

矩形薄板的屈曲状态*

何录武 程昌钧

(兰州大学力学系, 1991年6月17日收到)

摘 要

本文根据薄板的广义变分原理, 用有限元法对单向受压矩形板的屈曲状态进行了讨论, 并用延续算法获得了在不同边界条件下的屈曲状态。

关键词 有限元 延续算法 分支点 分支解

一、引 言

板壳在工程中是一种非常重要的结构, 并且结构的屈曲已成为结构破坏的一种主要形式。对于 Von Kármán 板, 屈曲状态的存在性已在 [1~3] 中给予了证明, 但由于非线性问题的复杂性, 要获得解析解一般是不可能的, 因此, 目前主要使用的方法是近似解法和数值方法。例如: 摄动法^[4], 差分法^[6]和有限元法^[6,7]等。尤其是有限元法, 随着电子计算机技术的迅速发展, 在板壳的非线性分析中已成为一个十分有力的手段。本文根据薄板的广义变分原理 (以挠度和应力函数为变量)^[3,7], 通过有限元离散得到了板的屈曲问题的离散方程。最后, 用延续算法计算获得了单向受压矩形板在不同边界条件下的屈曲状态。

二、屈曲问题的离散方程

按照 [8], 当作用在板的边界上的应力的合力和合力矩等于零时, 板的屈曲问题可以转化成求下面泛函的非零驻点^[3,7]:

$$\Pi = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial Y_1^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial X_1 \partial Y_1} \right] \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial X_1^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial Y_1^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial X_1 \partial Y_1} \end{bmatrix} dX_1 dY_1$$

* 郭仲衡推荐, 国家和甘肃省自然科学基金资助项目。

$$\begin{aligned}
& -\frac{h}{2E} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y_1^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1 \partial Y_1} \right] \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y_1^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1 \partial Y_1} \end{bmatrix} dX_1 dY_1 \\
& + \frac{h}{2} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial X_1}, \frac{\partial w}{\partial Y_1} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y_1^2} & -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1 \partial Y_1} \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial X_1} \\ \frac{\partial w}{\partial Y_1} \end{bmatrix} dX_1 dY_1 \\
& + \frac{\lambda h}{2} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial X_1}, \frac{\partial w}{\partial Y_1} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial Y_1^2} & -\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial X_1 \partial Y_1} \\ -\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial X_1 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial X_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial X_1} \\ \frac{\partial w}{\partial Y_1} \end{bmatrix} dX_1 dY_1 \quad (2.1)
\end{aligned}$$

其中(2.1)中的挠度 w 和应力函数 ψ 必须满足它们相应的边界条件, ψ_0 为未屈曲状态时的应力函数, Ω 和 h 分别表示薄板未变形时在 X_1 - Y_1 平面内所占的区域和板的厚度, E 和 μ 为板的杨氏模量和泊松比, 抗弯刚度 $D = Eh/12(1-\mu^2)$, λ 是一个无量纲的载荷参数.

通过有限元离散, 相应于(2.1)的无量纲离散方程可以写成:

$$(A - \lambda C)x + F_1(x)x = 0 \quad (2.2)$$

(2.2)可以认为是经过边界条件处理后的形式, x 为广义的节点参数, A , C 和 $F_1(x)$ 是 $n \times n$ 实矩阵(n 表示广义节点参数的个数). 很明显, 对任何的 $\lambda \in R^1$, $x = 0$ 总是(2.2)的一个解, 它对应着未屈曲状态.

为了书写方便, (2.2)可写成更一般的形式:

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (2.3)$$

其中 $F: R^n \times R^1 \rightarrow R^n$, 并且对 $\forall \lambda \in R^1$, 有 $F(0, \lambda) = 0$.

对于(2.2)或(2.3), 确定在未屈曲状态上的奇点等价于求 λ 使下面齐次方程

$$(A - \lambda C)x = 0 \quad (2.4)$$

有非零解. (2.4)是一个广义特征值问题, 我们可采用子空间迭代法^[7]来求所需的特征值和相应的特征向量. 我们称从特征值处分支出去的非零解为板的屈曲状态. 在工程上, 按绝对值最小的特征值一般称为屈曲载荷.

三、数值计算方法

下面我们将给出一个求解(2.2)的非零解的数值方法. 令 λ^* 是(2.4)的一个特征值, 假定 $\dim \text{Null}(F_x(0, \lambda^*)) = 1$, 并记 e_1 为相应于 λ^* 的特征向量. 这时, 我们可以证明 λ^* 是一个单特征值(单特征值的定义见[9]). 因此, λ^* 是一个分支点并且存在有唯一的屈曲状态.

