ \left[ \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{2121}} + m_1^p \right) l_1^p - \left( \frac{2\omega_{2112}}{\omega_{2121}} + m_2^p - 1 \right) l_2^p \right] \frac{\partial F}{\partial z_1} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{2121}} + m_1^p \right) l_1^p \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{2121}} + m_1^p \right) l_1^p z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \right\} \\ z_1 &= (n_1^p)^{-1/2} x_2, \quad \varphi = -(\varphi_1 + \varphi_2), \quad F = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}, \quad \Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

特征方程有不等根( $n_1^p \neq n_2^p$ )时的解为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_1 + \varphi_2) \\ u_2 &= m_1^p (n_1^p)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2^p (n_2^p)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \\ t_{22} &= C_{14}^p \left[ \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{1212}} + m_1^p \right) l_1^p \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{1212}} + m_2^p \right) l_2^p \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right] \\ t_{21} &= C_{14}^p \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{1212}} + m_1^p \right) (n_1^p)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \left( \frac{\omega_{2112}}{\omega_{1212}} + m_2^p \right) (n_2^p)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \right] \\ z_i &= (n_i^p)^{-1/2} x_2 \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$



图

指数“ $p$ ”表示该量属于平面问题。对于不可压缩物体而言，张量分量  $\omega$  都用张量分量  $\infty$  替代。 $C_{ij}^p, n_i^p, m_i^p, l_i^p$  由文献[8]的公式决定，其中指数“3”改为“2”。

### 三、把问题归纳为双积分方程的系统

我们将分别处理由于弯曲形态引发的失稳和由于对称形态引起的失稳。根据不同的对称特性，当将问题（即平面问题）化为上半平面 ( $x_2 \geq -h$ ) 问题时，其边界条件是各不相同的。

弯曲形态引起的失稳：上半平面  $x_2 \geq -h$  的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} t_{22}=0, t_{21}=0, & \quad (x_2 = \pm 0, |x_1| < a) \\ t_{22}=0, u_1=0, & \quad (x_2 = -h, 0 \leq |x_1| < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

对称形态引起的失稳：上半平面  $x_2 \geq -h$  的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} t_{22}=0, t_{21}=0 & \quad (x_2 = \pm 0, |x_1| < a) \\ t_{21}=0, u_2=0 & \quad (x_2 = -h, 0 \leq |x_1| < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

让我们考虑写出弯曲形态的解。把上半平面  $x_2 \geq -h$  分为两部份：第一部份  $x_2 \geq 0$ ，和第二部份  $-h \leq x_2 \leq 0$ ，见图1。我们将把调和函数  $F, \Phi$ （等根的）和  $\varphi_1, \varphi_2$ （不等根的）在各自的域中在  $x_1$  轴向写成付氏余弦积分形式。

在不等根情况下，

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty A(\lambda) \exp[-\lambda z_1] \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \varphi_2^{(1)}(x_1, z_2) &= \int_0^\infty B(\lambda) \exp[-\lambda z_2] \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \varphi_1^{(2)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty [C_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_1 + h_1) + C_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_1 + h_1)] \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1} \\ \varphi_2^{(2)}(x_1, z_2) &= \int_0^\infty [D_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_2 + h_2) + D_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_2 + h_2)] \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

其中  $h_i = (n_i^2)^{-1/2} h, i = 1, 2$ 。

对于等根的情况而言， $F$  和  $\Phi$  函数的付氏余弦积分表达式和 (3.3) 式相类似，但在这些表达式中， $z_1 = z_2, h_1 = h_2$ ，而且没有  $\lambda^{-1}$  这一乘子。

在裂缝以外，这两个区域的边界  $x_2 = 0, x_1 > a$  上，应力和位移必须连续。在这些连续条件和上述边界条件 (3.1) 或 (3.2) 都满足以后，采用文献 [6, 7] 相类似的变换，这一问题可以化为第一类的积分方程系统，其核具有对数奇异性。当我们把其结果按文献 [6, 7] 那样化为无量纲形式后，得

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 f(\eta) \ln \left| \frac{1-\xi^2}{\eta^2-\xi^2} \right| d\eta + \frac{1}{s} \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{s} \int_0^1 N_1(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0 \\ \int_0^1 g(\eta) \ln \left| \frac{1}{\eta^2-\xi^2} \right| d\eta + \frac{1}{s} \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{s} \int_0^1 N_2(\xi, \eta) f(\eta) d\eta &= \text{const} \\ \int_0^1 g(\eta) d\eta = 0, & \quad 0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

