

# 论理想流体与线弹性结构的耦联振动\*

黄 争 鸣

(华中理工大学力学系, 1989年1月23日到)

## 摘 要

本文对理想流体与线弹性结构的耦联振动问题作理论分析和数值分析。文中证明了耦联振动的固有频率存在并且均为正实数。将流—固耦合系统分析转化为单一结构物在真空中的自由振动分析后, 频率方程中不再含有流体变元, 使问题得以大大简化。给出了数值解的收敛性证明, 以保证解的可靠性。文中还综合里兹法、边界元和有限元方法, 提出一种分析转化后结构的混合算法。利用该算法, 只需对现有结构分析程序稍作改进, 就可分析那些理想流场与结构的耦合问题。一些数例说明了算法的有效性。

**关键词** 结构—流体相互作用 存在性 收敛性 通用算法

## 一、引 言

流体与弹性结构的相互作用问题得到了人们的广泛注意。虽然已有许多文章论及流体—结构耦联振动问题(见[1]~[7]), 但据作者所知, 耦联振动的两个基本问题, 还没获得满意的解决。其中之一是理论上的存在性问题。是否流—固耦联振动的固有频率值均存在? 毫无疑问, 这不仅在理论上, 而且在实际中都有重要意义。另一个是算法的通用性问题。众所周知, 流—固耦合问题的解比单一结构问题的解要复杂得多。由于流体所占的空间通常是无界的, 常规的有限元方法难以用于求解这类流体与结构的耦合问题。在人们的种种尝试中([6]~[7]), 还没有见到有象分析固体结构物那样通用、有效、简便的算法及相应的计算程序问世。

因此, 本文就讨论这两个问题。更确切地说, 本文原则上解决了理想流体与线弹性结构耦联振动的上述两个基本问题。首先, 文中证明了耦联振动的固有频率存在并且均为正实数。然后, 给出了一种有效的转换算法, 将流—固耦合振动分析变为单一结构物在真空中的自由振动分析。最后, 将流场分为两部分, 分别称为影响区和衰弱区。在衰弱区内用里兹法逼近, 在影响区内用边界元离散, 对结构物则用有限元求解。在此基础上, 只需对现有的大型结构分析程序例如SAP或ADINA稍作改进, 就可自动求解那些理想流场与线弹性体的耦合问题了。文中还给出了数值解的收敛性证明。

\* 钱伟长推荐。

## 二、等价的变分式

本文假定流体无粘、无旋、不可压缩，结构为线弹性体。用  $\Omega_s \subset R^3$  表示结构所占的空间， $\Omega_w \subset R^3$  为流体所占的空间，其中  $\Omega_w$  可以是无界的(见图1)。令  $\Gamma_s$  和  $\Gamma_w$  分别表示  $\Omega_s$  和  $\Omega_w$  的 Lipschitz 边界，其中  $\Gamma_s = \Gamma_r \cup \Gamma_u \cup \Gamma_0 \cup R_s$ ， $\Gamma_w = \Gamma_0 \cup \Gamma_f \cup \Gamma_b \cup \Gamma_r \cup R_w$ ， $\Gamma_r \cap \Gamma_u = \phi$ ， $\Gamma_f \cap \Gamma_b = \phi$ ， $\Gamma_0 \neq \phi$ ， $\text{meas} R_s = \text{meas} R_w = 0$ 。  $\Gamma_r$  是无界的， $\Gamma_r = \Gamma_\infty$ 。

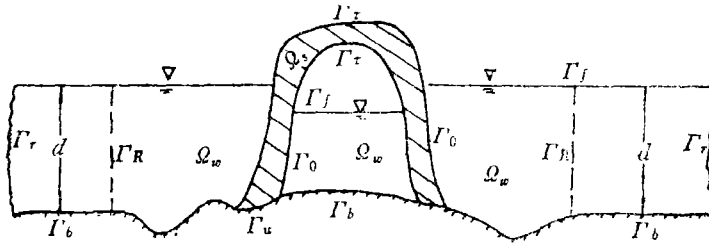


图1 流—固耦合系统

用  $x = (x_1, x_2, x_3)$  表示  $\Omega_s$  或  $\Omega_w$  中一点的笛卡尔坐标， $\Phi = i\omega e^{i\omega t} \varphi(x)$  表示流体的速度势响应， $U = e^{i\omega t} u(x)$  为  $\Omega_s$  的位移响应。令  $[e_{ij}] = [e_{ij}(u(x))]$ ， $[\tau_{ij}] = [\tau_{ij}(u(x))]$  为对应  $u(x)$ ，与时间  $t$  无关的小应变和小应力张量。略去流体自由表面重力波的影响，流—固耦合系统的控制方程是<sup>[2]</sup>(其中重复指标从1到3求和)：

$$\tau_{ij,j} + m\omega^2 u_i = 0, \quad \text{在 } \Omega_s \text{ 中} \tag{2.1}$$

$$\tau_{ij} \nu_j = 0, \quad \text{在 } \Gamma_r \text{ 上} \tag{2.2}$$

$$u_i = 0, \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \tag{2.3}$$

$$\tau_{ij} \nu_j = \rho\omega^2 \varphi \nu_i, \quad \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上} \tag{2.4a}$$

$$\varphi_{,j} \nu_j = -u_j \nu_j, \quad \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上} \tag{2.4b}$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0, \quad \text{在 } \Omega_w \text{ 中} \tag{2.5}$$

$$\varphi = 0, \quad \text{在 } \Gamma_f \text{ 上} \tag{2.6}$$

$$\varphi_{,j} \nu_j = 0, \quad \text{在 } \Gamma_b \cup \Gamma_r \text{ 上} \tag{2.7}$$

式中，“，”表示微分， $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  是边界  $\Gamma (= \Gamma_s \text{ 或 } \Gamma_w)$  上的单位外法线矢量， $m$  和  $\rho$  分别是结构和流体的质量密度， $\omega = \text{const}$ 。另外，由假定， $e_{ij}$  和  $\tau_{ij}$  满足下列条件

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= e_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ \tau_{ij} &= \tau_{ij}(u) = C_{ijkl} e_{kl}(u) \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

其中  $|C_{ijkl}| \geq C_0 > 0$ 。

记  $W_k = \{u \in [W^{k,2}(\Omega_s)]^3 : u_i = 0 \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上}\}$

$V_k = \{\varphi \in W^{k,2}(\Omega_w) : \varphi = 0 \text{ 在 } \Gamma_f \text{ 上}\}$