为了获得(2.2)在大范围的分支解, 首先, 我们必须先求得在 λ^* 处附近的分支解. 但由于 $F_x(0, \lambda)$ 在 $\lambda = \lambda^*$ 处的奇异性, 寻找一个有效的计算方法尤为重要. 文献[9]给出了一个

非常实用的迭代方法, 对于这里的情况, 它可以写成如下步骤:

$$1) \quad \eta^{(0)}(0) = \frac{1}{2} \langle F_{xz}(0, \lambda^*) e_1 e_1, e_1 \rangle / \langle F_{xz}(0, \lambda^*) e_1, e_1 \rangle$$

$$2) \quad F_z(0, \lambda^*) v^{(0)}(0) = \frac{1}{2} F_{xz}(0, \lambda^*) e_1 e_1 - \eta^{(0)}(0) F_{xz}(0, \lambda^*) e_1 \quad (3.1a, b)$$

$$3) \quad (\eta^{(k+1)}(\xi) - \eta^{(k)}(\xi)) = -\xi^{-2} \langle F((\xi e_1 + \xi^2 v^{(k)}(\xi)), (\lambda^* + \xi \eta^{(k)}(\xi))), e_1 \rangle / \langle F_{xz}(0, \lambda^*) e_1, e_1 \rangle$$

$$4) \quad F_z(0, \lambda^*) (v^{(k+1)}(\xi) - v^{(k)}(\xi)) = -\xi^{-2} F((\xi e_1 + \xi^2 v^{(k)}(\xi)), (\lambda^* + \xi \eta^{(k)}(\xi))) - F_{xz}(0, \lambda^*) e_1 (\eta^{(k+1)}(\xi) - \eta^{(k)}(\xi))$$

$$(v^{(k)}(\xi) \in N^\perp \quad k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.2a, b)$$

其中 ξ 为正的实变量, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 R^n 中的内积并且 $N = \text{Null } F_z(0, \lambda^*)$.

对于(3.1)和(3.2), 序列 $\{v^{(k)}(\xi)\}$ 和 $\{\eta^{(k)}(\xi)\}$ 是收敛的, 只要 ξ 取的适当小. 我们的数值计算结果表明这个迭代的收敛速度是相当快的. 若记 $v(\xi)$ 和 $\eta(\xi)$ 为序列 $\{v^{(k)}(\xi)\}$ 和 $\{\eta^{(k)}(\xi)\}$ 的极限, 那么

$$x = \xi e_1 + \xi^2 v(\xi), \quad \lambda = \lambda^* + \xi \eta(\xi) \quad (3.3)$$

就是一个在 $\lambda = \lambda^*$ 处附近的屈曲状态 (一般称为小解).

当对某一 ξ 我们获得了这屈曲状态 (3.3), 接下来的问题是如何延拓这分支解 (3.3). 若在这屈曲状态上没有奇点, 那么, 用一般的牛顿迭代法可逐步求得大范围的屈曲状态. 否则, 我们在延拓这分支解中会遇到许多问题, 如: 如何穿越奇点以及在分支点处分支解如何转接, 等等. 这些问题都是非常复杂的, 详细的讨论见 [9]. 但为了克服单极限点所造成的困难, 我们可引入一个参数方程 $N_1(x, \lambda, s)$. 这样, 我们对(2.2)的求解可转化到对下面方程组的求解:

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (3.4a)$$

$$N_1(x, \lambda, s) \equiv \langle (x(s) - x(s_0)), \dot{x}(s_0) \rangle + (\lambda(s) - \lambda(s_0)) \dot{\lambda}(s_0) - (s - s_0) = 0 \quad (3.4b)$$

这里, s 是一个基本参数, $(\dot{x}(s_0), \dot{\lambda}(s_0))$ 表示(3.4)的解曲线在 s_0 处的单位切向量.

假设 $(x(s_0), \lambda(s_0))$ 是(3.4)的解曲线在 $s = s_0$ 处的点, 并且已知. 那么, 为了求解曲线上的下一个点, 我们可以采用下面迭代方法:

$$\left. \begin{aligned} & \begin{pmatrix} F_x(\bar{x}'_k, \bar{\lambda}'_k) & F_\lambda(\bar{x}'_k, \bar{\lambda}'_k) \\ \dot{x}(s_0) & \dot{\lambda}(s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}_k \\ \Delta \bar{\lambda}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k \\ \Delta s_k \end{pmatrix} \\ & \bar{x}'_{k+1} = \bar{x}'_k + \Delta \bar{x}_k, \quad \bar{\lambda}'_{k+1} = \bar{\lambda}'_k + \Delta \bar{\lambda}_k \\ & \bar{x}'_0 = x_0, \quad \bar{\lambda}'_0 = \lambda_0 \\ & f_0 = 0, \quad \Delta s_0 = \Delta s > 0 \\ & f_k = -F(\bar{x}'_k, \bar{\lambda}'_k), \quad \Delta s_k = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

迭代的收敛条件为:

$$(\Delta \bar{x}_k)^T (\Delta \bar{x}_k) + \Delta \bar{\lambda}_k \cdot \Delta \bar{\lambda}_k \leq \varepsilon_1 \quad (3.6a)$$

$$F(\bar{x}'_k, \bar{\lambda}'_k)^T F(\bar{x}'_k, \bar{\lambda}'_k) \leq \varepsilon_2 \quad (3.6b)$$

其中 ε_1 和 ε_2 为预先所给的精度, k 为迭代的次数.