对于对称形式而言, 积分核 $M_1, N_1, M_2, N_2$ 在积分前的正负号相互对换。

积分方程中的核具有下列形式

$$\left. \begin{aligned} M_1(\xi, \eta) &= R_1(\eta + \xi) - R_1(1 + \xi) + R_1(\eta - \xi) - R_1(1 - \xi) \\ N_1(\xi, \eta) &= S_1(\eta + \xi) + S_1(\eta - \xi), \quad M_2(\xi, \eta) = S_2(\eta + \xi) + S_2(\eta - \xi) \\ N_2(\xi, \eta) &= R_2(\eta + \xi) - R_2(1 + \xi) + R_2(\eta - \xi) - R_2(1 - \xi) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

对于等根情况而言, 它们用下列各式来表示

$$\left. \begin{aligned} R_1(\xi) &= -2[2^{-1} s L_{-1}(\xi) + L_0(\xi)]; \quad S_1(\xi) = -L_1(\xi) \\ R_2(\xi) &= -L_{-1}(\xi); \quad S_2(\xi) = 2[2^{-1} s L_{-1}(\xi) - L_0(\xi)] \\ L_{-1}(\xi) &= -2^{-1} \ln[\xi^2 + (2\beta_1)^2]; \quad L_0(\xi) = 2\beta_1^2 [\xi^2 + (2\beta_1)^2]^{-1} \\ L_1(\xi) &= \beta_1^2 [(2\beta_1)^2 - \xi^2] [(2\beta_1)^2 + \xi^2]^{-2} \\ s &= (I_1^2 - I_2^2) (2\omega_{2112} \omega_{2121}^{-1} + m_2^2 - 1) (\omega_{2112} \omega_{2121}^{-1} + m_1^2)^{-1} (I_1^2)^{-1} \\ \beta_1 &= (n_1^2)^{-1/2} \beta, \quad \beta = ha^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

对于不等根情况而言, 有

$$\left. \begin{aligned} R_1(\xi) &= k_2 I_{-1}(2\beta_2, \xi) - k_1 I_{-1}(2\beta_1, \xi) \\ R_2(\xi) &= -2^{-1} k_2 [I_{-2}(2\beta_2, \xi) - I_{-2}(2\beta_1, \xi)] \\ S_1(\xi) &= -2^{-1} k_2 [I_0(2\beta_2, \xi) - I_0(2\beta_1, \xi)] \\ S_2(\xi) &= k_1 I_{-1}(2\beta_2, \xi) - k_2 I_{-1}(2\beta_1, \xi) \\ I_0(p, \xi) &= \beta p (\xi^2 + p^2)^{-1}, \quad I_{-1}(p, \xi) = -2^{-1} \ln(\xi^2 + p^2) \\ I_{-2}(p, \xi) &= \beta^{-1} [2^{-1} p \ln(\xi^2 + p^2) - \xi \operatorname{arctg}(\xi p^{-1})] \\ s &= k_1 - k_2, \quad k_1 = I_1^2 (n_2^2)^{-1/2}, \quad k_2 = I_2^2 (n_1^2)^{-1/2} \\ \beta_i &= \beta (n_i^2)^{-1/2}, \quad (i=1, 2); \quad \beta = ha^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

在平面问题的临界前状态中, 失稳面的临界值  $\lambda_1^{si}$  是由  $s(\lambda_1) = 0$  的条件决定的。核  $M_1, N_1, M_2, N_2$  除了在  $\lambda_1^{si}$  点外, 都是连续的。问题(3.4)的临界值一定高于  $\lambda_1^{si}$ 。于是, 在这种情况下, 临界值应该在区域  $\lambda_1^{si} < \lambda_1 < 1$  之中, 在这一区域中,  $M_1, N_1, M_2, N_2$  都是连续的。

