

随机变量的变分原理及有限元法

张汝清 高行山

(重庆大学工程力学系, 1990年7月8日收到)

摘 要

本文将材料的随机性, 结构几何形状的随机性, 力的边界条件和位移边界条件的随机性, 直接引入泛函变分表达式中, 应用小参数摄动法, 提出了统一的随机变量的变分原理及有限元法。从算例表明, 应用此方法处理随机变量的力学问题, 具有程序实施简便, 计算效率高等优点。

关键词 变分原理 有限元法 摄动法

一、引 言

在各种工程结构的力学分析中, 许多问题进行确定性的分析是十分必要的。当前, 广泛采用的是基于变分原理的有限元法。然而, 某些工程结构通常存在着材料的随机性, 结构几何形状的随机性, 外力边界条件和位移边界条件的随机性。对于这些结构的力学分析, 显然, 不能完全采用确定性分析的方法。因此, 如何根据随机变量的特性, 寻求相应于确定性分析的变分原理和有限元法, 即是建立随机变分原理及随机有限元法来处理具有随机变量的力学问题。

近十年来, 已提出了一些随机有限元法^{[1],[3],[4]}。但是, 这些方法大都是基于直接刚度矩阵法, 不能有效的和统一的将材料、几何形状、外力和位移等边界条件的随机变化特性, 直接引入到有限元公式中, 构造出多变量的有限元模型和发展新的有效的数值分析方法。因此, 建立随机变量的各种变分原理就具有理论意义和实用价值。本文以确定变量的变分原理(即一般的变分原理)为基础, 根据随机变量的特性, 利用摄动二次技术, 提出了随机变量的变分原理及随机有限元法。

二、随机变量的变分原理

对小变形弹性体的最小势能原理可写为

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma = 0 \quad (2.1)$$

已知面力和位移满足

$$\sigma^T \mathbf{n} = \bar{\mathbf{p}} \quad (\text{在 } \Gamma_p \text{ 上}), \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}) \quad (2.2)$$

设将材料性质, 几何位置, 外力和位移已知边界条件的随机变化, 作为空间随机场 $b(\mathbf{x})$ 表示, 其中, \mathbf{x} 为空间坐标.

现将位移函数 \mathbf{u} 在随机场 $b(\mathbf{x})$ 的均值 $\bar{b}(\mathbf{x})$ 和在点 \mathbf{x} 处按 Taylor 级数展开, 保留到二阶项, 得

$$\mathbf{u}(b(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \doteq \mathbf{u}(\bar{b}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} \right)_{\bar{b}} db + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial b^2} \right)_{\bar{b}} db^2 \quad (2.3a)$$

现今 $db = (b - \bar{b})\varepsilon$, 式(2.3a)就变成

$$\mathbf{u}(b(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \doteq \mathbf{u}(\bar{b}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} \right)_{\bar{b}} (b - \bar{b})\varepsilon + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial b^2} \right)_{\bar{b}} (b - \bar{b})^2 \varepsilon^2 \quad (2.3b)$$

并将上式改写成二次摄动展式, 有

$$\mathbf{u} \doteq \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}' + \varepsilon^2 \mathbf{u}'' \quad (2.3)$$

式中, (0) , $(')$ 和 $('')$ 分别表示随机函数 \mathbf{u} 在 \bar{b} 处之值, 一阶变量和二阶变量.

同样, 对于随机函数 \mathbf{e} , \mathbf{D} , $\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{u}}$, \mathbf{n} 等的二次摄动展式分别写成为

$$\mathbf{e} \doteq \mathbf{e}^0 + \varepsilon \mathbf{e}' + \varepsilon^2 \mathbf{e}'' \quad (2.4)$$

$$\mathbf{D} \doteq \mathbf{D}^0 + \varepsilon \mathbf{D}' + \varepsilon^2 \mathbf{D}'' \quad (2.5)$$

$$\bar{\mathbf{f}} \doteq \bar{\mathbf{f}}^0 + \varepsilon \bar{\mathbf{f}}' + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{f}}'' \quad (2.6)$$

$$\bar{\mathbf{p}} \doteq \bar{\mathbf{p}}^0 + \varepsilon \bar{\mathbf{p}}' + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{p}}'' \quad (2.7)$$

$$\bar{\mathbf{u}} \doteq \bar{\mathbf{u}}^0 + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}' + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{u}}'' \quad (2.8)$$

$$\mathbf{n} \doteq \mathbf{n}^0 + \varepsilon \mathbf{n}' + \varepsilon^2 \mathbf{n}'' \quad (2.9)$$

