

弹性地基上的自由边矩形板*

成祥生

(上海 同济大学, 1988年5月3日收到)

摘 要

本文讨论了在弹性地基上的自由边矩形板的弯曲问题. 我们讨论了两种情形, 诸如在板的中心受到一集中力作用和板的四个角点上各受到一相等的集中力作用. 文中选择了一个挠曲函数, 它不但能满足所有自由边上的全部几何边界条件, 而且也满足所有的内力边界条件. 同时, 我们应用了变分法, 从而得到了较好的近似解答.

关键词 矩形薄板 弯曲 Галёркин 变分法 挠曲函数

一、引 言

在弹性地基上的四边都自由的矩形板的弯曲问题是一个很麻烦的问题. 因为从板的四阶的弹性曲面的偏微分方程去求精确解, 不仅必须使解答满足板弯曲面的微分方程, 还要满足全部自由边上的几何边界条件和内力边界条件, 这是非常困难的. 曾研究过这个问题的有 Власов 等人^[1~8], 其中文献[1]应用了弹性半空间的弹性地基理论, 即所谓双参数弹性地基理论, 并求解板的弯曲面的微分方程. 文献[2]使用了 Галёркин 法, 并提出了用一个二重余弦级数作为挠曲函数, 该函数不仅能分离变量, 并且每一个函数的本身及其一至三阶导数在板的全部自由边上都等于零, 但计算比较复杂. 之后, 文献[3]使用了迭加法, 分别解35阶和51阶的联立代数方程, 从而得到了解答. 文献[4]是应用了变分法, 文献[6]应用了弹性半空间的弹性地基理论, 求出在各种边界条件下的基本解, 再使用了迭加法, 该文对两组级数分别各取到50项, 从而求得较一般的解答. 在文献[8]中则应用了能量法(或变分法). 以上的各种解法, 有的比较简单, 但大部份都很复杂. 本文应用了伽辽金变分法对弹性地基上的自由边矩形板的弯曲问题进行研究. 我们选择了一个挠曲函数, 它不但能满足在薄板的全部自由边上的合成横向剪力为零的条件, 而且还能满足在所有自由边上弯矩为零的条件, 而最后在挠曲函数中的独立的系数只有两个, 计算比较简便. 文中举了两个例题, 一个是在板的中心受一集中力作用, 另一个则是在板的四个角点上分别受到相等的集中力作用. 最后将考察作用于板上的总荷载和地基上的总反力相平衡的结果来检验所得解答的可靠性.

* 钱伟长推荐.

二、解 法

设有一弹性矩形薄板, 置于弹性地基上, 薄板的四边自由, 如图1所示. 对于各向同性的矩形板, 它的弹性曲面的微分方程是^[9]

$$\nabla^4 w + kw/D - q/D = 0 \quad (2.1)$$

其中 ∇^4 为双谐算子, D 为板的弯曲刚度, 并且 $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$. E , h , μ 分别为板的材料的弹性模量, 厚度和泊松比; k 为弹性地基系数, q 为分布荷载的集度.

如果是正交各向异性板, 则(2.1)式应以下式来代替^[10]

$$D_1 w_{xxxx} + 2D_3 w_{xxyy} + D_2 w_{yyyy} + kw - q = 0 \quad (2.2)$$

其中 D_1 , D_2 , D_3 的意义也参见[10].

由于薄板四边自由, 若要从薄板的弹性曲面的四阶偏微分方程(2.1)或(2.2)去求板的弯曲面的精确解是比较困难的, 因为这解答不仅必须要满足该微分方程并且还要满足全部自由边上的几何边界条件和内力边界条件, 往往很难成功.

如果我们能找到一个薄板弯曲面的挠曲函数, 能满足所有自由边上的边界条件, 即几何边界条件和内力边界条件, 但该函数不一定能满足板弯曲面的微分方程, 这时我们可应用伽辽金法, 从所谓伽辽金变分方程组去求. 例如对于各向同性薄板, 就是^[9]

$$\iint (\nabla^4 w + \frac{k}{D} w - \frac{q}{D}) w_m dx dy = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (2.3)$$

其中 w 为挠曲函数, 而 w_m 为形函数, 它仅仅是坐标的函数. 从方程组(2.3)可得到关于挠曲函数中各个独立系数的一个线性代数方程组, 由它可求出各个系数.