#### 四、复合材料的分层问题

分析了复合材料的分层断裂的不少研究结果(见文献[9~14])之后, 得到如下结论: 复合材料受压发生分层断裂时一般分成两个阶段。初始断裂阶段是决定于缺陷附近局部失稳过程。在第二个可能的断裂阶段, 我们应研究缺陷传播过程中的后临界状态。我们可以得出结论, 认为顺着裂缝受压时材料的局部失稳(这相当于在前临界状态中断裂的可能性分析)是决定断裂开始出现的条件。在开始发生断裂以后, 其它断裂机理可能被初始断裂引发的失稳所促成。不过, 一直到目前为止, 这一断裂的初始阶段并没有被严格地和精确地分析过。所有现有的分析都是只用现有板、杆、壳的实用理论[文献11~13]进行了近似计算。在本文中, 断裂的初始阶段分析都是严格地采用线性稳定理论进行的。

下文的分析和大裂缝有关[文献3]。这些大裂缝的特征尺寸都比微结构的尺寸大得很多。这里的复合材料被看作是近似地连续的, 可以用具有正常特性的各向异性材料为模型。[见文献3]。

在本文中, 我们研究了横观各向同性模型的复合材料, 它的  $C_{ij}^k, n_j^k, l_j^k, m_j^k$  值都由文

献[3]中的关系决定的。

$$\left. \begin{aligned} n_{1,2}^p &= 2^{-1} (A_{11} + \sigma_{11}^0)^{-1} (\mu_{12} + \sigma_{11}^0)^{-1} \{ (A_{11} A_{22} + \sigma_{11}^0 A_{22} + \mu_{12} \sigma_{11}^0 \\ &\quad - A_{12}^2 - 2A_{12} \mu_{12}) \pm [(A_{11} A_{12} + \sigma_{11}^0 A_{22} + \mu_{12} \sigma_{11}^0 - A_{12}^2 - 2A_{12} \mu_{12})^2 \\ &\quad - 4\mu_{12} A_{22} (A_{11} + \sigma_{11}^0) (\mu_{12} + \sigma_{11}^0)]^{1/2} \} \\ C_{44}^p &= \mu_{12} \\ m_j^p &= [(A_{11} + \sigma_{11}^0) n_j^p - \mu_{12}] (A_{12} + \mu_{12})^{-1} \\ l_j^p &= [n_j^p (A_{22} A_{11} + A_{22} \sigma_{11}^0 - A_{12}^2 - A_{12} \mu_{12}) - A_{22} \mu_{12}] \\ &\quad \cdot [(A_{11} + \sigma_{11}^0) n_j^p + A_{12}]^{-1} (n_j^p)^{-1} \mu_{12}^{-1} \quad (j=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中，在线性弹性体中， $A_{ij}$ ， $\mu_{12}$ 都是常数，它们可以用公式表达如下。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= E(1 - \nu' \nu'') A^{-1}; \quad A_{22} = E'(1 - \nu^2) A^{-1}; \quad A_{12} = E \nu' (1 + \nu) A^{-1} \\ \mu_{12} &= G' = G_{12}; \quad A = 1 - \nu^2 - 2\nu' \nu'' - 2\nu \nu' \nu'' \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

这里的 $E$ ， $E'$ 为分别为在各向同性平面内和在垂直于这些各向同性平面内的拉压杨氏模量； $\nu$ ， $\nu'$ 为泊桑系数，它们标志着在各向同性平面内的横向压缩变形，前者代表在这一平面（各向同性）内的受压变形，后者代表垂直于这一平面（各向同性）内的受压变形； $\nu''$ 代表当各向同性面内受拉时，在这一平面垂直方向所产生的压缩变形。

对于初始状态情况考虑(2.1)式，在采用了小初始变形理论的二次变形后，我们导出了用于材料线性模量的下列关系

$$\sigma_{11}^0 = E(\lambda_1 - 1)(1 - \nu^2)^{-1}; \quad \lambda_2 = 1 + E(E')^{-1} \nu' (1 - \lambda_1)(1 - \nu)^{-1} \quad (4.3)$$

一般说来，复合材料都有约化抗剪劲度，这就形成了 $G' \ll A_{11}$ ，我们可以用文献[3]的近似公式决定临界压缩应力

$$(\sigma_{11}^0)_i \approx -G' [1 - [(G')^2 / EE']] (1 - \nu^2) (1 - \nu' \nu'') \quad (4.4)$$