对于求解域和边界的随机变化通过变换

$$d\Omega = J_V dV \quad (2.10)$$

$$d\Gamma = J_S dS \quad (2.11)$$

引入. 其中, V 和 S 分别表示参考域和边界域, J_V 和 J_S 分别表示体积和面积 Jacobian. 同样, 按二次摄动展开, 得

$$J_V \doteq J_V^0 + \varepsilon J_V' + \varepsilon^2 J_V'' \quad (2.12)$$

$$J_S \doteq J_S^0 + \varepsilon J_S' + \varepsilon^2 J_S'' \quad (2.13)$$

将上面的展式代入式(2.1)中, 比较同次项系数, 则得随机变量的变分原理, 它们是
零次变分原理

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T \mathbf{D}^0 \mathbf{e}^0 J_V^0 dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}}^0 J_V^0 dV + \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}^0 J_S^0 dS \quad (2.14)$$

一次变分原理

$$\begin{aligned} \int_V \delta \mathbf{e}^T (\mathbf{D}^0 \mathbf{e}' J_V^0 + \mathbf{D}' \mathbf{e}^0 J_V^0 + \mathbf{D}^0 \mathbf{e}^0 J_V') dV &= \int_V \delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{f}}' J_V^0 + \bar{\mathbf{f}}^0 J_V') dV \\ &+ \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{p}}' J_S^0 + \bar{\mathbf{p}}^0 J_S') dS \end{aligned} \quad (2.15)$$

二次变分原理

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T (\mathbf{D}^0 \mathbf{e}'' J_V^0 + \mathbf{D}' \mathbf{e}' J_V^0 + \mathbf{D}'' \mathbf{e}^0 J_V^0 + \mathbf{D}^0 \mathbf{e}' J_V' + \mathbf{D}^0 \mathbf{e}^0 J_V'' + \mathbf{D}' \mathbf{e}^0 J_V') dV$$

$$= \int_V \delta u^T (\bar{f}'' J_V'' + \bar{f}' J_V' + \bar{f}^0 J_V^0) dV + \int_{S_F} \delta u^T (\bar{p}^0 J_S'' + \bar{p}' J_S' + \bar{p}'' J_S^0) dS \quad (2.16)$$

方程(2.14)为确定变量的变分原理，可按普通有限元法求解。而方程(2.15)和(2.16)中的 D' , f' , p' , J_V' , J_S' 以及带(′)的随机函数，用空间期望和自协方差函数描述。

三、随机有限元法

在进行有限元分析时，同时离散位移场和随机场。

将随机场离散为 q 个单元，即

$$b(x) = \sum_{i=1}^q \phi_i(x) b_i \quad (3.1)$$

$\phi_i(x)$ 为形函数，定义为在单元 i 上取单位值，而在其它单元上取零值。 b_i 为 $b(x)$ 在第 i 个结点之值。

为了保证收敛，随机函数 D , \bar{f} , \bar{p} , \bar{u} , J_V 和 J_S 也用相同的形函数离散。例如，对于随机函数 D ，其近似为

$$D = \sum_{i=1}^q \Phi_i(x) D_i = \sum_{i=1}^q \Phi_i(x) (D_i^0 + \varepsilon D_i' + \varepsilon^2 D_i'') \quad (3.2)$$

将 D_i 在随机场 $b(x)$ 的均值 \bar{b} 处按 Taylor 展开，有

$$D_i = D_i^0 + \sum_{k=1}^q \left(\frac{\partial D_i}{\partial b_k} \right)_{\bar{b}} db_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial b_k \partial b_l} \right)_{\bar{b}} db_k db_l \quad (3.3)$$

即有

$$D_i' = \sum_{k=1}^q (D_i')_k \Delta b_k \quad (3.4)$$

$$D_i'' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q (D_i'')_{kl} \Delta b_k \Delta b_l \quad (3.5)$$

式(3.3)中， $db_k = \varepsilon(b_k - \bar{b}_k) = \varepsilon \Delta b_k$ 。结点值 $(D_i')_k$ 和 $(D_i'')_{kl}$ 可由求导得出。同样，其余的随机函数有类似的表达式。

将位移场离散为 NL 个单元， NP 个结点，每个结点有 NF 个自由度。位移场近似为

$$u = u^0 + \varepsilon u' + \varepsilon^2 u'' \quad (3.6)$$

因而，有

$$u^0 = \sum_{i=1}^{NP} N_i(x) d_i^0 = N(x) d^0 \quad (3.7)$$

$$u' = \sum_{i=1}^{NP} N_i(x) d_i' = N(x) d' \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u}'' = \sum_{i=1}^{NP} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i'' = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{d}'' \quad (3.9)$$

