应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

# 一类二阶拟线性方程边值问题解的存在性*

何 清 冀春慈

（南京航务工程专科学校） （开封 河南大学）

（苏煜城推荐；1991年4月8日收到）


## 摘 要

文献[1]讨论了二阶拟线性常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}+y^\alpha+y^\beta=0, & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ y(0)=y'(1)=0 \end{cases}$$

的正解的存在性，但它限制了$0<\alpha<1<\beta$。本文则对方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+x^\alpha+1=0, & 0\leqslant t\leqslant 1,\ \alpha>0 \\ x(0)=x'(1)=0 \end{cases}$$

证明了正解的存在性。


**关键词** 拟线性 常微分方程 边值问题

考虑边值问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}+x^\alpha+1=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \\ &x(0)=x'(1)=0 \end{aligned}\right\}$$

如所周知，(1)的属于$C^2[0,1]$的解等价于下述积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)\{[x(s)]^\alpha+1\}ds \tag{2}$$

的属于$C[0,1]$的解，其中$G(t,s)$表示(1)的Green函数

$$G(t,s)=\min\{t,s\}=\begin{cases} t, & t\leqslant s \\ s, & t>s \end{cases} \tag{3}$$

## 1. $\alpha>1$的情况

令 $$P=\{x(t)\,|\,x(t)\in C[0,1],\ x(t)\geqslant 0\} \tag{4}$$

$$P_\tau=\{x(t)\,|\,x(t)\in C[0,1],\ x(t)\geqslant 0,\ \min_{\tau\leqslant t\leqslant 1}x(t)\geqslant\tau\|x\|_c\} \tag{5}$$

式中 $0<\tau<1$，$\|x\|_c=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$

* 1988年4月26日第一次收到。

**引理1**　$P$和$P_\tau$都是锥，且$P_\tau\subset P$。

根据锥的定义(见[1])不难验证，此处从略。

考虑算子$A$：$C[0,1]\to C[0,1]$

$$Ax(t)=\int_0^1 G(t,s)\{[x(s)]^a+1\}ds \tag{6}$$

**引理2**　$A:P\to P$全连续且$\forall 0<\tau<1$，$A(P_\tau)\subset P_\tau$。

**证**　$A$的全连续性可参看[2]。

设　$x(t)\in P$，$0<\tau<1$

$$\begin{aligned}\min_{\tau<t<1}Ax(t)&=\int_0^1 G(\tau,s)\{[x(s)]^a+1\}ds\\&=\int_0^\tau s\{[x(s)]^a+1\}ds+\int_\tau^1\tau\{[x(s)]^a+1\}ds\\&\geqslant\tau\left(\int_0^\tau s\{[x(s)]^a+1\}ds+\int_\tau^1 s\{[x(s)]^a+1\}ds\right)\\&=\tau\int_0^1 s\{[x(s)]^a+1\}ds=\tau\int_0^1 G(1,s)\{[x(s)]^a+1\}ds=\tau\|Ax\|\end{aligned}$$

故　$A(P)\subset P_\tau$，当然有$A(P_\tau)\subset P_\tau$，证毕。

记　$S_\rho=\{x\mid x\in C[0,1]，\|x\|_c=\rho\}$

**引理3**　当$x\in P\cap S_1$时，若$Ax=\mu x$，$\mu>0$，则必有$\mu\leqslant 1$。

**证**　若$x\in P\cap S_1$且$Ax=\mu x$，则$\|Ax\|_c=\mu\|x\|_c=\mu$，所以

$$\begin{aligned}\mu=\|Ax\|_c&=\int_0^1 G(1,s)\{[x(s)]^a+1\}ds\\&=\int_0^1 s\{[x(s)]^a+1\}ds\leqslant\int_0^1 s(\|x\|_c^a+1)ds=2\int_0^1 sds=1\end{aligned}$$

即$\mu\leqslant 1$。证毕。

取$k$是一个适当大的待定常数，如

$$k=\left(\frac{2}{\tau_0^a(1-\tau_0^2)}\right)^{\frac{1}{a-1}}，\quad 0<\tau_0<1$$