## 五、材料的塑性失衡 (Plastic failure)

在研究弹塑性材料的塑性失衡时，根据文献[3]，应该假定有某种失衡过程，即在全体材料失衡时，材料的变形必先超过弹性极限。在分析变形过程的稳定性时，我们都在广泛的意义上假定连续加载的观点。初始阶段都是在几何线性理论的框架中决定的。在分析中，人们都注意到，在弹塑性体中，都是从特征方程的复数不等根值来实现这一条件的。复数不等根即复数共轭根。这种研究只严格限于不可压缩的弹塑性体的分析。在(2.1)式的状态下线性方程组的一般解为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re}(\varphi_1 + \varphi_2); \quad u_2 = \operatorname{Re} \left[ m_1^p w_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2^p w_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \right] \\ t_{22} &= C_{44}^p \left\{ \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\alpha_{2112}}{\alpha_{1212}} + m_1^p \right) l_1^p \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + \left( \frac{\alpha_{2112}}{\alpha_{1212}} + m_2^p \right) l_2^p \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right] \right\} \\ t_{21} &= C_{44}^p \left\{ \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\alpha_{2112}}{\alpha_{1212}} + m_1^p \right) w_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial z_1} + \left( \frac{\alpha_{2112}}{\alpha_{1212}} + m_2^p \right) w_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial z_2} \right] \right\} \\ C_{44}^p &= \alpha_{1212}; \quad z_i = w_i x_2, \quad w_i = (n_i^p)^{-1/2}; \quad \operatorname{Re} w_i > 0, \quad i=1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

复数值 $m_i^p$ ， $l_i^p$  ( $i=1, 2$ )是从张量 $\alpha$ 的分量中求得的，这种根一般是复数，这里应该采用文献[7]寻求特征方程的不等值实数根的各种公式。 $\alpha_{ij\alpha\beta}$ 的分量是通过选用塑性理论来求得的。

在形式上，用在实数根的情况下的(3.3)式所表达的 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 是相同的，但 $A(\lambda)$ ， $B(\lambda)$ ， $C_i(\lambda)$ ， $D_i(\lambda)$  ( $i=1, 2$ )是 $\lambda$ 的复函数。这就使导出(3.4)式的最后方程组成为可能；在这一

组方程内, 积分核和所求函数都是实变量的复函数。

## 六、数值分析

从(3.4)式求解特征值 $\lambda_1$  (或 $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(\lambda_1)$ ) 的数值分析, 是用 Bubnov-Galerkin 法 (文献[15]) 进行的。数值积分采用高斯求积公式和具有对数奇点的函数的求积公式。并采用了幂级数 $1, x, x^2, \dots$  作为坐标函数的系统。

根据上述求解的建议过程, 参数 $\lambda_1$  (或 $\sigma_{11}^0$ ) 的临界值即可求得, 它是在线性稳定性理论的框架中求得的解, 相当于裂缝附近断裂的开端。

### 6.1 高弹性材料的性能

在大初始变形理论的框架中, 高弹性材料是一类例子。我们已对各向同性物体分析了二种弹性能, 一种是Bartenev-Khazanovich位能, 是等根的问题, 见文献[6, 7]; 另一种是Treloar位能, 它用来处理非虎克型的物体, 是不等根的问题。它也可以用来处理各向同性可压缩性物体, 是调和型的位能, 是等根问题, 见文献[6]。  $n_i^0, m_i^0, l_i^0$  ( $i=1, 2$ ) 等的关系式见文献[6, 7]。

对于不同相对裂缝间隙 $\beta = ha^{-1}$  所得的相对临界缩短度 $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$  的计算值见附表1, 在这里, 我们用了 Bartenev-Khazanovich 位能,  $\beta = \infty$  时, 相当无穷大的材料中不存在起作