其中 $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 为整体位移形状函数, 式(3.7)中的 \mathbf{d}^0 是整体位移. 当所考察的结点是在一个特定单元 e 中, 并且点 i 是该单元的结点, 则有 $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i'$, 如果点 i 不是该单元的结点, 则有 $\mathbf{N}_i = \mathbf{0}$. 这里, \mathbf{N}_i' 为单元形状函数, 其选取应满足 C_0 连续性要求. 而

$$\mathbf{d}_i' = \sum_{k=1}^q (\mathbf{d}_i')_k \Delta b_k \quad (3.10)$$

$$\mathbf{d}_i'' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q (\mathbf{d}_i'')_{kl} \Delta b_k \Delta b_l \quad (3.11)$$

将上述各近似式, 代入式(2.14)、(2.15)和(2.16)中, 即可得到随机有限元方程, 它们是零次方程

$$\mathbf{K} \mathbf{d}^0 = \mathbf{F}^0$$

其中

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}^0 (\mathbf{L}\mathbf{N}) J_V^0 dV \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}^0 = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}}^0 J_V^0 dV + \int_{S_r} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}}^0 J_S^0 dS \quad (3.14)$$

式中 \mathbf{d}^0 是整体结点位移, \mathbf{L} 为应变算子.

一次方程

$$\mathbf{K} \mathbf{d}_k' = \mathbf{F}_k' \quad (k=1, 2, \dots, q) \quad (3.15)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k' = & \int_V \mathbf{N}^T [\bar{\mathbf{f}}_k' J_V^0 + \bar{\mathbf{f}}^0 (J_V^0)_k] dV + \int_{S_r} \mathbf{N}^T [\bar{\mathbf{p}}' J_S^0 + \bar{\mathbf{p}}^0 (J_S^0)_k] dS \\ & - \int_V (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}_k' \mathbf{e}^0 J_V^0 dV - \int_V (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}^0 \mathbf{e}^0 (J_V^0)_k dV \end{aligned} \quad (3.16)$$

在上式中, $\mathbf{e}^0 = \mathbf{L}\mathbf{u}^0 = (\mathbf{L}\mathbf{N})\mathbf{d}^0$, $\bar{\mathbf{f}}_k' = (\partial \bar{\mathbf{f}} / \partial b_k) \bar{\mathbf{b}}$, 其它带(')函数有类似的意义.

二次方程

$$\mathbf{K} \mathbf{d}'' = \mathbf{F}''$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'' = & \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \left\{ \frac{1}{2} \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}}_{kl}'' J_V^0 dV + \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}}_k'' (J_V^0)_l dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}}^0 (J_V^0)_{kl} dV \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_r} \mathbf{N}^T [\bar{\mathbf{p}}_{kl}'' J_S^0 + 2\bar{\mathbf{p}}_k'' (J_S^0)_l + \bar{\mathbf{p}}^0 (J_S^0)_{kl}] dS - \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}_{kl}'' (\mathbf{L}\mathbf{N}) \mathbf{d}^0 J_V^0 dV \\ & - \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}_k' (\mathbf{L}\mathbf{N}) \mathbf{d}_l' J_V^0 dV - \int_V (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}_k' (\mathbf{L}\mathbf{N}) \mathbf{d}^0 (J_V^0)_l dV \\ & \left. - \int_V (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}_0 (\mathbf{L}\mathbf{N}) \mathbf{d}_k' (J_V^0)_l dV - \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}_0 (\mathbf{L}\mathbf{N}) \mathbf{d}^0 (J_V^0)_{kl} dV \right\} \Delta b_k \Delta b_l \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\mathbf{d}'' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q d''_{ki} \Delta b_k \Delta b_l \tag{3.19}$$

位移的均值为

$$E[\mathbf{d}] = \mathbf{d}^0 + \bar{\mathbf{d}}''$$

其中

$$\bar{\mathbf{d}}'' = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q d''_{ki} \text{cov}(b_k, b_l) \right\} \tag{3.21}$$

位移的自协方差矩阵为

$$\text{cov}(d^i, d^j) = \left\{ \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \bar{d}_{b_k}^i \bar{d}_{b_l}^j \text{cov}(b_k, b_l) \right\} \tag{3.22}$$

式中, d^i 为 \mathbf{d} 的第 i 个自由度, $\bar{d}_{b_k}^i = \left(\frac{\partial d^i}{\partial b_k} \right)_{\bar{\mathbf{b}}}$.