对于正交各向异性板, 伽辽金变分方程组就成为^[10]

$$\iint (D_1 w_{xxxx} + 2D_3 w_{xxyy} + D_2 w_{yyyy} + kw - q) w_m dx dy = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

以上所有二重积分都遍及板的中间.

从伽辽金变分方程组所求得的答案是近似的, 因为它仅仅在某种意义上是“平均地”满足板弯曲面的微分方程.

下面将讨论关于挠曲函数的确定.

在图1所示的薄板上, 因为在所有边界上完全自由, 所以相应的弯矩和合成横向剪力应等于零, 例如对于各向同性板的情形, 它的边界条件如下.

在 $x=0$ 和 $x=a$ 边上, 应有

$$[w_{xx} + \mu w_{yy}]_{x=0, x=a} = 0 \quad (2.5)$$

$$[w_{xxx} + (2 - \mu)w_{xyy}]_{x=0, x=a} = 0 \quad (2.6)$$

在 $y=0$ 和 $y=b$ 边上, 应有

$$[w_{yy} + \mu w_{xx}]_{y=0, y=b} = 0 \quad (2.7)$$

$$[w_{yyy} + (2 - \mu)w_{xyy}]_{y=0, y=b} = 0 \quad (2.8)$$

由上所述, 我们选取如下的挠曲函数

$$w = f_1 \cos \frac{2\pi x}{a} + f_2 \cos \frac{2\pi y}{b} + f_3 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + f_4 \quad (2.9)$$

在以上各式中, a 和 b 分别为薄板沿 x 轴和 y 轴方向的边长, 而系数 $f_1 \sim f_4$ 都是待定的参数.

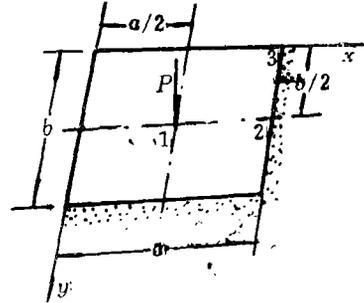


图 1

不难看出, 函数(2.9)在板的周界上的挠度不等于零, 而合成横向剪力为零的条件(2.6)和(2.8)都能被满足, 但弯矩为零的条件(2.5)和(2.7)未被满足. 若要满足条件(2.5)和(2.7)可将函数(2.9)代入, 便得

$$f_2 = -\frac{1}{\mu} \left(\mu + \frac{b^2}{a^2} \right) f_3, \quad f_1 = -\frac{1}{\mu} \left(\mu + \frac{a^2}{b^2} \right) f_3 \quad (2.10)$$

或写成

$$f_1 = \beta_1 f_3, \quad f_2 = \beta_2 f_3 \quad (2.11)$$

这样, 若在函数(2.9)中, 系数 f_1 和 f_2 取(2.10)的值, 则全部自由边上的弯矩为零的条件便可得到满足.

于是挠曲函数(2.9)现在就可改写为

$$w = f_3 \left(\beta_1 \cos \frac{2\pi x}{a} + \beta_2 \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + f_4 \quad (2.12)$$

上式中的独立的未知参数只有两个. 并且该函数在所有的自由边上相应的弯矩和合成横向剪力都为零, 于是问题便可从伽辽金变分方程组(2.3)求解.

对于方板的情形, $b=a$, 若取 $\mu=0.167$, 则由(2.10)可得

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = -6.98802 \quad (2.13)$$

三、数值算例

例1 设有一弹性地基上的矩形板, 四边自由, 在板的中心有一个集中力 P 作用, 如图1所示. 今使用方程组(2.3)求解.