这里  $W^{k,2}$  是通常的 Sobolev 空间， $u \in [W^{k,2}(\Omega_s)]^3$  指  $u_i \in W^{k,2}(\Omega_s)$ ， $i = 1, 2, 3$ 。

注1 这里的  $W_1$  就是所谓的结构物几何相容虚位移场。

定理1 边值问题(2.1)~(2.7)有解  $\{u, \varphi\}$  的充要条件是恒等式

$$A(u, \varphi; v, h) = (Au, v)_s - \lambda m(u, v)_s - \lambda \rho(\varphi v, v)_w + (B\varphi, h)_w$$

$$-(u \cdot v, h)_0 = 0, \quad \forall v \in W_1, h \in V_1, \quad (2.9)$$

对所有  $v \in W_1$  和所有  $h \in V_1$  都成立, 其中

$$\left. \begin{aligned} (Au, v)_s &= \int_{\Omega_s} \tau_{ij}(u) e_{ij}(v) dx \\ (u, v)_s &= \int_{\Omega_s} u_i v_i dx \\ (\varphi v, v)_0 &= \int_{\Gamma_0} \varphi v_i v_i dS \\ (u \cdot v, h)_0 &= (u, h v)_0 \\ (B\varphi, h)_\omega &= \int_{\Omega_\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx, \quad \lambda = \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)'$$

**证明** 如果存在矢量  $\{u, \varphi\} \in W_1 \times V_1$  使方程(2.1)~(2.7)成立, 那么, 由散度定理并注意在交结面  $\Gamma_0$  上, 外法线矢量相对  $\Omega_s$  与相对  $\Omega_\omega$  将改变符号, 就可以得到 (2.9) 式. 另一方面, 如果恒等式 (2.9) 对所有  $v \in W_1$  和所有  $h \in V_1$  都成立, 那么, 令  $h = 0 \in V_1$ , 得

$$\begin{aligned} A(u, \varphi; v, 0) &= \int_{\Omega_s} \tau_{ij}(u) e_{ij}(v) dx - \int_{\Omega_s} m\omega^2 u_i v_i dx - \int_{\Gamma_0} \rho\omega^2 \varphi v_i v_i dS \\ &= \int_{\Gamma_\tau} \tau_{ij}(u) v_i v_j dS + \int_{\Gamma_0} (\tau_{ij}(u) v_j - \rho\omega^2 \varphi v_i) v_i dS \\ &\quad - \int_{\Omega_s} \left( \frac{\partial \tau_{ij}(u)}{\partial x_j} + m\omega^2 u_i \right) v_i dx = 0, \quad \forall v \in W_1 \end{aligned}$$

因此,  $\tau_{ij}(u) v_j = 0$ , 在  $\Gamma_\tau$  上  
 $\tau_{ij}(u) v_j - \rho\omega^2 \varphi v_i = 0$ , 在  $\Gamma_0$  上  
 $\tau_{ij,j} + m\omega^2 u_i = 0$ , 在  $\Omega_s$  内

同样地, 令  $v = 0 \in W_1$ , 从(2.9), 可推得(2.4b)、(2.5)和(2.7). 再由  $W_1$  和  $V_1$  的定义,  $u$  和  $\varphi$  还满足方程(2.3)和(2.6). 证毕.

**定义1** 若存在常量  $\lambda \in R$  以及矢量函数  $\{u, \varphi\} \neq \{0, 0\}$  使恒等式(2.9)成立, 那么,  $\lambda$  就称为边值问题(2.1)~(2.7)的特征值,  $\omega = \sqrt{\lambda}$  就称为耦联系统的固有频率.

### 三、特征值的存在性

根据[8]中定理8.12和[9]中定理5.2.11, 容易得到下面的

**引理1** 假定  $\Omega_\omega$  的边界  $\Gamma_\omega$  足够光滑 (例,  $\Gamma_\omega \in C^2$ ). 对给定的  $u \in W_1$ , 如果边值问题(2.4b)~(2.7)有解  $\varphi \in V_1$ , 那么,  $\varphi \in V_2$ , 并且

$$\|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega_\omega)} \leq c \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega_\omega)} + d, \quad c, d > 0 \quad (3.1)$$

**定理2** 0不是(2.9)的特征值.

**证明** 类似于定理1的证明, 可将(2.9)改写成下面的形式:

$$(Au, v)_s - \lambda [m(u, v)_s + \rho(\varphi v, v)_0] = 0, \quad u \in W_1, \quad \forall v \in W_1 \quad (3.2)$$

$$(B\varphi, h)_\omega - (u \cdot v, h)_0 = 0, \quad \varphi \in V_1, \quad \forall h \in V_1 \quad (3.3)$$

若 $\lambda=0$ 是特征值, 那么, 对所有 $v \in W_1$ , 有 $(Au, v)_s = 0$ . 特别地,  $(Au, u)_s = 0$ . 但是, 从(2.8)和Korn不等式, 又有

$$(Au, u)_s \geq c_1 \|u\|_{W_1}, \quad c_1 > 0 \quad (3.4)$$

因此,  $u=0$ , 代入(3.3), 便可得 $(B\varphi, \varphi)_w = 0$ . 这意味着 $\varphi=0$ , 因为, 由Poincare不等式, 只要 $\Gamma_f \neq \emptyset$ , 便有

$$(B\varphi, \varphi)_w \geq c_2 \|\varphi\|_{V_1}, \quad c_2 > 0 \quad (3.5)$$

因此, 由定义1,  $\lambda=0$ 不是特征值.

**定理3** 如果(2.9)的特征值 $\lambda$ 存在, 那么,  $\lambda > 0$ .

**证明** 假定存在 $\lambda \in R$ ,  $u \in W_1$ 以及 $\varphi \in V_1$ , 使恒等式(2.9), 或等价的(3.2)及(3.3)成立, 那么

$$\begin{aligned} (Au, u)_s - \lambda[m(u, u)_s + \rho(\varphi v, u)_0] &= 0 \\ (B\varphi, \varphi)_w - (u \cdot v, \varphi)_0 &= 0 \end{aligned}$$

由定义,  $\{u, \varphi\} \neq \{0, 0\}$ . 该条件与(3.5)意味着

$$m(u, u)_s + \rho(u \cdot v, \varphi)_0 = m(u, u)_s + \rho(B\varphi, \varphi)_w > 0$$

这与(3.4)式表明 $\lambda > 0$ .