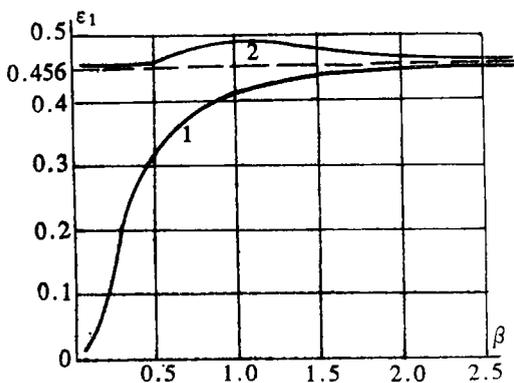


图 2

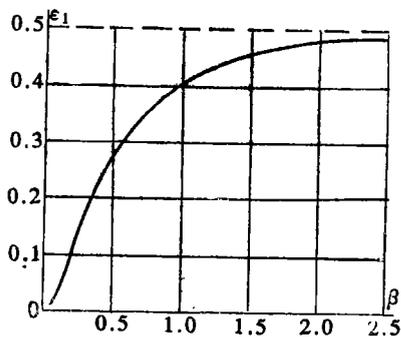


图 3

用的裂纹的情况, 这种情况下求得的临界载荷, 相当半无限空间无裂纹 (平面变形的情况) 受压失稳的载荷。图2和图3分别为Treloar位能和调和位能下求得的 $\varepsilon_1 - \beta$  关系曲线。在图2中, 曲线1表示弯曲形式的失稳, 曲线2则为对称型的失稳。在 $\beta \rightarrow \infty$  时,  $\varepsilon_1$  在Treloar位能和调和位能中分别走向0.456和0.5。图4表明了各种泊桑系数 $\nu$  下的 $\lambda_2$  和 $\beta$  的关系。

### 6.2 复合材料的性能

#### 1. 各向同性层的分层复合材料

从宏观的观点看, 这种复合材料可以看成

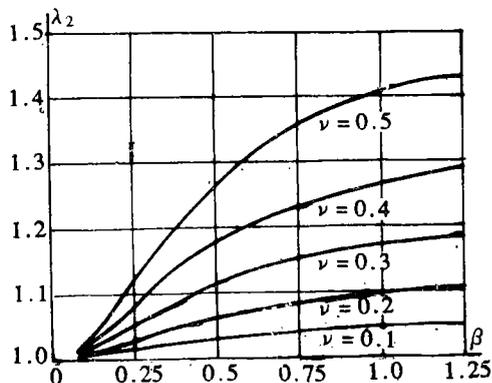


图 4

表1 Bartenev-Khasanovich位函数的 $\beta$ 和 $\varepsilon_1$ 的关系 (坐标函数的数目 $N=4$ )

$\varepsilon_1$	0.012	0.043	0.141	0.304	0.390	0.408	0.414	0.423
$\beta$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	1.5	2	$\infty$

是横观各向同性介质[见文献10]。在这种材料中, 裂缝处于 $x_2 = \text{常量}$ 的平面内, 它和各层分层中间界面相平行。图5和图6分别表示临界无量纲压应力 $\sigma = \sigma_{11}^0 / (\sigma_{11}^0)^{st}$ , 及 $\bar{\sigma} = \sigma_{11}^0 / E$ , 和各向同性层之间的弹性模量之比 $E^{(1)} / E^{(2)}$ 的关系曲线, 我们假定各层的泊桑系数是相同的( $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu = 0.3$ , 弹性模量为 $E^{(1)}$ 的分层密度为 $c_1 = 0.3$ )。

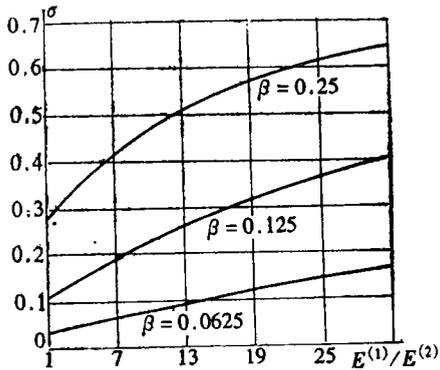


图 5

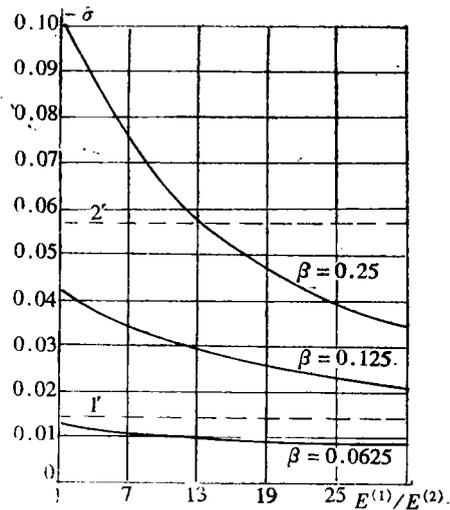


图 6

根据文献[11~13]所用的近似方法, 在失稳断裂的初始阶段的分析中, 临界压载相当于把复合材料分成若干条状物体后的欧拉失稳的临界力, 而且这些分层的条状物体是粘结在一起的, 粘结的情况既可以是牢固地的粘结, 也可以是自由支承, 或牢固程度不同的粘结和支承。图6中的虚线1'和2'代表牢固粘结条件下的无量纲欧拉压载 $\bar{\sigma}_E = (\sigma_{11}^0)_{E1} / E$ , 其中