将函数(2.12)代入, 并注意到力 P 的作用点的坐标为 $(a/2, b/2)$, 可得到关于系数 f_3 和 f_4 的两个代数方程的方程组如下

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ 8\pi^4 ab \left[\frac{\beta_1^2}{a^4} + \frac{\beta_2^2}{b^4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \right] + \frac{kab}{2D} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \frac{1}{2}) \right\} f_3 \\ & \quad + \frac{P}{D} (\beta_1 + \beta_2 - 1) = 0 \\ & kabf_4 - P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

对于方板的情形, 上面方程组可简化为

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{16\pi^4}{a^2} (\beta^2 + 1) + \frac{ka^2}{D} \left(\beta^2 + \frac{1}{4} \right) \right] f_3 + \frac{P}{D} (2\beta - 1) = 0 \\ & ka^2 f_4 - P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

若设

$$ka^4/D = 10^4 \quad (3.3)$$

并注意到方板情形的(2.13)式, 则从(3.2)可解得

$$f_3 = 0.26343 \times 10^{-4} P a^2/D, \quad f_4 = 1 \times 10^{-4} P a^2/D \quad (3.4)$$

由(2.12)可求得在板中心点处的最大挠度为

$$w_{\max} = w_1 = w(a/2, a/2) = 4.94514 \times 10^{-4} P a^2/D \quad (3.5)$$

自由边中点的挠度为

$$w_2 = w(0, a/2) = 0.73657 \times 10^{-4} P a^2/D \quad (3.6)$$

角点的挠度为

$$w_3 = w(0,0) = -2.41828 \times 10^{-4} Pa^2/D \quad (3.7)$$

解答(3.4)~(3.7)和文献[8]中的结果完全相同,文献[8]是用 Rayleigh-Ritz 法计算的。因为当挠度函数满足了薄板的全部几何边界条件和内力边界条件时,按 Rayleigh-Ritz 法和 Галеркин 法所算得的结果应该是一样的,这个证明在文献[3]中已给出。

有了挠度的表达式(2.12)就不难计算弯矩和扭矩。作者曾用较粗的网格(2×2)作有限差分法计算,得到板中心的最大挠度值为 $w_1 = 3.89229 \times 10^{-4} Pa^2/D$,这和(3.5)的值在数量级上是相符的。

现在来考察地基的总反力和全部外荷载的平衡情形,以此来检验前面计算结果可靠的程度。为此将函数(2.12)代入地基总反力的计算式中,并应用(3.4)和(3.3)可得到

$$R_f = k \iint w dx dy = ka^2 f_4 = ka^2 \times 10^{-4} \frac{Pa^2}{D} = P \quad (3.8)$$

这样就说明地基的总反力正好和全部外荷载保持平衡,其误差为零,因此,上面所得解答的可靠性是无可怀疑的。

例2 设有一弹性地基上的方形板,四边自由,在板的四个角点各有一相同的集中力 P 作用,如图2所示。今仍使用方程组(2.3)求解。

将函数(2.12)代入(2.3),并注意到四个 P 的作用点的坐标分别为: $(0,0)$, $(0,a)$, $(a,0)$ 和 (a,a) ;可得到关于系数 f_3 和 f_4 的代数方程组如下

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{16\pi^4}{a^2}(\beta^2+1) + \frac{ka^2}{D} \left(\beta^2 + \frac{1}{4} \right) \right] f_3 - \frac{4P}{D}(2\beta+1) &= 0 \\ ka^2 f_4 - 4P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

由此可求得

$$f_3 = -0.91301 \times 10^{-4} Pa^2/D, \quad f_4 = 4 \times 10^{-4} Pa^2/D \quad (3.10)$$

由(2.12)可求得在角点处的最大挠度为

$$w_{max} = w_3 = w(0,0) = 15.84725 \times 10^{-4} Pa^2/D \quad (3.11)$$

板中心点的挠度为

$$w_1 = w(a/2, a/2) = -9.67327 \times 10^{-4} Pa^2/D \quad (3.12)$$

自由边中点的挠度为

$$w_2 = w(0, a/2) = 4.91301 \times 10^{-4} Pa^2/D \quad (3.13)$$

有了挠度的表达式(2.12)就可以计算各点的弯矩和扭矩。作者也曾用粗略的2×2网格作差分法计算,得到板角点的最大挠度值为 $w_3 = 15.64871 \times 10^{-4} Pa^2/D$,这和(3.11)的值相接近。

