

ADI方法在液桥Marangoni对流控制的 数值模拟中的应用*

黄维章 张锁春 谢佐恒

(中国科学院应用数学研究所)

李家春

(中国科学院力学研究所)

摘 要

我们采用一种ADI方法用于Marangoni对流控制的计算模拟。本文着重在数值上考察了这种应用。结果表明, 这种ADI方法的应用是成功和有效的。

一、引 言

在低重力或微重力环境中, 浮力驱动的自然对流几乎消失。这为需要高质量的材料生产提供了理想的条件。在熔体悬浮区生长晶体的液桥模型中, 表面张力驱动的复杂对流变成了重要过程^[2~4]。为了避免太空实验的不必要失败, 对这种非浮力驱动的对流力深入的理论研究和数值模拟是非常必要和有重要意义的。

此文仅考虑液桥模型中Marangoni对流控制的有限差分数值模拟问题。模拟方法采用一种隐式交替方向法(ADI)。结果表明, 此ADI方法能有效地用于Marangoni对流控制的模拟计算, 特别地适于中等大小Reynolds数的情形。

二、数 学 模 型

考虑熔体悬浮区晶体生长的液桥实验模型。在此模型中, 主要过程为表面张力驱动的Marangoni对流。如图1所示, 实验液体置于两个半径相同的同心圆盘之间, 上圆盘保持(常)高温, 下圆盘保持(常)低温。液桥自由面上由于温度分布不均匀而产生表面张力梯度, 驱动液体对流。如果在自由面上加上某种作用, 则成为带控制的Marangoni对流。

如[2], 假定液体自由面是平的, 流动为不可压缩和轴对称, 并忽略自由面上的热损失。在这些假定下, 使用柱坐标(见图1), 通过无量纲化, 则液桥模型的流函数——涡度

* 1991年5月11日收到。
国家自然科学基金资助课题。

形式的控制方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \xi = & -u \frac{\partial}{\partial r} \xi - v \frac{\partial}{\partial z} \xi + \frac{u \xi}{r} - \frac{Gr}{R_\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ & + \frac{1}{R_\sigma} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \xi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \xi - \frac{\xi}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \xi \right] \end{aligned} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial r} - v \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{M_a} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (2.1b)$$

$$0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - r \xi \quad (2.1c)$$

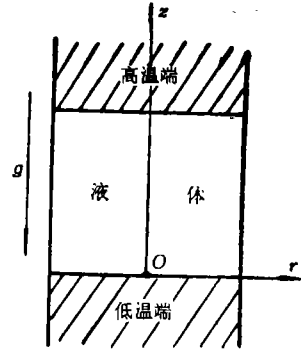


图1 液桥位形示意图

其中 r 和 z 分别为径向和轴向无量纲坐标, u 和 v 分别为 r 向和 z 向的无量纲速度, θ 为无量纲温度, 参数 $Gr = \beta g \Delta T L^3 / \nu^2$ 为 Grashof 数, $R_\sigma = (\partial \sigma / \partial T) \Delta T \cdot (L / \mu \nu)$ 为 Reynolds 数, $M_a = (\partial \sigma / \partial T) \Delta T \cdot (L / \mu \kappa)$ 为 Marangoni 数, σ 为表面张力, T 为温度, L 为长度, μ 和 ν 为粘性系数, β 为体积膨胀系数, g 为重力加速度, κ 为传热系数. 流函数 ψ 和涡度 ξ 的定义为

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.2)$$

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \quad (2.3)$$

相应的边界条件为

$$\text{在 } z=0 \text{ 处: } \psi=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}=0, \quad \theta=0 \quad (2.4a)$$

$$\text{在 } z=1 \text{ 处: } \psi=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}=0, \quad \theta=1 \quad (2.4b)$$

$$\text{在 } r=0 \text{ 处: } \psi=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}=0 \quad (2.4c)$$

$$\text{在 } r=1 \text{ 处: } \psi=0, \quad \xi = \frac{\partial \theta}{\partial z} - \tau, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}=0 \quad (2.4d)$$

在式(2.4d)中, τ 是液桥自动面上的控制参数, 它代表外加作用(在液桥自由面上)的大小. 当 $\tau=0$ 时, 即得通常的无控制液桥模型.