$$(\sigma_{11}^0)_{E1} = -\frac{4}{3} (\pi h / l)^2 E (1 - \nu^2)^{-1}$$

虚直线1'和2'显示牢固粘结时 $\beta$ 值不同所引起的差异, 1'的 $\beta$ 值为0.0625, 2'的 $\beta$ 值为0.125。

对于特殊的分层复合材料如铝/硼/硅在环氧树脂中凝成的材料[见文献10]而言,  $\bar{\sigma}$ 和 $\sigma$ 与玻璃密度 $c_1$ 的关系曲线见图7和图8。

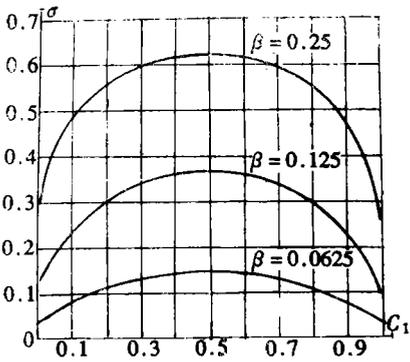


图 7

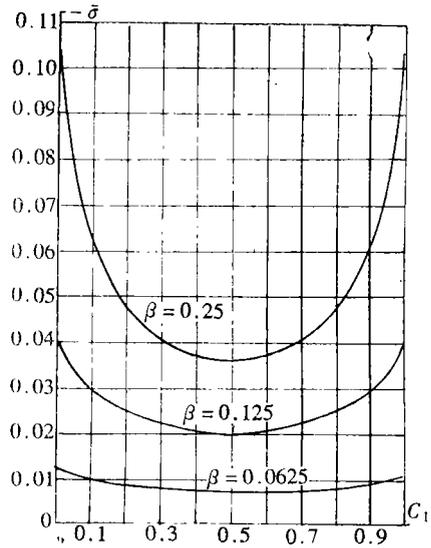


图 8

2. 椭球形短纤维在  $x_2 = \text{常数}$  的平面内随机增强的复合材料

图 9 是碳纤维增强塑料的  $\epsilon_1 = \epsilon_1(\beta)$  和  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\beta)$  的关系图, 这种增强塑料的纤维密度  $c_1 = 0.7$ , 纤维的长细比为 10. 碳纤维增强塑料的宏观特性是从 [文献 16] 中取用的.  $\epsilon_1$  和  $\bar{\sigma}$  的临界值在  $\beta \rightarrow \infty$  时分别渐近于 0.095 和 0.097, 它们分别等于在平面变形的条件下, 半无限平面失稳时的临界值. 我们可以观察到一个有趣的现象, 临界应力  $\bar{\sigma}$  在裂缝间距  $H = 2h$  不变的条件下和裂缝长度  $L = 2a$  有关 (见图 10). 从这里看到, 参数  $L$  是可以用来衡量材料的缺陷程度的. 这里必须指出, 在我们所用的框架内, 当  $L \rightarrow 0$  时 (代表无缺陷的材料), 临界应力  $\bar{\sigma}$  是有限值, 它等于表面失稳的临界值.