为了检验地基的总反力和全部外荷载的平衡情形,我们将函数(2.12)代入地基的总反力的算式中,并应用(3.4)和(3.10),可得到

$$R_f = k \iint w dx dy = ka^2 f_4 = ka^2 \times 4 \times 10^{-4} \frac{Pa^2}{D} = 4P \quad (3.14)$$

由此可见,地基的总反力也正好和全部外荷载维持平衡,其误差为零,故以上的解答也是可靠的。

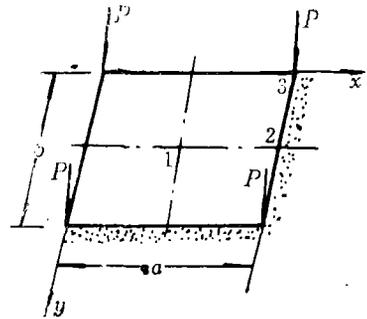


图 2

四、结 论

1. 本文用 Галеркин 法研究了弹性地基上自由边矩形板的弯曲问题, 分别计算了在板中心有一个集中力和在四个角点都有相同的集中力作用时板的挠度, 得到了较好的近似解。

2. 由于挠曲函数选得较好, 它不仅满足薄板的全部几何边界条件, 同时也满足了全部内力边界条件, 故应用 Галеркин 法是适宜的, 不过在四个自由边上, 弯矩为零的条件是近似地被满足的。

3. 由弯矩在全部自由边上为零的条件, 我们得到了挠度函数中的系数 f_1 和 f_2 跟系数 f_3 之间的约束条件(2.10), 从而减少了独立系数的数目, 从四个独立的系数减少到只剩下两个, 这样计算过程就方便多了。

4. 在文中的第一个算例中曾指出了用 Галеркин 法和 Rayleigh-Ritz 法两者算得的结果是一样的, 这就很好地说明了挠曲函数是的确满足了薄板全部自由边上的所有的几何边界条件和内力边界条件。

5. 在两个算例中, 地基的总反力都正好和外荷载保持平衡, 这也是有力地反映了上面计算结果的准确性和可靠性。

参 考 文 献

- [1] Власов В. З. и Н. Н. Леонтьев, *Балки, Плиты и Оболочки на Упругом Основании*, Гостехиздат (1960).
- [2] Кононенко Е. С., О приближенном расчёта прямоугольных плит на упругом основании, *Исследования по Теория Сооружений, Сборник Статей*, (9), (11) (1960).
- [3] 张福范, <弹性薄板>, 第二版, 科学出版社 (1984), 237—249.
- [4] 陈叔陶, 弹性地基上自由边矩形板, *力学学报*, 4(1) (1960).
- [5] 范家参、黎家佑, 对弹性地基上的自由边矩形板的探讨, *应用数学和力学*, 2(4) (1981), 455—460.
- [6] 生跃、黄义, 双参数弹性地基上自由边矩形板, *应用数学和力学*, 8(4) (1987), 317—329.
- [7] 王克林、黄义, 弹性地基上四边自由矩形板, *计算结构力学及其应用*, (2) (1985).
- [8] 成祥生, 弹性地基上自由边矩形板的弯曲、稳定和振动, *应用数学和力学*, 9(6) (1988), 529—533.
- [9] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Comp., Inc. (1959).
- [10] Лехницкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, Гостехиздат, М. (1957).

A Free Rectangular Plate on Elastic Foundation

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

This article will discuss the bending problems of the rectangular plates with free boundaries on elastic foundations. We talk over the two cases, that is, the plate acted on its center by a concentrated force and the plate subjected to by a concentrated force equally at four corner points respectively. We select a flexural function which satisfies not only all the geometric boundary conditions on free edges wholly but also the boundary conditions of the total internal forces. We apply the variational method meanwhile and then obtain better approximate solutions.

Key words rectangular thin plate, bending problem, Galerkin's variational method, flexural function