公式(2.1)和(2.4)构成液桥模型 Marangoni 对流控制的基本数学模型.

三、差分格式

1 基本思想

对于方程(2.1)的计算, 我们采用文献[1]中的格式2——一种隐式交替方向法 (ADI). 针对 Taylor 涡流模型, [1]的计算结果表明, 此差分格式具有较好的数值稳定性, 特别适用于中等大小的 Reynolds 数情形, 且较易于边界条件的处理.

对于 r, z 所属区域 $[0, 1] \times [0, 1]$, 采用(非等距)矩形划分. 令

$$h_r = 1/(I-1), \quad h_z = 1/(J-1),$$

其中 I 和 J 为某些正整数. 记

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_i &= (i-1)h_r, \quad (i=1, 2, \dots, I) \\ \bar{z}_j &= (j-1)h_z, \quad (j=1, 2, \dots, J) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

则计算中使用的(非等距)网格点为

$$(r_i, z_j) = f(\bar{r}_i), f(\bar{z}_j), \quad (i=1, \dots, I; j=1, \dots, J) \quad (3.2)$$

其中

$$f(x) = \frac{\text{th}b\left(x - \frac{1}{2}\right) + \text{th} \frac{b}{2}}{2\text{th} \frac{b}{2}} \quad (3.3)$$

$b > 0$ 为调节参数. 注意到 $b \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow x$, 因此只要 b 充分小(例如 $b = 10^{-10}$), 则网格(3.2)几乎是均匀网格. 为方便起见, 以后把均匀网格记为 $b = 0$ 情形.

从(3.3)也可看出, b 越大, 在任一方向的靠近边界处划分就越密.

时间上的增量为 Δt (在整个计算中不变).

假若 ζ^n 、 ψ^n 和 θ^n 均已知, 则从时间 $n\Delta t$ 到 $(n+1)\Delta t$ 的计算过程为

- 1° 利用(2.1a)和边界条件、 θ^n 和 ψ^n 计算 ζ^{n+1} ;
- 2° 利用(2.1b)和边界条件、 ζ^{n+1} 计算 ψ^{n+1} ;
- 3° 利用(2.1c)和边界条件、 ψ^{n+1} 和 ζ^{n+1} 计算 θ^{n+1} .

2 焔度和温度方程的差分格式及相应边界条件的处理

注意到(2.1a)和(2.1b)都具有如下形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= A \frac{\partial \phi}{\partial z} + B \frac{\partial \phi}{\partial r} + C\phi + D \\ &+ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \beta \frac{\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 β 取1或0. 记

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_r &= B \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\beta}{r^2} \right] \\ \Lambda_z &= A \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

以及与之相对应的差分算子 Λ_{1r} , Λ_{2r} 为 Λ_{1z} , Λ_{2z} . 那么使用的分裂格式为

$$\left. \begin{aligned} \left(E - \frac{\Delta t}{2} \Lambda_{1z} \right) \phi^* &= \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_{2z} \right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_{2r} \right) \phi^n \\ &+ \Delta t C \phi^n + \Delta t D \\ \left(E - \frac{\Delta t}{2} \Lambda_{1r} \right) \phi^{n+1} &= \phi^* \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中 E 为恒等算子, A , B , C 和 D 均采用时间 $n\Delta t$ 的值, 算子 Λ_{1z} 和 Λ_{2z} 的定义为

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{1z}\phi_{i,j} &= \frac{A+|A|}{2} \cdot \frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{z_{j+1}-z_j} + \frac{A-|A|}{2} \cdot \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{z_j-z_{j-1}} \\ &+ \frac{2}{R(z_{j+1}-z_{j-1})} \left[\frac{\phi_{i,j-1}-\phi_{i,j}}{z_{j+1}-z_j} - \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{z_j-z_{j-1}} \right] \\ \Lambda_{2z}\phi_{i,j} &= \frac{A+|A|}{2} \cdot \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{z_j-z_{j-1}} + \frac{A-|A|}{2} \cdot \frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{z_{j+1}-z_j} \\ &+ \frac{2}{R(z_{j+1}-z_{j-1})} \left[\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{z_{j+1}-z_j} - \frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{z_j-z_{j-1}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Λ_{1r} 和 Λ_{2r} 有相似的表达式。