应力的均值为

$$E(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{D}^0 \mathbf{e}^0 + \left\{ \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \left[\mathbf{D}_i^t \mathbf{B}(d^i)^{(m)} + \frac{1}{2} \mathbf{D}_i^l \mathbf{B}(d^0)^{(m)} \right] \text{cov}(b_k, b_l) \right\} \tag{3.23}$$

应力的自协方差矩阵为

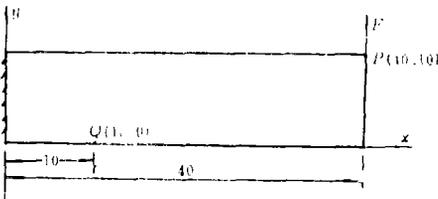
$$\begin{aligned} \text{cov}(\boldsymbol{\sigma}^m, \boldsymbol{\sigma}^n) = & \left\{ \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q [(\bar{\mathbf{D}}^m \mathbf{B}^m \mathbf{d}_{b_k}^m)(\bar{\mathbf{D}}^n \mathbf{B}^n \mathbf{d}_{b_l}^n)^T \right. \\ & + (\bar{\mathbf{D}}_{b_k}^m \mathbf{B}^m \bar{\mathbf{d}}^m)(\bar{\mathbf{D}}_{b_l}^n \mathbf{B}^n \bar{\mathbf{d}}^n)^T + \bar{\mathbf{D}}^m \mathbf{B}^m \bar{\mathbf{d}}_{b_k}^m)(\bar{\mathbf{D}}_{b_l}^n \mathbf{B}^n \bar{\mathbf{d}}^n)^T \\ & \left. + (\bar{\mathbf{D}}_{b_l}^m \mathbf{B}^m \bar{\mathbf{d}}^m)(\bar{\mathbf{D}}^n \mathbf{B}^n \bar{d}_{b_l}^n)^T] \text{cov}(b_k, b_l) \right\} \end{aligned} \tag{3.24}$$

其中

$$\bar{\mathbf{D}}^m = \mathbf{D}^{0m}, \quad \bar{\mathbf{D}}_{b_k}^m = \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial b_k} \right)_{\bar{\mathbf{b}}}$$

四、算 例

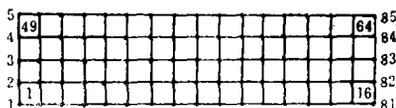
图(1.a)所示为一悬臂薄板, 在端部 P 点受一集中力 F 作用. 设板的厚度为随机变化. 已知板边长为 40cm, 高 H 为 10cm, 弹性模量 $E = 3.0 \times 10^7 \text{N/cm}^2$, 泊松比 $\nu = 0.3$, $F = 100 \text{N}$. 板的厚度 h 的均值为 $E[h] = 1.0 \text{cm}$, 标准偏差 $\sigma = 0.01$, 随机场的自协方差函数为



图(1.a) 悬臂薄板

$$\begin{aligned} \text{cov}[h(x_r, y_r), h(x_s, y_s)] \\ = \sigma^2 \exp\{[(x_r - x_s)/dx]^2 \\ \cdot \exp\{[(y_r - y_s)/dy]^2\} \end{aligned}$$

其中, dx 为 x 方向衰减因子, dy 为 y 方向衰减因子. 在本例中, $dx = 48.00$, $dy = 18.65$, 分析 P, Q 两点位移统计特性.



图(1.b) 有限元网格图

将悬臂板离散为 64 个单元, 网格划分如图(1.b)所示.

单元厚度为随机函数，位移场采用线性插值。随机场相同， $q=64$ 。

计算结果见下表。

	$v(40,10)$		$v(10,0)$	
	均 值	标准偏差	均 值	标准偏差
本文方法	0.00892	0.000838	0.000837	0.0000808
文[6]	0.00879	0.000825	0.000830	0.0000801

参 考 文 献

- [1] 中桐滋、久田俊明, 《确率有限要素法入门》, 培风馆(1985).
- [2] 钱伟长, 《广义变分原理》, 知识出版社(1985).
- [3] Vanmarcke, E., et al., Random fields and stochastic finite elements, *Structural Safety*, 3(1986), 143—166.
- [4] Liu, W. K., T. Belytschko and A. Mani, Random field finite elements, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 23(10)(1985).
- [5] Contreras, H., The stochastic finite element method, *Comput. Struct.*, 12 (1980), 341—348.
- [6] Lawrence, M. A., Basis random variables in finite element analysis, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 24(1987), 1849—1863.

The Random Variational Principle and Finite Element Method

Zhang Ru-qing Gao Hang-shan

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing)

Abstract

In this paper, we introduced the random materials, geometrical shapes, force and displacement boundary condition directly into the functional variational formulations and developed a unified random variational principle and finite element method with the small parameter perturbation method. Numerical examples showed that the methods have the advantages of the simple and convenient program implementation, and are effective for the random mechanics problems.

Key words variational principle, finite element method, perturbation method