固定，则有

**引理4**　在$P\cap S_k$上，$\inf\limits_{x\in P\cap S_k}\|Ax\|_c>0$

且当$Ax=\mu x$，$x\in P\cap S_k$时必有$\mu\geqslant 1$。

**证**　当$x\in P\cap S_k$时

$$\|Ax\|_c=\int_0^1 G(1,s)\{[x(s)]^a+1\}ds=\int_0^1 s\{[x(s)]^a+1\}ds\geqslant\int_0^1 sds=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad\inf_{x\in P\cap S_k}\|Ax\|_c>0$$

若$Ax=\mu x$，$x\in P\cap S_k$，则$\|Ax\|_c=\|\mu x\|_c=\mu\|x\|_c=\mu k$。所以当$x\in P_{\tau_0}\cap S_k$时

$$\begin{aligned}\mu k=\|Ax\|_c&=\int_0^1 G(1,s)\{[x(s)]^a+1\}ds=\int_0^1 s\{[x(s)]^a+1\}ds\\&\geqslant\int_{\tau_0}^1 s\{[x(s)]^a+1\}ds\geqslant\tau_0^a\|x\|_c^a\int_{\tau_0}^1 sds=\frac{1}{2}(1-\tau_0^2)\tau_0^a k^a\end{aligned} \tag{7}$$

$$\therefore\quad\mu\geqslant 0.5(1-\tau_0^2)\tau_0^a k^{a-1}$$

故当　$0.5(1-\tau_0^2)\tau_0^a k^{a-1}\geqslant 1$　(注意$a>1$)

即 $$k>\left(\frac{2}{(1-\tau_0^2)\tau_0^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\text{时，}\mu\geqslant 1$$

不失一般性，可设$k>1$。

**引理5** 设$E$是Banach空间，$\Omega_1,\Omega_2$是$E$中的有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$。$A:P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$全连续，若

1) $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_2}\|Ax\|>0$;

2) $Ax=\mu x$，$x\in P\cap\partial\Omega_2\Rightarrow\mu\geqslant1$;

3) $Ax=\mu x$，$x\in P\cap\partial\Omega_1\Rightarrow\mu\leqslant1$,

则 $A$在$P\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$中必有不动点。

此引理的证明可参看[1]或[3]。

**定理1** 当$\alpha>1$时，问题(1)有非零解 $x(t)\in C^2[0,1]$，$x(t)\geqslant0$，$x(t)\not\equiv0$，且当 $0<t\leqslant1$时，$\dot{x}(t)>0$。

**证** 取$E=C[0,1]$，记$V_\rho$为$E$中以$\theta$为心半径为$\rho$的开球。$\Omega_1=P_{\tau_0}\cap V_1$，$\Omega_2=P_{\tau_0}\cap V_k$，$A$的定义如前，由引理2知$A:P_{\tau_0}\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P_{\tau_0}$且为全连续。

由引理3，引理4知引理5的条件1)，2)，3)均成立。故由引理5知存在$x(t)\in P_{\tau_0}$，使$Ax(t)=x(t)$，即问题(1)有解，且$x(t)\geqslant0$。

由$x(t)\in P_{\tau_0}\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$易知$1\leqslant\|x\|_c\leqslant k$，故 $x(x)\not\equiv0$。

当 $0<t\leqslant1$ 时

$$x(t)=Ax(t)=\int_0^1 G(t,s)\{[x(s)]^\alpha+1\}ds$$
$$=\int_0^\tau s\{[x(s)]^\alpha+1\}ds+\int_\tau^1 t\{[x(s)]^\alpha+1\}ds>0$$