在分裂格式(3.6)中消去 ϕ^* , 得到整步格式为

$$\begin{aligned} \frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}(\Lambda_{1z}\phi^{n+1}+\Lambda_{2z}\phi^n) + \frac{1}{2}(\Lambda_{1r}\phi^{n+1}+\Lambda_{2r}\phi^n) \\ &+ C\phi^n + D - \frac{\Delta t}{4}(\Lambda_{1z}\Lambda_{1r}\phi^{n+1}-\Lambda_{2z}\Lambda_{2r}\phi) \end{aligned} \quad (3.8)$$

结果格网剖分是均匀的, 则对于定态解格式(3.8)(因而格式(3.6))的截断误差为 $O(h_z^2)+O(h_r^2)+O(\Delta t \cdot h_z \frac{\partial^2}{\partial z^2})+O(\Delta t \cdot h_r \frac{\partial^2}{\partial r^2})$ 。因此可知, 要使截断误差较小, 必须使用适当小的时间步长。

虽然格式(3.6)不具备二阶精度, 但通过适当取时间步长仍可得到较精确的解。同时, 格式(3.6)中的算子 $(E-\frac{\Delta t}{2}\Lambda_{1z})$ 和 $(E-\frac{\Delta t}{2}\Lambda_{1r})$ 都给出三对角对角占优矩阵, 因此, (3.6)对网格Reynolds数没有什么限制。

考虑相应边界条件的处理。对于涡度 ζ , 由方程(2.1c)及公式(2.2)~(2.4)知, 其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } z=0 \text{ 和 } z=1 \text{ 处: } \quad \zeta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ \text{在 } r=0 \text{ 处: } \quad \zeta &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \\ \text{在 } r=1 \text{ 处: } \quad \zeta &= \frac{\partial \theta}{\partial z} - \tau \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

(3.9)中的第三式的处理是平凡的, 而对第一、二式的处理为:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{i,1}^{n+1} &= \frac{\alpha}{r_i} \left[\frac{2(z_3-z_1)\psi_{i,2}^n}{(z_2-z_1)^2(z_3-z_2)} - \frac{2(z_2-z_1)\psi_{i,3}^n}{(z_3-z_1)^2(z_3-z_2)} \right] \\ &+ (1-\alpha)\xi_{i,1}^n \quad (i=2, \dots, I-1) \\ \xi_{i,j}^{n+1} &= \frac{\alpha}{r_i} \left[\frac{2(z_j-z_{j-2})\psi_{i,j-1}^n}{(z_j-z_{j-1})^2(z_{j-1}-z_{j-2})} - \frac{2(z_j-z_{j-1})\psi_{i,j-2}^n}{(z_j-z_{j-2})^2(z_{j-1}-z_{j-2})} \right] \\ &+ (1-\alpha)\xi_{i,j}^n \quad (i=2, \dots, I-1) \\ \xi_{1,j}^{n+1} &= -\frac{3\alpha}{r_3-r_2} \left[\frac{\psi_{2,j}^n}{(r_2-r_1)^2} - \frac{\psi_{3,j}^n}{(r_3-r_1)^2} \right] \\ &+ (1-\alpha)\xi_{1,j}^n \quad (j=1, \dots, J) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 为(边界)松弛参数. 对于均匀网格, (3.10)的第一和第二式具有二阶截断误差.