**定理4** 假定 $\Omega_w$ 的边界 $\Gamma_w \in C^2$ . 那么, 满足定义1的特征值 $\lambda$ 存在.

**证明** 分三步证明定理.

(I) 选定 $u \in W_1$ , 由迹定理([10])可知, 函数 $u \cdot v|_{\Gamma_0} = Z(S) \in L_2(\Gamma_0)$ . 现在, 不等式(3.5)意味着存在唯一的 $\varphi = \varphi(Z) = \varphi(u) \in V_1$ 使(3.3)式成立, 且

$$\|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega_w)} \leq c_3 \|u\|_{[L_2(\Gamma_0)]^3} \quad (3.6)$$

其中 $0 < c_3 = \text{const}$ . 由引理1,  $\varphi(u) \in V_2$ 并满足(3.1). 将 $\varphi(u)$ 代入(3.2), 由恒等式

$$(au, v) \stackrel{\text{def}}{=} m(u, v)_s + \rho(\varphi(u)v, v)_0, \quad \forall v \in W_1 \quad (3.7)$$

定义的算子 $a$ 是对称的. 事实上, 函数 $\varphi(u)$ 和 $\varphi(v)$ 须满足恒等式(3.3), 即

$$(B\varphi(u), h)_w = (u, hv)_0, \quad \forall h \in V_1 \quad (3.8)$$

$$(B\varphi(v), h)_w = (v, hv)_0, \quad \forall h \in V_1 \quad (3.9)$$

在(3.8)中, 取 $h = \varphi(v)$ , 在(3.9)式中, 取 $h = \varphi(u)$ 并注意到定义(2.9)', 便知 $a$ 是对称的.

(II) 对任意给定的 $g \in W_1$ , 由不等式(3.4), 存在一个唯一的 $u \in W_1$ , 使

$$(Au, v)_s = (ag, v)_s = 0, \quad \forall v \in W_1$$

$$\text{及} \quad \|u\|_{W_1} \leq D_1 \|g\|_{[L_2(\Omega)]^3} + D_2 \|\varphi(g)\|_{L_2(\Gamma_0)} \quad (3.10)$$

式中 $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$ . 这定义一个映射

$$T: W_1 \rightarrow W_1, \quad u = Tg$$

由(3.10), 即

$$\|u\|_{W_1} = \|Tg\|_{W_1} \leq D(\|g\|_{[L_2(\Omega)]^3} + \|\varphi(g)\|_{L_2(\Gamma_0)}) \quad (3.11)$$

知 $T$ 是连续的. 由于 $(Au, v)_s = (u, Av)_s$ 以及 $(ag, v) = (g, av)$ ,  $T$ 是自伴随的. 我们要证明算子 $T$ 是全连续(即紧的)的.

令 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W_1$ 中的一个任意有界序列. 由嵌入定理<sup>[10]</sup>,  $\{g_n\}$ 在 $[L_2(\Omega_e)]^3$ 中有一个收敛的子序列 $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , 即 $\|g_{n_i} - g_{n_j}\|_{[L_2(\Omega)]^3}^2 \rightarrow 0, i, j \rightarrow \infty$ . 根据迹定理

$$\|g_{n_k}\|_{[L_2(\Gamma_0)]^3} \leq \beta \|g_{n_k}\|_{[W^{1,2}(\Omega)]^3}, \quad \beta > 0 \quad (3.12)$$

从(3.12)、(3.6)和引理1可知,  $\{\varphi(g_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $W^{2,2}(\Omega_w)$ 中的有界序列. 因此, 由同一嵌入

定理,它在 $W^{1,2}(\Omega_w)$ 中有一收敛的子序列 $\{\varphi_i(g_{n_k})\}_{i=1}^\infty$ .令 $\{g_{n_{k_i}}\}_{i=1}^\infty$ 是对应于 $\{\varphi_i(g_{n_k})\}_{i=1}^\infty$ 的序列,即 $\varphi_i(g_{n_k})=\varphi(g_{n_{k_i}})$ .再根据迹定理,就可得到一个关于 $\varphi(g)\in W^{1,2}(\Omega_w)$ 的,类似于(3.12)关于 $g\in[W^{1,2}(\Omega_s)]^3$ 的不等式.这表明,序列 $\{\varphi(g_{n_{k_i}})\}_{i=1}^\infty$ 也在 $L_2(\Gamma_0)$ 中收敛.将

$(g_{n_{k_i}} - g_{n_{k_j}})\in W_1$ 代入(3.11),就得到

$$\begin{aligned} \|u_{n_{k_i}} - u_{n_{k_j}}\|_{W_1} &= \|Tg_{n_{k_i}} - Tg_{n_{k_j}}\|_{W_1} \leq D(\|g_{n_{k_i}} - g_{n_{k_j}}\|_{[L_2(\Omega)]^3} \\ &\quad + \|\varphi(g_{n_{k_i}}) - \varphi(g_{n_{k_j}})\|_{L_2(\Gamma_0)}) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

对所有充分大的 $i$ 和 $j$ 成立,其中, $\varepsilon$ 是任意给定的正数.因此,当序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 有界时,序列 $\{u_n = Tg_n\}_{n=1}^\infty$ 就有一个收敛的子序列.这说明 $T$ 是紧的.

(II) 由算子 $T$ 的定义,恒等式(3.2)等价于

$$(u, v)_A - \lambda(Tu, v)_A = 0, \quad u \in H_A, \quad \forall v \in H_A \quad (3.13)$$

其中 
$$(u, v)_A \stackrel{\text{def}}{=} (Au, v)_s, \quad u, v \in W_1 \quad (3.14)$$

$H_A$ 是由 $W_1$ 中的元素组成并根据(3.14)内积 $(\cdot, \cdot)_A$ 所得到的Hilbert空间.

由定理2,可将(3.13)式改写成如下的形式

$$\mu(u, v)_A - (Tu, v)_A = 0, \quad u \in H_A, \quad \forall v \in H_A$$

从(I)、(II)并回忆线性紧算子的谱理论,便知,算子 $T$ 的特征值 $\mu$ 存在.从而 $\lambda=1/\mu$ 以及 $u \neq 0$ 满足(3.2)和(3.3)式.证毕.