**2. $0<\alpha<1$的情况**

与上面类似，定义锥$P$，$P_\tau$，算子$A$，球面$S_\rho$，球体$V_\rho$。不难看出引理2，引理3依然成立。

取$r$为适当小的正数，且$r<1$。

**引理6** 在$P\cap S_r$上，$\inf\limits_{x\in P\cap S_r}\|Ax\|_c>0$，且当$Ax=\mu x$，$x\in P\cap S_r$时，必有$\mu\geqslant1$。

**证** 与引理4类似可得$\inf\limits_{x\in P\cap S_r}\|Ax\|_c>0$。与(6)的推导相同可得，对$\forall\, 0<\tau_0<1$

$$\|Ax\|_c>\tau_0^\alpha\|x\|_c^\alpha\int_{\tau_0}^1 sds=\frac{1}{2}(1-\tau_0^2)\tau_0^\alpha\|x\|_c^\alpha=\frac{1}{2}(1-\tau_0^2)\tau_0^\alpha r^\alpha$$

又由$Ax=\mu x$知 $\|Ax\|_c=\mu\|x\|_c=\mu r$

$\therefore\qquad \mu r\geqslant0.5(1-\tau_0^2)\tau_0^\alpha r^\alpha$

即 $\qquad \mu\geqslant0.5(1-\tau_0^2)\tau_0^\alpha r^{\alpha-1}$

注意到 $0<\alpha<1$，故当 $r^{1-\alpha}<0.5(1-\tau_0^2)\tau_0^\alpha$

即 $0<r<\left[\frac{1}{2}(1-\tau_0^2)\tau_0^\alpha\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$时，必有 $\mu\geqslant1$。

与引理5与相仿有

**引理7** $E$是Banach空间，$\Omega_1,\Omega_2$是$E$中的有界开集，$\theta\in\Omega_1\subset\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$A:P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$全连续，若

1) $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_1}\|Ax\|>0$;

2) $Ax=\mu x,\ x\in P\cap\partial\Omega_2\ \Rightarrow\mu\leqslant1$;

3) $Ax=\mu x,\ x\in P\cap\partial\Omega_1\ \Rightarrow\mu\geqslant1$,

则$A$在$P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中必有不动点。

证明可见[1]或[3]。

**定理2** 当$0<\alpha<1$时，问题(1)有非零解$x(t)$，$x(t)\in C^2[0,1]$且$x(t)\geqslant0$，$x(t)\neq0$，当$0<t\leqslant1$时$x(t)>0$。

证明与定理1相仿，只需注意取$\Omega_1=P_{\tau_0}\cap V_r$，$\Omega_2=P_{\tau_0}\cap V_1$，其余和定理1证明类似。

**注** 对于$\alpha=1$的情况，即问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+x(t)+1=0,\ 0\leqslant t\leqslant1\\ x(0)=x'(1)=0\end{cases}$$

是线性问题，已有不少文献进行讨论，其结论是众所周知的(见[4])，此处不再论述它。

## 参 考 文 献

[1] 郭大钧，《非线性泛函分析》，山东科学技术出版社 (1985)。

[2] 郭大钧，B. B. Немыцкий算子的性质及其应用，数学进展，6 (1963)，70—91。

[3] Gatica, J. A. and H. L. Smith, Fixed point techniques in a cone with applications, *J. Math., Anal. Appl.*, 61 (1971), 58—71.

[4] 叶彦谦，《常微分方程讲义》，人民教育出版社 (1979)。

# The Existence of Solution of a Class of Two-Order Quasilinear Boundary Value Problem

He Qing

(*Nanjing Navigation Affairs Project College, Nanjing*)

Ji Chun-ci

(*He'nan University, Kaifeng, He'nan*)

**Abstract**

Ref. [1] discussed the existence of positive solutions of quasilinear two-point boundary problems:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}+y^\alpha+y^\beta=0,\ 0\leqslant t\leqslant1\\ y(0)=y'(1)=0\end{cases}$$

but it restricts $0<\alpha<1<\beta$. This article proves the existence of positive solution to this equation:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+1+x^\alpha=0,\ 0\leqslant t\leqslant1,\ \alpha>0\\ x(0)=x'(1)\end{cases}$$

**Key words** quasilinear, ordinary differential equation, boundary value problem