对于温度 θ , 在 $z=0$ 和 $z=1$ 处的边界条件的差分处理是平凡的. 而在 $r=0$ 和 $r=1$ 处边界条件则使用二阶精度格式^[5]. 例如在 $r=0$ 处,

$$\theta_{1,j}^{n+1} = \frac{(r_3-r_1)^2 \theta_{2,j}^{n+1} - (r_2-r_1)^2 \theta_{3,j}^{n+1}}{(r_3-r_1)^2 - (r_2-r_1)^2}, \quad (j=1, \dots, J) \quad (3.11)$$

格式(3.6)需要 ϕ^* 在 $z=0$ 和 $z=1$ 处的函数值. 这些值可以从(3.6)的第二个方程应用于边界 $z=0$ 和 $z=1$ 上算出. 例如,

$$\xi^*|_{z=0} = \left(E - \frac{\Delta t}{2} \Lambda_{1r} \right) \xi_{z=0}^{n+1} \quad (3.12)$$

3 流函数方程的差分格式及计算

方程(2.1c)的差分格式通过中心差分离散而得到. 差分方程的求解, 采用参数为1.5的线(r 方向)SOR迭代方法. 迭代的收敛准则为

$$\frac{\max |\psi_{i,j}^{n+1(s+1)} - \psi_{i,j}^{n+1(s)}|}{\max |\psi_{i,j}^{n+1(s+1)}|} \leq 10^{-4} \quad (3.13)$$

4 定态解的判别准则

记

$$R_\phi^n = \frac{\max |\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n|}{\max |\phi_{i,j}^{n+1}|}, \quad \phi = \xi, \psi, \theta.$$

当计算满足

$$\frac{1}{\Delta t} \max \{R_\xi^n, R_\psi^n, R_\theta^n\} \leq E_{ps} \quad (3.14)$$

时, 则认为定态解已达到. 下面, 如不特别声明, 均表示取 $E_{ps} = 10^{-3}$.

四、数值结果

第三节第二段的分析表明, 虽然交替方向法(3.6)的稳定性对时间步长 Δt 没有限制, 但时间步长 Δt 的选取对格式(3.6)相应于定态解的截断误差有影响. 为了考查时间步长对解精度的影响, 表1和表2给出了在典型参数值下使用均匀网格和非均匀网格时不同时间步长选取

表1 时间步长 Δt 的选取对解精度的影响
 $R_0 = 10^3, M_0 = 10^3, G_r = 1, \tau = 0$
 $I \times J = 31 \times 31$ (均匀网格), $\alpha = 0.5$

Δt	$\max \psi $	$\max u $	$\max v $	$\max \zeta $	$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(1, \frac{1}{2}\right)$	CPU 时间
0.5	3.94(-3)*	2.74(-2)	3.77(-2)	13.16	-1.75(-3)	0.159	0.306	0.669	1111**
0.3	3.96(-3)	2.77(-2)	3.79(-2)	7.80	-1.76(-3)	0.157	0.305	0.668	1556
0.1	4.04(-3)	2.85(-2)	3.82(-2)	8.06	-1.82(-3)	0.168	0.314	0.673	3143
0.03	3.97(-3)	2.85(-2)	3.80(-2)	8.00	-1.76(-3)	0.157	0.304	0.668	8023

*: $a(-b)$ 表示 $a \times 10^{-b}$.

** : CPU时间以秒为单位, 计算是在Micro VAX11上进行的.

的计算结果。比较这些结果，可以明显地看出，除了涡度 ζ 处，时间步长的选取对其他结果的影响并不大。而且即使考虑进涡度 ζ ，如果取适当小的时间步长（这里 $\Delta t \leq 0.3$ ），时间步长的影响也是很小的。在表1和表2中 $\Delta t \leq 0.3$ 的结果中，各量的相对误差均 $\leq 10\%$ 。

表 2

时间步长 Δt 的选取对解精度的影响

$$R_\sigma = 10^3, M_\sigma = 10^3, G_r = 1, \tau = 0$$

$$I \times J = 21 \times 21 \text{ (非均匀网格, } b=2), \alpha = 0.5$$

Δt	$\max \psi $	$\max u $	$\max v $	$\max \zeta $	$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(1, \frac{1}{2}\right)$	CPU 时 间
0.5	3.92(-3)	2.79(-2)	3.79(-2)	14.79	-1.73(-3)	0.159	0.302	0.672	315
0.3	3.94(-3)	2.84(-2)	3.81(-2)	8.77	-1.74(-3)	0.158	0.302	0.671	471
0.1	4.00(-3)	2.92(-2)	3.84(-2)	8.01	-1.79(-3)	0.166	0.308	0.674	1104
0.03	3.95(-3)	2.93(-2)	3.83(-2)	7.95	-1.74(-3)	0.154	0.300	0.669	3239