#### 四、有效数值解

除了有可能的有限多个角点外,实际中几乎所有流体域的边界都是 $C^2$ 类的.定理4保证了这类流体与结构耦联振动固有频率的存在性.由定理3,所有的固有频率值 $\omega = \sqrt{\lambda}$ 均为正实数.若把(3.3)式看作为附加的约束条件,所有特征值 $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots$ )将由以下公式确定

$$\lambda_1 = \min_{u \in W_1, u \neq 0} \frac{(Au, u)_s}{m(u, u)_s + \rho(\varphi v, u)_0}, \quad \varphi \in V_1 \quad (4.1a)$$

$$\text{s. t. } : (B\varphi, h)_w - (u \cdot v, h)_0 = 0, \quad \forall h \in V_1 \quad (4.1b)$$

$$\lambda_i = \min_{u \in W_1, u \neq 0} \frac{A(u, u)_s}{m(u, u)_s + \rho(\varphi v, u)_0}, \quad \varphi \in V_1 \quad (4.2a)$$

$$\text{s. t. } : (B\varphi, h)_w - (u \cdot v, h)_0 = 0, \quad \forall h \in V_1 \quad (4.2b)$$

$$(au_i, u) = 0, \dots, (au_{i-1}, u) = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (4.2c)$$

在(4.2c)式中, $u_j$ 是对应于特征值 $\lambda_j$ 的特征函数,  $(au_j, u) = m(u_j, u)_s + \rho(\varphi(u_j)v, u)_0$ .

显然,与求解单一结构在真空中自由振动的特征值相比较,求耦联振动的特征值之所以困难,就在于(4.1)和(4.2)式中多了附加的约束条件(4.1b)和(4.2b).我们的目的就是要消除这些约束条件进而把耦联振动分析转化为单一结构物的自由振动分析.

可以看到,(4.1)和(4.2)式分别等价于

$$\lambda_1 = \min (Au, u)_s, \quad u \in W_1 \quad (4.3a)$$

$$\text{s. t. } : (au, u) = m(u, u)_s + \rho(\varphi v, u)_0 = 1, \quad \varphi \in V_1 \quad (4.3b)$$

$$(B\varphi, h)_w - (u \cdot v, h)_0 = 0, \quad \forall h \in V_1 \quad (4.3c)$$

$$\lambda_i = \min(Au, u)_s, \quad u \in W_1 \quad (4.4a)$$

$$\text{s. t. } : (au, u) = 1, \quad \varphi \in V_1 \quad (4.4b)$$

$$(B\varphi, h)_w - (u \cdot v, h)_0 = 0, \quad \forall h \in V_1 \quad (4.4c)$$

$$(au, u_1) = \dots = (au, u_{i-1}) = 0 \quad (i=2, 3, \dots) \quad (4.4d)$$

现在讨论如何近似求解(4.3)和(4.4)式。首先从(4.3)式入手。

令 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 分别是 $W_1$ 和 $V_1$ 中线性无关的一组基, 即, 对任意的 $u \in W_1$ 和任意的 $\varphi \in V_1$ , 分别存在 $\alpha_i \in R^3$ 和 $\beta_i \in R$ ,  $i=1, 2, \dots$ , 使

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \quad (4.5)$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \psi_i \quad (4.6)$$

用 $\bar{W}_n$ 和 $\bar{V}_n$ 分别表示由基 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 和 $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ 张成的线性空间。任意 $u_n \in \bar{W}_n$ 和 $\varphi_n \in \bar{V}_n$ 可以表作为

$$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i, \quad (\alpha_i \in R^3, i=1, 2, \dots, n) \quad (4.7)$$

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \psi_i \quad (\beta_i \in R, i=1, 2, \dots, n) \quad (4.8)$$

代替求解(4.3a)~(4.3c)式, 里兹法导致求解以下近似问题

$$\lambda_1^{(n)} = \min(Au_n, u_n)_s, \quad u_n \in \bar{W}_n \quad (4.9a)$$

$$\text{s. t. } : m(u_n, u_n)_s + \rho(\varphi_n v, u_n)_0 = 1, \quad \varphi_n \in \bar{V}_n \quad (4.9b)$$

$$(B\varphi_n, h_n)_w - (u_n \cdot v, h_n)_0 = 0, \quad \forall h_n \in \bar{V}_n \quad (4.9c)$$

首先, 得消去约束(4.9c)并找出 $\varphi_n$ 关于 $u_n$ 的显式关系。当不等式(3.5)成立时, 方程(4.3c)或(4.4c)对任意给定的 $u \in W_1$ 有唯一解 $\varphi \in V_1$ 的充要条件是二次泛函

$$F(\varphi) = 0.5(B\varphi, \varphi)_w - (u \cdot v, \varphi)_0 = \min, \quad \varphi \in V_1 \quad (4.10)$$

有唯一解。因此, 对任意给定的 $u_n \in \bar{W}_n$ 并假定 $u_n$ 有形如(4.7)表达式, 就可以从(4.10)式得到 $\varphi_n$ 的系数 $\beta_i$ :

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \alpha_j \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.11)$$

其中, 系数 $\gamma_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) 仅仅依赖于基函数 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 。对选定的基 $\{\xi_i\}$ 和 $\{\psi_i\}$ ,  $\gamma_{ij}$ 由下式

$$\begin{aligned} F(\varphi_n) &= \frac{1}{2} (B\varphi_n, \varphi_n)_w - (u_n \cdot v, \varphi_n)_0 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j (\beta \psi_i, \psi_j)_w - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (\xi_i \cdot v, \psi_j)_0 \\ &= \min \end{aligned}$$

唯一确定, 它给出

$$[\gamma_{ij}] = [(B\psi_i, \psi_j)_w]^{-1} [(\xi_i \cdot v, \psi_j)_0] \quad (4.12)$$

然后, 利用拉格朗日乘子法, 可将约束极小值问题 (3.12a)~(3.12b) 转化成下列无约束问题

$$\{(Au_n, u_n)_s - \lambda[(au_n, u_n) - 1]\} = \min \quad (4.13)$$

式中  $(au_n, u_n) = m(u_n, u_n)_s + \rho(\varphi_n v, u_n)_0$ ,  $\varphi_n = \varphi_n(u_n)$  由 (4.8) 和 (4.11) 式给出. 从 (4.13) 式, 得到标准的线性代数特征值问题的方程

$$[(A\xi_i, \xi_j)_s] \{\alpha\} = \lambda [(a\xi_i, \xi_j)] \{\alpha\} \quad (4.14)$$