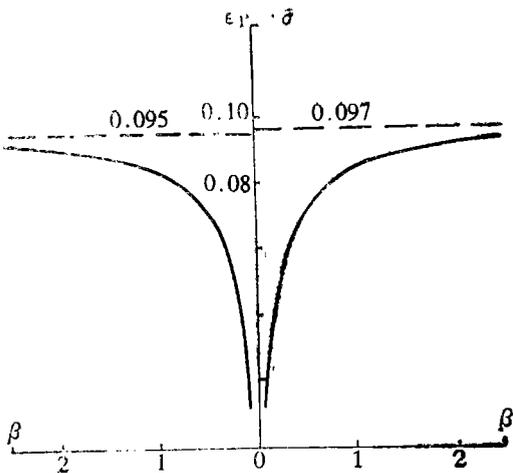


图 9

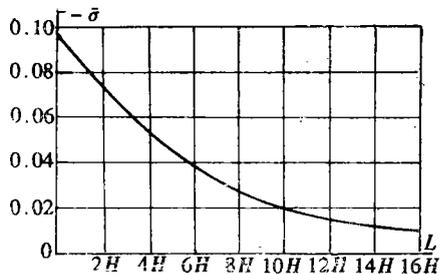


图 10

### 6.3 弹塑性体的特性

作为弹塑性体断裂的一个例子，让我们假设弹塑性体在变形时按小弹塑变形的幂级数应力应变关系进行，

$$\sigma_i^0 = A(\epsilon_i^0)^k \tag{6.1}$$

图11表示在不同的 $\beta$ 下， $\epsilon_1$ 和 $\sigma = \sigma_i^0/E_s$ 对 $k$ 值的关系曲线，其中 $E_s$ 为曲线 $\sigma_i \sim \epsilon_i$ 上的正割模量。这里必须指出，前临界变形值 $\epsilon_1 = -\epsilon_1^0$ 是很小的。在图12中，曲线代表铝的 $\epsilon_1, \sigma$ 和 $\beta$ 的关系曲线，见文献[17]。这里铝的 $\sigma^{si} = -0.136$ ， $\epsilon_1^{si} = 0.102$ ， $k \approx 0.23$ 。

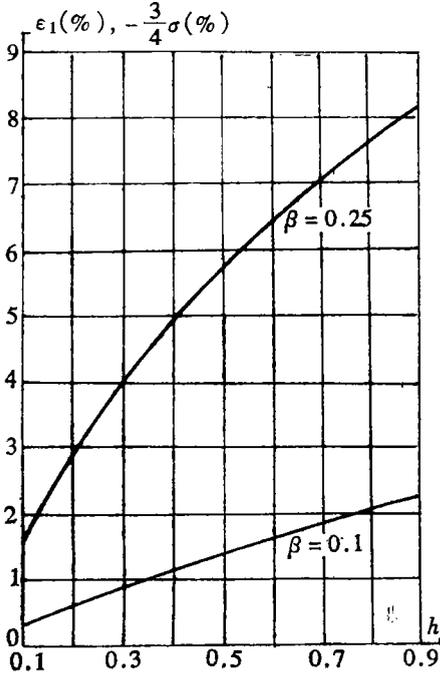


图 11

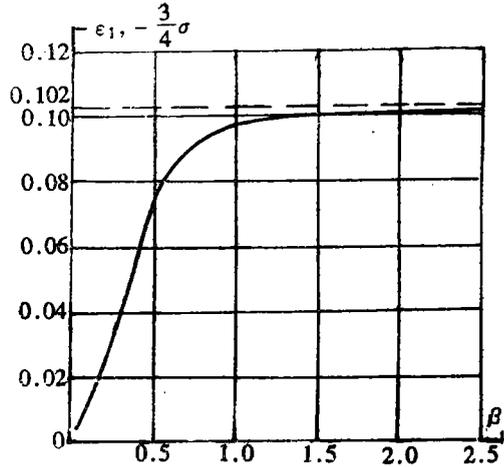


图 12

## 七、结 论

从数值分析的结果，可得出下列结论。

当裂缝间的距离足够小时 ( $\beta = 0.0625 \sim 0.125$ )，临界载荷远比无穷大平面中只有一条裂缝时的临界载荷小，约小一级。因此，在考虑了裂缝间的相互作用后，将引起理论强度极限的明显的降低。当裂缝间的距离增大时，临界载荷值将渐渐接近平面内只有一条裂缝时的临界载荷值。这种临界载荷值等于半无限平面中没有裂缝时的表面失稳载荷。

在可压缩性物体中，用泊桑系数  $\nu$  表示的可压缩性对某些临界参量有很大影响，对高弹性材料在调和位能下，其影响可达35%。

计算决定临界载荷时，曾用近似计算和精确计算的结果相比较。本文通过对断裂的初始阶段用严格的线性理论进行计算，证明近似计算在 $\beta = 0.0625$ 时，有误差57%，在 $\beta = 0.125$ 时，有误差167%。