表3和表4给出了不同网格下的比较结果。可以看出，网格的选取对结果的影响是相当大的。例如，在表3中网格 11×11 和 41×41 下的涡度 ζ 值的相对误差竟达到46.7%。因此，要得到较精确的计算结果，必须使用适当细的网格。例如均匀的网格 31×31 与 41×41 的各量值的相对误差均小于7%，因而，使用 31×31 的均匀网格，就可得到较精确的解。

表 3

网格剖分对解精度的影响

$$R_\sigma = 10^3, M_\sigma = 10^3, G_r = 1, \tau = 0$$

$$\text{均匀网格, } \Delta t = 0.1, \alpha = 0.5$$

$I \times J$	$\max \psi $	$\max u $	$\max v $	$\max \zeta $	$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(1, \frac{1}{2}\right)$	CPU 时 间
11×11	3.80(-3)	1.87(-2)	2.11(-2)	4.62	-1.53(-3)	0.116	0.218	0.568	379
21×21	3.90(-3)	2.52(-2)	3.29(-2)	6.88	-1.69(-3)	0.146	0.282	0.650	1368
31×31	4.04(-3)	2.85(-2)	3.82(-2)	8.06	-1.82(-3)	0.168	0.314	0.673	3143
41×41	4.09(-3)	2.98(-2)	4.12(-2)	8.67	-1.86(-3)	0.170	0.322	0.678	6173

表 4

网格剖分对解精度的影响

$$R_\sigma = 10^3, M_\sigma = 10^3, G_r = 1, \tau = 0$$

$$\text{非均匀网格}(b=2), \Delta t = 0.1, \alpha = 0.5$$

$I \times J$	$\max \psi $	$\max u $	$\max v $	$\max \zeta $	$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$	$\theta\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\theta\left(1, \frac{1}{2}\right)$	CPU 时 间
11×11	3.77(-3)	2.23(-2)	2.72(-2)	5.36	-1.64(-3)	0.114	0.239	0.611	357
21×21	4.00(-3)	2.92(-2)	3.84(-2)	8.01	-1.79(-3)	0.166	0.308	0.674	1104

比较表3和表4的结果，还可发现，如果网格点的个数相同，使用非均匀网格所得到的结果要比使用均匀网格所得的结果精确。例如，非均匀网格 21×21 所得的结果几乎与均匀网格 31×31 所得的结果精度一样。

表5给出了不同Marangoni数下不同控制的比较结果。图2(a)~(c)、图3(a)~(c)和图4(a)~(c)分别为 $M_\sigma = 1000$ 时不同控制下的温度场、流场和涡度图。从表5和图2~图4可看出，如果在液桥自由面上的作用与温度梯度方向相反（即 $\tau > 0$ ），则控制的效果是使对流变缓以及使径向的温度变化减小（即等温线的扭曲程度降低）。如果作用与温度梯度方向相同（即 $\tau < 0$ ），则控制的效果是使对流加快并使径向的温度变化大。这些和物理分析是一致的。具体的控制效果的分析参见[6]。