以及  $(au_n, u_n) = 1 \quad (4.15)$

(4.14) 式中  $(a\xi_i, \xi_j) = m(\xi_i, \xi_j)_s + \rho(\varphi_n(\xi_i)v, \xi_j)_0$

$$\varphi_n(\xi_i) = \sum_{j=1}^n \gamma_{ji} \psi_j \quad (4.16)$$

(4.14) 式的非平凡解给出特征方程 (若  $\lambda$  换为  $\omega^2$ , 又为频率方程)

$$\det([(A\xi_i, \xi_j)_s] - \lambda[(a\xi_i, \xi_j)]) = 0 \quad (4.17a)$$

由于矩阵  $[(A\xi_i, \xi_j)_s]$  和  $[(a\xi_i, \xi_j)]$  是对称的, 方程 (4.17a) 给出  $n$  个实特征值

$$\lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)} \quad (4.17b)$$

**定理5** 假定条件 (4.15) 成立. 那么, (4.17b) 中的  $n$  个值均是正的.

**证明** 不失一般性, 假定基  $\{\xi_i\}$  这样选取, 使

$$(A\xi_i, \xi_j)_s = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.18)$$

那么, 方程 (4.14) 变为

$$\alpha_i - \lambda \sum_{j=1}^n (a\xi_i, \alpha_j \xi_j) = \alpha_i - \lambda (a\xi_i, u_n) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.19)$$

将 (4.19) 从 1 到  $n$  相加, 就有

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda \sum_{i=1}^n (a(\alpha_i \xi_i), u_n) = \lambda > 0$$

对所有  $\lambda = \lambda_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

**注2** 由于矩阵  $[(a\xi_i, \xi_j)]$  是正定的, 定理5的条件总能满足.

**注3** 若  $\rho=0$ , 那么, 从 (4.14) 式得到的  $\lambda$  就是结构在真空中自由振动的特征值. 对耦联系统, 即, 对  $\rho \neq 0$ , 当 (4.11) 式中的系数  $\gamma_{ij}$  由 (4.12) 式确定并代入 (4.16) 式中后, 余下的计算量就将与  $\rho=0$  时的计算量相当. 由于 (4.12) 式的求解比从 (4.14) 式解特征值  $\lambda$  要容易得多并且 (4.12) 和 (4.14) 的解可以分步进行, 这里提供的转化方法对比直接求解<sup>[6]</sup>, 不仅可以大大简化分析而且可以大大减少对机器内存的要求.

## 五、数值解的收敛性

我们来考虑上述近似解的收敛性, 它由以下定理予以保证:

**定理6** (4.17b) 中的近似特征值收敛于 (4.1) 和 (4.2) 式给出前  $n$  个特征值, 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)} = \lambda_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

为证明这一定理, 回忆线性算子理论中两个结论:

**引理2** 假定  $\{T_n\}$  是某 Hilbert 空间中一个紧算子序列且一致收敛于算子  $T$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$$

如果  $\mu_k$  是算子  $T$  的第  $k$  个特征值:

$$u - \mu T u = 0, \quad u \in D(T)$$

$\mu_k^{(n)}$  是算子  $T_n$  的第  $k$  个特征值:

$$u_n - \mu^{(n)} T_n u_n = 0, \quad u_n \in D(T_n)$$

那么,  $\mu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k^{(n)}$

**引理3** 假定  $X$  和  $Y$  是两个模空间,  $T: X \rightarrow Y$  是一个线性算子. 若  $T$  是有界的且  $T(X)$  的维数有限, 即,  $\dim T(X) < \infty$ , 则  $T$  是紧的.

**定理6的证明** 从 (3.13) 式已知, 原问题 (3.2) 和 (3.3) 等价于下列问题

$$u - \mu T u = 0, \quad u \in H_A$$

其中  $H_A$  见定理4证明的第(III)步,  $T: H_A \rightarrow H_A$  是一个紧算子. 因此,  $W_1$  中的基  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$  也是  $H_A$  中的一个基. 假定它满足正交条件(4.18). 那么, 对任意的  $u \in H_A$ , 有

$$T u = \sum_{i=1}^{\infty} (T u, \xi_i)_A \xi_i \quad (5.1)$$

其中, 由定义,  $(T u, \xi_i)_A = (a u, \xi_i) = m(u, \xi_i)_0 + \rho(\varphi(u) v, \xi_i)_0$ . 令  $u$  有形如 (4.6) 的表达式,  $\varphi$  由 (4.10) 式确定. 对  $n \geq 1$ , 按以下公式定义算子  $T_n$ :

$$T_n u = \sum_{i=1}^n [m(u, \xi_i)_0 + \rho(\varphi_n(u) v, \xi_i)_0] \xi_i \quad (5.2)$$

其中  $\varphi_n$  有形如 (4.8) 的表达式并从 (4.10) 式在  $\bar{V}_n$  中确定. 由 (5.2) 定义的算子  $T_n$ , 对所有  $n \geq 1$  都是紧的: 显然,  $\dim(T_n(X)) = n < \infty$ , 由于  $\{\xi_i\}$  是  $H_A$  中的一个基,  $\|\xi_i\| < \infty$ , 此

外,  $\varphi_n(u)$  是线性、有限维的, 从而,  $\|\varphi_n(u)\| \leq c \|u\|$ . 所以,  $\|T_n u\| \leq \sum_{i=1}^n (m + \rho c) \|\xi_i\|^2 \cdot \|u\|$

$= c_1 \|u\|$ . 据引理3,  $T_n$  对所有  $n \geq 1$  都是紧的. 我们要证明:  $T_n$  一致收敛于  $T$ .

从 (5.1) 和 (5.2), 有

$$\|T u - T_n u\| \leq \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (T u, \xi_i)_A \xi_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \rho(\varphi(u) - \varphi_n(u), \xi_i \cdot v)_0 \xi_i \right\| \quad (5.3)$$

我们来估计 (5.3) 式右边的值. 第一项很容易实现. 事实上, 由于 (5.1) 式左边级数项一致收敛于右边的  $T u$  并且  $T$  是紧的, 那么, 对给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使对所有的  $u \in H_A$ , 下式

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (T u, \xi_i)_A \xi_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|} \|T u\| \leq \varepsilon \|u\|, \quad \forall n \geq N \quad (5.4)$$

成立. 下面估计第二项.