在复合材料中,成分的密度和它们的弹性特性,对断裂载荷有根本性的影响。

### 参 考 文 献

- [1] G. P. Cherepanov, *Mechanics of Brittle Fracture*, Nauka, Moscow (1974). (in Russian)
- [2] M. K. Kassir and G. C. Sih, *Mechanics of Fracture, Three-Dimensional Crack Problems*, Vol. 2, Noordhoff, Leiden (1975).
- [3] A. N. Guz, *Mechanics of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses*, Naukova Dumka, Kiev (1983). (in Russian)
- [4] A. N. Guz, *Foundations of Three-Dimensional Theory of Deformable Bodies Stability*, Vyshcha Shkola, Kiev (1986). (in Russian)
- [5] A. N. Guz, Foundation of mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses, *Adv. Fract. Rec. Proc. 6-th Int. Conf. (ICF6)*, New Delhi, 4-10 Dec., 1984, Vol.2 (1984), 1223-1230.
- [6] A. N. Guz, V. M. Nazarenko and I. P. Starodubtsev, Plane problem of fracture of materials with two parallel cracks in compression along the cracks, *Problems of Mechanics of Deformable Solid Body*, University of Kalinin, Kalinin (1986), 138-151. (in Russian)
- [7] I. P. Starodubtsev, Fracture of the body in compression along two parallel cracks in plane deformation condition, *Prikl. Mekhanika*, 24(6) (1988), 79-84. (in Russian)
- [8] A. N. Guz and V. M. Nazarenko, Symmetric failure of the half-space with penny-shaped cracks in compression, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 3(3) (1985), 233-245. (in Russian)
- [9] V. V. Bolotin, Defects of the delamination type in structures of composite materials, *Mechanics of Composite Materials*, 2 (1984), 239-255. (in Russian)
- [10] A. N. Guz (General Editor), *Mechanics of Composite Materials and Structures Elements*, Vol. 1, Naukova Dumka, Kiev (1982). (in Russian)
- [11] A. M. Mikhailov, Some problems of cracks theory in beam approximation, *J. Appl. Mech. and Techn. Fizi.*, 5 (1967), 128-133. (in Russian)
- [12] A. N. Polilov and Yu. N. Rabotnov, Development of delaminations in compression of composites, *Izv. AN SSSR, Mekhanika Tverdogo Tela*, 4 (1983), 166-171. (in Russian)
- [13] L. I. Slepian, *Mechanics of Cracks*, Leningrad (1981). (in Russian)
- [14] W.-L. Yin, Axisymmetric buckling and growth of a circular delamination in compressed laminate, *Int. J. Solids Struct.*, 21(5) (1985), 503-514.
- [15] S. G. Mikhlin and Kh. L. Smolitsky, *Approximate Methods of Solutions of Differential and Integral Equations*, Nauka, Moscow (1965). (in Russian)
- [16] B. P. Maslov, *Investigation of Stochastic Composites with Nonlinear and Anisotropic Properties of Components*, Dissertation for Doctor Degree, Kiev (1983). (in Russian)
- [17] D. Kolarov, A. Baltov and N. Boncheva, *Mechanics of Plastic Media*, Mir, Moscow (1979). (in Russian)

- [18] A. N. Guz, V. I. Knukh and V. M. Nazarenko, Compressive failure of materials with two parallel cracks: small and large deformation, *Theor. Appl. Fracture Mech.*, 11 (1989), 213—223.

## On Problems of Fracture of Materials in Compression along Two Internal Parallel Cracks

A. N. Guz V. M. Nazarenko I. P. Starodubtsev

(*Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Ulitsa Nesterova 3, Kiev, 252057, Ukraine*)

### Abstract

The fracture of materials under the action of compressive forces, directed along cracks which are parallel in plane cannot be described within the framework of the linear fracture mechanics. The criteria of fracture of the Griffith-Irvin or COC type, used in classical linear fracture mechanics, are not applicable in this problem, since these forces have no influence on stress intensity coefficients and on values of cracks opening<sup>(1,2)</sup>.

The problems of such a class may be described only by using new approaches. One of possible approaches is presented by the first author, which involves using linearized relations, derived from exact non-linear equations of deformable solid body mechanics<sup>(3,4,5)</sup>. It should be remarked here that this approach has been widely used in problems of deformable bodies stability.

As a criterion of the initiation of fracture the criterion of local instability near defects of the crack type is used. In these cases the process of loss of stability initiates the fracture process.

**Key words** fracture, internal parallel crack, criterion of the initiation of fracture