表5

控制和不同 M_a 值对流场的影响

$R_\sigma = 10^3, G_r = 1, \Delta t = 0.3$

非均匀网格 $21 \times 21 (b=2), \alpha = 0.5$

M_a	τ	$\max \psi $	$\max u $	$\max v $	$\max \xi $	$\psi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\theta(0, \frac{1}{2})$	$\theta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\theta(1, \frac{1}{2})$
100	0.5	4.34(-3)	2.55(-2)	4.44(-2)	1.46	-1.83(-3)	0.414	0.436	0.562
	0.0	7.62(-3)	4.93(-2)	7.68(-2)	3.43	-3.10(-3)	0.362	0.387	0.596
	-0.5	1.04(-2)	7.12(-2)	0.104	5.72	-4.19(-3)	0.324	0.347	4.611
1000	0.5	1.78(-3)	1.81(-2)	2.43(-2)	4.30	-7.42(-4)	0.218	0.288	0.652
	0.0	3.94(-3)	2.84(-2)	3.81(-2)	8.77	-1.74(-3)	0.158	0.302	0.671
	-0.5	7.86(-3)	4.06(-2)	7.58(-2)	11.31	-3.37(-3)	0.133	0.337	0.599
2000	0.5	1.19(-3)	1.51(-2)	1.79(-2)	5.83	-4.81(-4)	0.190	0.277	0.672
	0.0	3.12(-3)	2.10(-2)	3.25(-2)	11.19	-1.37(-3)	0.143	0.361	0.657
	-0.5	7.56(-3)	3.77(-2)	7.25(-2)	13.64	-3.29(-3)	0.128	0.403	0.576

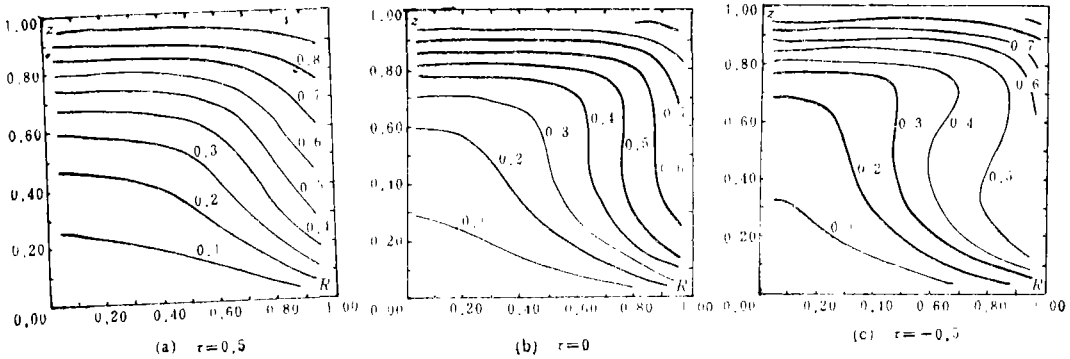


图2 在参数为 $R_\sigma = 10^3, M_a = 10^3, G_r = 1$ 时不同控制下的温度场

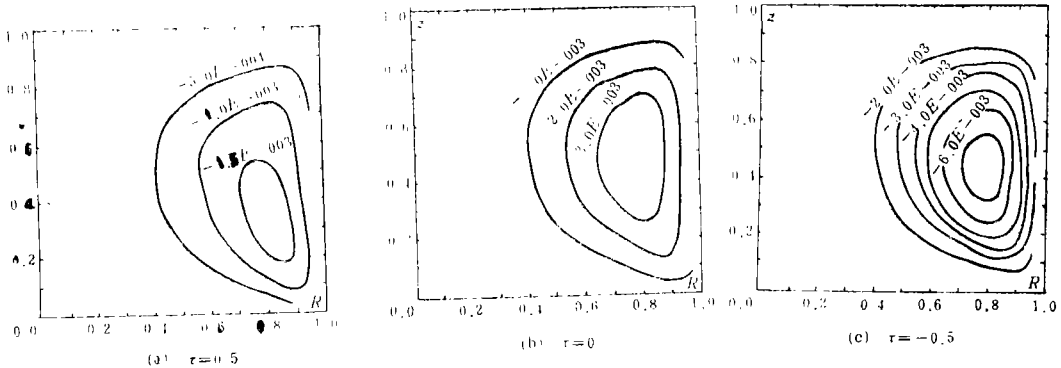


图3 参数为 $R_\sigma = 10^3, M_a = 10^3, G_r = 1$ 时不同控制下的流场图

在所有的计算中，低松弛因子都取为 $\alpha = 0.5$ 。从表1和表2可知，对较大和较小的时间步长，计算都是收敛的。这也说明了格式(3.6)的一个特性，即对中等大小的Reynolds数，此格式对松弛因子的要求是很低的。这点在[1]中已有详细的讨论。

总结第三节和本节上面的讨论，可以得出如下结论：

- 1) 本文所用的ADI方法能成功且有效地用于Marangoni对流控制的模型计算。
- 2) 虽然ADI格式(3.6)不具有二阶的空间截断误差且截断误差中含有时间步长 Δt 的影