由引理1, 从 (4.10) 式确定的函数  $\varphi(u) \in V_2 \subset W^{2,2}(\Omega_w)$ . 因此, (4.6) 式右边级数项在  $V_1$  中绝对收敛. 这表明, 存在实数  $p > 0$ , 使

$$|\beta_n| \leq M \|u\| / n^{1+p} \quad (5.5)$$



对充分大的 $n$ , 比如 $n \geq N$ 成立, 这里,  $M$ 是某个正常量. 另一方面, 根据里兹法确定的 $\varphi_n(u)$ 就是级数(4.6)的前 $n$ 项部分和, 即

$$\varphi(u) - \varphi_n(u) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i \psi_i \quad (5.6)$$

由迹定理, 序列 $\{\nu \cdot \xi_i(S)\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\psi_i(S)\}_{i=1}^{\infty}$ 均是 $L_2(\Gamma_0)$ 中的基, 即

$$\overline{\text{span}} \{\nu \cdot \xi_i(S)\}_{i=1}^{\infty} = L_2(\Gamma_0) = \overline{\text{span}} \{\psi_i(S)\}_{i=1}^{\infty}$$

因此, 每一个 $\psi_i(S)$ 均可表作为序列 $\{\nu \cdot \xi_i(S)\}$ 的线性组合. 假定 $V_1$ 中的基 $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 这样选取, 使

$$|(\psi_j(S), \nu \cdot \xi_i(S))_0| = \begin{cases} 1, & j=i \\ \leq \|\xi_i\|/j, & j \neq i \end{cases} \quad (5.7)$$

于是, 从不等式(5.5)、(5.6)和(5.7), 就有

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \rho(\varphi(u) - \varphi_n(u), \xi_i \cdot \nu)_0 \xi_i \right\| &= \rho \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j (\psi_j(S), \nu \cdot \xi_i(S))_0 \xi_i \right\| \\ &\leq \rho \sum_{i=1}^n \frac{\|\xi_i\|^2}{(n+1)^{1+p/2}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{M \|u\|}{j^{p/2+1}} \leq \frac{c}{(n+1)^{p/2}} \|u\| \\ &\leq \varepsilon \|u\|, \quad n \geq N \end{aligned} \quad (5.8)$$

结合不等式(5.4)、(5.8)和(5.3)就有, 对 $n \geq N$ , 下列不等式

$$\|Tu - T_n u\| = \|(T - T_n)u\| \leq 2\varepsilon \|u\|, \quad \forall u \in H_A$$

成立. 这表明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$ .

根据引理2, 只需要验证 $T_n$ 的特征值与方程(4.14)所确定的特征值完全相同就可以了.

由于 $T_n(H_A)$ 的维数是有限的, 满足特征方程

$$u \in H_A, \quad u - \lambda T_n u = 0, \quad \lambda \neq 0 \quad (5.9)$$

的维数也必然是有限维的. 同前, 取 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $H_A$ 中线性无关的一组基. 令 $\overline{W}_n = \text{span}\{\xi_1,$

$\dots, \xi_n\}$ . 那么, 方程(5.9)有解的充要条件是存在函数 $u_n \in \overline{W}_n$ ,  $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ , 使

$$(u_n - \lambda T_n u_n, h_n)_A = 0 \quad (5.10)$$

对所有 $h_n \in \overline{W}_n$ 都成立. 恒等式(5.10)成立的充要条件是对每一个 $i=1, 2, \dots, n$ , 都有

$$(u_n - \lambda T_n u_n, \xi_i)_A = 0 \quad (5.11)$$

回忆 $(u_n, \xi_i)_A = (Au_n, \xi_i)_0$ ,  $(T_n u_n, \xi_i)_A = m(u_n, \xi_i)_0 + \rho(\varphi_n(u_n) \nu, \xi_i)_0$ , 我们看到, 方程(5.11)分别与(4.14)恒等. 证毕.

## 六、一个通用算法

当今, 采用数值方法对水中结构附连水质量影响作振动分析, 两种最常见的方案是: (1)应用边界元技术计算流体的附连水质量影响(如[15]); (2)采用有限元方法计算(例如, 见[16]). 然而, 无论哪一种方案都不能单独用于形成一种通用的分析算法. 为了实现边界元解, 首先必须获得基本解, 因此, 边界元方法难以用于形成一种分析无界流场与结构耦联振

动的通用算法, 因为, 无界域流场的基本解彼此差别很大。同样, 这种无限域流场也很难用有限元法来自动模拟, 除非其中某(些)个单元区域本身又是无限的。

不过, 有限元法的确又是处理复杂结构的最有力工具, 而边界元法则最适合于场问题的求解。另外, 如果待分析问题的几何边界十分规则并且所指定的边界条件较为简单, 那么, 里兹法又是分析这类问题的最简易的方法之一。基于这些考虑, 下面给出一个采用有限元、边界元和里兹法相混合分析流—固耦合问题的通用算法。

首先, 将结构域 $\Omega_s$ 离散为 $N_s$ 个有限元。令 $\{u_i\}$ 表示离散后的节点位移向量,  $[E(x)]$ 则表示对应位移 $u(x)$ 的插值函数矩阵, 即

$$u(x) = [E(x)]\{u_i\}$$

$$\text{那么, } (Au, u)_s = \int_{\Omega_s} \tau_{ij}(u) e_{ij}(u) dx = \{u_i\}^T [K] \{u_i\}$$

$$m(u, u)_s = \int_{\Omega_s} \rho u(x)^T u(x) dx = \{u_i\}^T [M_s] \{u_i\}$$

这里,  $[K]$ 和 $[M_s]$ 分别是结构的总刚度矩阵和总质量矩阵, 可以在任何一本有限元结构分析参考书中找到它们的现成结果。

再考虑流场解。不失一般性, 假定流场域 $\Omega_w$ 无界。进而, 还假定 $\Omega_w$ 可以由 $\Gamma_R$ 分成两部分(见图1)。第一部分位于 $\Gamma_R$ 之内, 称为影响区, 是有界的(若 $\Omega_w$ 有界, 令 $\Gamma_R = \Gamma_r$ ); 第二部分在 $\Gamma_R$ 之外, 称为衰弱区, 其边界是规则的。在衰弱区内, 可以对速度势方程(2.5)进行分离变量解, 并使其解满足除 $\Gamma_R$ 之外的所有边界条件, 这是能够实现的, 因为其边界是规则的。在图1所示的衰弱区内, 速度势满足<sup>[10]</sup>

$$\varphi^D = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{ij} \cos(i\theta) + B_{ij} \sin(i\theta)) K_i(\lambda_j r) \cos(\lambda_j x_3)$$

其中 $x_3$ 是纵向坐标, 向上为正,  $r$ 和 $\theta$ 是平面 $(x_1, x_2)$ 内的极坐标,  $\lambda_j = (j+1/2)\pi/d$ ,  $K_i$ 是第二类改进的贝塞尔函数,  $A_{ij}$ 和 $B_{ij}$ 则是待定常量, 由 $\Gamma_R$ 上的连续性条件确定。作为近似解, 可以取

$$\begin{aligned} \varphi_N^D &= \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} (A_{ij} \cos(i\theta) + B_{ij} \sin(i\theta)) K_i(\lambda_j r) \cos(\lambda_j x_3) \\ &= \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i(x) \end{aligned}$$

在影响区内, 用边界元法求解速度势。假定离散后的边界元节点总数为 $NNW$ 。那么, 关于 $NNW$ 个节点的整个方程组可以用矩阵表示为(参见[11], p.53),

$$[H_{ij}]\{\varphi_j\} = [G_{ij}]\{q_j\} \quad (6.1)$$

其中 $[H_{ij}]$ 和 $[G_{ij}]$ 是系数矩阵, 依不同的边界元模式(线性元或二次元)而有异,  $\varphi_j$ 和 $q_j$ 是 $\varphi$ 和 $\partial\varphi/\partial\nu$ 在 $j$ 节点的取值。用 $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$ 表示第 $j$ 个节点的坐标, 那么,  $\varphi_j$ 和 $q_j$ 满足以下关系

$$\begin{aligned} q_j &= u(x^j) \cdot \nu = [E(x^j)]\{u_i\} \cdot \nu, \quad \text{在 } \Gamma_a \text{ 上} \\ q_j &= 0, \quad \text{在 } \Gamma_b \text{ 上} \end{aligned}$$

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i(x^j), \quad q_j = \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial \psi_i}{\partial r}(x^j), \quad \text{在 } \Gamma_R \text{ 上}$$

$$\varphi_j = 0, \quad \text{在 } \Gamma_f \text{ 上}$$

将全部节点集分为不相交的子集  $I_0, I_B, I_F$  和  $I_R$  后, 可将方程 (6.1) 改写为

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in I_0} H_{ij} \varphi_j + \sum_{j \in I_B} H_{ij} \varphi_j + \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j \in I_R} \left\{ H_{ij} \psi_k(x^j) - G_{ij} \frac{\partial \psi_k}{\partial r}(x^j) \right\} \right) - \sum_{j \in I_F} G_{ij} q_j \\ & = \sum_{j \in I_0} G_{ij} \{e(x^j)\}^T \{u_k\}, \quad (i=1, \dots, NNW) \end{aligned} \quad (6.2)$$

其中  $\{e(x^j)\}^T = [E(x^j)] \cdot \nu$ . 从 (6.2) 式, 得到

$$\{\varphi_j\}_{j \in I_0} = [\gamma_{jk}] \{u_k\}$$

令函数  $\varphi$  在  $\Gamma_0$  上的插值函数矢量  $\{T_j(x)\}$  即,

$$\varphi(x)|_{x \in \Gamma_0} = \{T_j(x)\}^T \{\varphi_j\}_{j \in I_0} = \{T_j(x)\}^T [\gamma_{jk}] \{u_k\}$$

那么

$$\begin{aligned} \rho(\varphi \nu, u)_0 &= \rho(\varphi, u \cdot \nu)_0 = \rho \int_{\Gamma_0} \varphi(x) u(x) \cdot \nu dS \\ &= \{u_i\}^T [M_w] \{u_i\} \end{aligned}$$

这里

$$[M_w] = \rho [\gamma_{jk}]^T \int_{\Gamma_0} \{T_j(x)\} \{e(x)\}^T dS$$

可以当作总的附连水质量矩阵.

得到了  $[K], [M_s], [M_w]$ , 流-固耦联振动的固有频率  $\omega$  由以下频率方程确定

$$F(\omega) = \det([K] - \omega^2 \{[M_s] + [M_w]\}) = 0$$

## 七、算 例

为了说明上述算法的有效性, 考虑一个重力水-坝耦合系统, 见图2. 坝处理为线弹性悬臂梁, 水沿正的  $x$  轴方向无限. 当  $a=b$  和  $d=H$  时, 郑哲敏和马宗魁于1959年得到了解析解<sup>[14]</sup>. 用  $I$  表示  $a=b$  时的弯曲刚度,  $E$  和  $m$  表示坝的杨氏模量和质量密度,  $\rho$  表示水的质量密度. 于是

$$(Au, u)_s = E \int_0^H I \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 dy$$

$$m(u, u)_s = \int_0^H m u^2 dy$$

$$\rho(\varphi \nu, u)_0 = \rho(u \cdot \nu, \varphi)_0 = \rho \int_0^H u \varphi|_{x=0} dy$$

将梁离散为  $N_s$  个等长单元, 长度  $l=H/N_s$ , 共有  $2 \times (N_s+1)$  个节点位移  $\{u\} = \{u_1, \theta_1, \dots, u_{N_s+1}, \theta_{N_s+1}\}^T$ , 其中  $u_i$  和  $\theta_i$  是第  $i$  个节点的线位移和角位移. 取三次完全多项式为单元插值函数.  $i$  单元上的挠度  $u(y)$  可以表作为

$$u(y) = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4\} \{u_i \ \theta_i \ u_{i+1} \ \theta_{i+1}\}^T$$

其中,

$$N_1(y) = 1 - 3((y - (i-1)l)/l)^2 + 2((y - (i-1)l)/l)^3$$

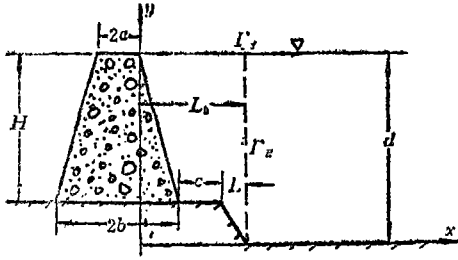


图2 重力水—坝耦合系统

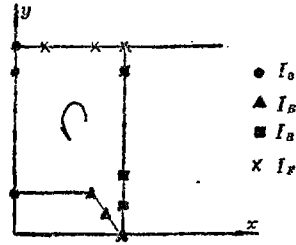


图3 离散模型

$$N_2(y) = y - (i-1)l - 2(y - (i-1)l)^2/l + (y - (i-1)l)^3/l^2$$

$$N_3(y) = 3((y - (i-1)l)/l)^2 - 2((y - (i-1)l)/l)^3$$

$$N_4(y) = -(y - (i-1)l)^2/l + (y - (i-1)l)^3/l^2$$

从而,  $(Au, u)_s = E \sum_{i=1}^{N_s} I_i \int_{(i-1)l}^{il} (u'')^2 dy$

$$m(u, u)_s = \sum_{i=1}^{N_s} m_i \int_{(i-1)l}^{il} u^2 dy$$

考虑流场域。令  $x \leq L_0$  为影响区,  $x > L_0$  为衰弱区。在衰弱区内, 对速度势取近似式

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^N \beta_i \exp[-\lambda_i x] \cos \lambda_i y$$