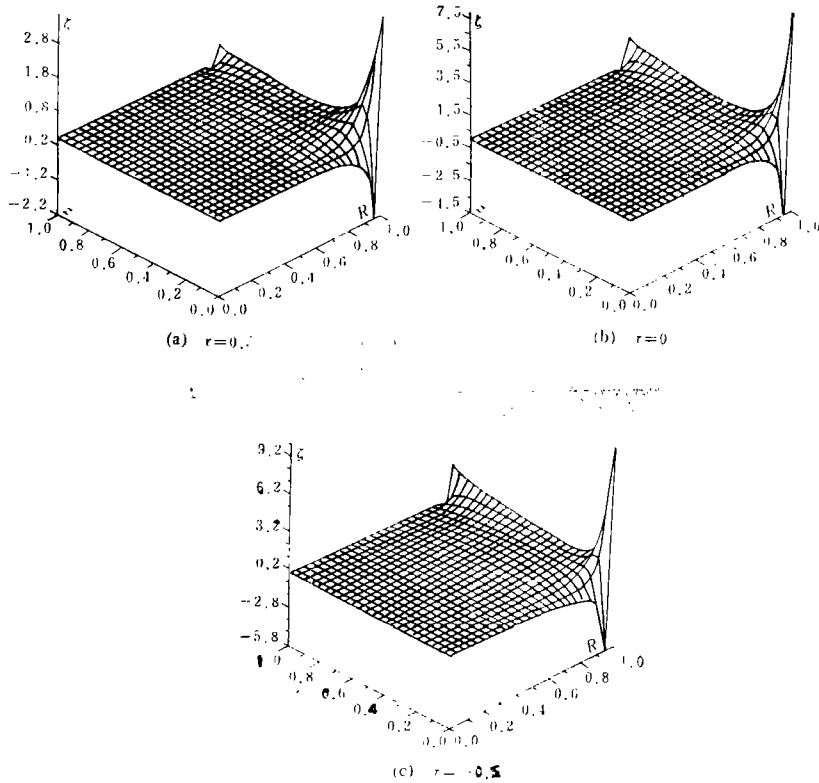


图4 参数为 $R_0=10^3$, $M_0=10^3$, $G_r=1$ 时不同控制下的涡场图

响,但时间步长的选取对结果的影响并不大。通过使用适当的非均匀网格可获得较好的计算结果。

3) 本文所用的ADI方法,能较方便地处理中间变量的边条件问题,并且对中等大小的Reynolds数情形,对(边界)松弛因子的选取的要求是非常低的。

参 考 文 献

- [1] de Roquefort, T. Alziary and G. Grilland, Computation of Taylor vortex flow by a transient implicit method, *Computers and Fluids*, 6(1978), 259—269.
- [2] Kamotani, Y. and J. Kim, Effects of zone rotation on oscillatory thermocapillary flow in a simulated floating zone, *J. Crystal Growth*, 87(1988), 62—68.
- [3] Ostrach, S., Low gravity fluid flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 14(1982), 313—345.
- [4] Derssker R. F. and N. S. Sivakumaran, Non-contaminating method to reduce Marangoni convection in microgravity floating zones, *J. Crystal Growth*, 88(1988), 148—158.
- [5] 黄维章、张锁春, Neumann 边界的处理对有限差分解的影响, 数值计算和计算机应用。(待发表)
- [6] 李家春等, 微重力下悬浮区热毛细对流的控制, 中国科学。(待发表)

On the Application of ADI Method to Numerical Simulation of the Marangoni Convection Controlling in Liquid Bridge Model

Huang Wei-zhang Zhang Suo-chun Xie Zuo-heng

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing)

Li Jia-chun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

An ADI scheme is suggested to simulate the controlling of Marangoni convection with emphasis on investigating application of the technique numerically. Numerical experiments conducted in the present paper turn out both successful and efficient. Hence, ADI scheme is expected to be extended to the study of other convection processes related to material manufacturing.

Key words Marangoni convection, liquid bridge, ADI