其中  $\lambda_i = (i-1/2)\pi/H$ 。在影响区内, 应用线性元离散其边界, 参见图3。假定  $I_0, I_B, I_R$  和  $I_F$  中元素分别有  $N_{I0}, N_{IB}, N_{IR}$  和  $N_{IF}$  个, 其中  $N_{I0} = N_s + 1$ 。取  $N_s = 4, N_{IR} = 3, N_{IB} = 5, N_{IF} = 13, c = 0.01, L = 1.0, a = 0.1, H = 1.0$ , 对应其余不同参数下的计算结果见表1和表2以及图4, 其中,  $\omega_1$  是水坝耦合系统的基频,  $\omega_{01} = ((1.8751)^4 EI / (mH^4))^{1/2}$  是等直梁 ( $a=b$ ) 在真空中自由振动的基频。

表 1

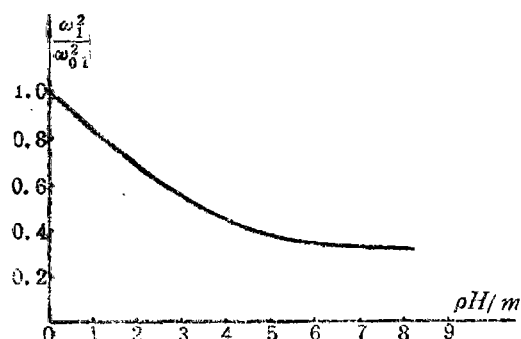
( $b/a=1.0, d=H$ )

$\frac{\rho H}{m}$	$\omega_1^2 / \omega_{01}^2$		
	解析解([2], [14])	本 文	相对误差
0.5	0.8961	0.8971	0.11%
1.0	0.8104	0.8133	0.36%
2.0	0.6807	0.6854	0.69%
3.0	0.5869	0.5893	0.89%

表 2

( $\rho H/m=0.5$ )

	$\omega_1^2 / \omega_{01}^2$					
	$b/a=1.0$	$b/a=1.2$	$b/a=1.4$	$b/a=1.6$	$b/a=1.8$	$b/a=2.0$
$d=H$	0.8971	1.2680	1.6912	2.1608	2.6710	3.2167
$d=1.5H$	1.0227	1.4359	1.9051	2.4234	2.9850	3.5848

图 4 ( $b/a=1.0, d=H$ )

## 八、结 论

本文证明了线弹性结构与理想流场耦联振动解的存在性以及数值解的收敛性。综合里兹法、有限元和边界元，给出了一种通用算法。基于该算法，有可能编制一个分析流—固耦合系统通用程序。一旦程序实现，那么，自动分析众多浸入水中或浮于水上结构的动态问题就不难了。根据本文算法所得到的一些数值结果与解析解符合甚好。

## 参 考 文 献

- [1] Yamamoto, Y., A variational principle for a solid-water interaction system, *Internat. J. Engrg. Sci.*, 19 (1981), 1757—1763.
- [2] 黄玉盈, 液固耦联系统固有频率的一个变分式, 华中工学院学报, 力学专辑, 13(1) (1985), 91—96.
- [3] Zienkiewicz, O.C. and P. Bettess, Fluid-structure dynamic interaction and wave forces: An introduction to numerical treatment, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 13(1) (1978), 1—16.
- [4] Mathews, I.C., Numerical techniques for three-dimensional steady-state fluid-structure interaction, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 79(5) (1986), 1317—1325.
- [5] Jenniigs, A., Added mass for fluid-structure vibration problems, *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 5(9) (1985), 817—830.
- [6] Kulak, R. F., Three-dimensional fluid-structure coupling in transient analysis, *Comput. & Structures*, 21(3) (1985), 529—542.
- [7] Sharan, S.K. and G.M.L. Gladwell, General method for the dynamic response analysis of fluid-structure systems, *Comput. & Structures*, 21(5) (1985) 937—943.
- [8] Gilbarg, D. and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag-New York (1977).
- [9] Necas, J., *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*, Leipzig (1983).
- [10] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York-San Francisco-London (1975).
- [11] Brebbia, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Dentech Press, London (1978).

- [12] Necas, J. and I. Hlavacek, *Mathematical Theory of Elastico-Plastic Bodies: An Introduction*, Amsterdam, Oxford-New York (1981).
- [13] Kantorovich, L.V. and G.P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press, Oxford-New York (1982).
- [14] 郑哲敏、马宗魁, 悬臂梁在一侧受有液体作用时的自由荡动, *力学学报*, 3(2) (1959), 111—119.
- [15] DeRuntz and Geers, Added mass computation by the boundary element method, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 12 (1978), 531—549.
- [16] Hunt, Knittel and Barach, Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 55 (1974), 269—280.

## On the Coupled Vibration of an Ideal Fluid with a Linear Elastic Structure

Huang Zheng-ming

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

### Abstract

The purpose of this paper is to analyse theoretically and numerically the coupled vibration of an ideal fluid with a linear elastic structure. It is proved in the paper that the natural frequencies of the coupled vibration do exist and are all real positive. The paper presents an efficient method to transform a coupled fluid-structure system to the structure with added mass and the vibrational analysis of the former is replaced by the latter in vacuum only. Numerical solution is outlined for the transformed problem and a compact frequency equation is derived in which fluid variables do not appear. This simplifies the analysis significantly. A convergent proof has been given to guarantee the reliability of the solution. The paper also offers a general algorithm combined with Ritz method, boundary element method, and finite element method to analyse the transformed problem. Based on this algorithm, one can apply a known structural analysing program, with a little modification, to solve many different kinds of fluid-structure coupling problems. Some numerical results are given to show the efficiency of the algorithm.

**Key words** fluid-structure interaction, existence, convergence, general algorithm