如果(3.6)被满足, 则可称 $x = \bar{x}'_k, \lambda = \bar{\lambda}'_k$ 为(3.4)在 $s = s_0 + \Delta s$ 处的解. 否则, 要重新选

择适当的 Δs 进行迭代。一般来说, 在 (3.5) 中, 选择一个好的初始迭代值是非常关键的问题, 在我们的计算中, 初值的选择取为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}'_1 &= x_0 + \Delta s \cdot \dot{x}(s_0) + (\Delta s)^2(\dot{x}(s_0) - \dot{x}(\bar{s}))/2\Delta\bar{s} \\ \bar{\lambda}'_1 &= \lambda_0 + \Delta s \cdot \dot{\lambda}(s_0) + (\Delta s)^2(\dot{\lambda}(s_0) - \dot{\lambda}(\bar{s}))/2\Delta\bar{s} \end{aligned} \right\} \quad (3.7a, b)$$

这里 \bar{s} 为 s_0 的前一点, $(\dot{x}(\bar{s}), \dot{\lambda}(\bar{s}))$ 为 \bar{s} 处的单位切向量, $\Delta\bar{s} = s_0 - \bar{s} > 0$ 。若 $(x(s_0), \lambda(s_0))$ 为我们整个延拓的起点, 我们可以取 $(x(s_0), (\lambda(s_0) - \lambda^*) / (x(s_0)^T x(s_0) + (\lambda(s_0) - \lambda^*)^2))$ 为 s_0 处的近似的单位切向量。为了保证这延拓过程不断前进, 则可进一步要求 $(\dot{x}(s_0), \dot{\lambda}(s_0))^T (\dot{x}(\bar{s}), \dot{\lambda}(\bar{s})) > 0$ 。(3.5) 一般被称为延续算法。

四、数值结果

按照前面的讨论, 现在我们来考虑单向受压矩形板的屈曲状态, 如图 1 所示。

挠度 w 的边界条件考虑下面四种情况:

- 1) KF : 四边夹紧 (固支); 2) KS : 四边简支;
- 3) KX : 受压边简支, 另一对边夹紧; 4) KY : 受压边夹紧, 另一对边简支。

从图 1 中可以看到, 应力函数 ψ 的边界条件可写成 $\psi = \partial\psi / \partial n = 0$ 。

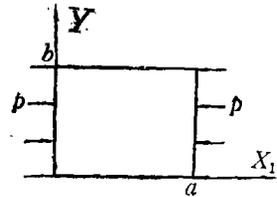


图 1

引入下面无量纲变量和参数:

$x = X_1/b, y = Y_1/b, l = a/b, \lambda = Phb^2/D$ 。对于矩形板, 在有限元分析中, 我们采用矩形单元, 节点参数为 w, ψ 以及它们的一阶偏导数在单元角点上的值, 并将板划分成 10×10 网格。

对于不同的 l , 我们用子空间迭代法获得了前三个特征值 (表 1~2)。对于方板 ($l=1$),

表 1 ($l=1, \mu=0.3, 10 \times 10$ 网格)

边界条件	λ_1	λ_2	λ_3
KF	97.401	111.791	188.382
KS	39.042	60.683	107.808
KY	65.551	100.782	176.916
KX	73.917	83.608	114.672

表 2 ($\mu=0.3, 10 \times 10$ 网格)

l	KF			KY		
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3
0.5	187.462	304.192	342.223	181.759	270.106	344.207
1.5	79.376	88.367	133.835	52.196	58.885	92.979
2.0	73.219	75.514	97.025	46.553	50.827	70.663

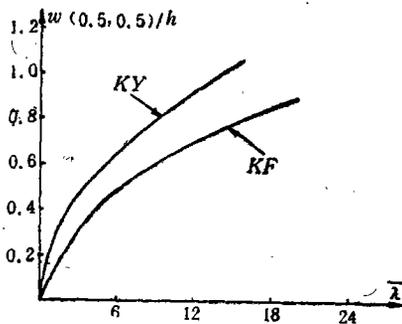


图 2 ($l=1, \mu=0.3, \bar{\lambda} = \lambda - \lambda_1$, $KF, \lambda_1=97.401, KY, \lambda_1=65.551$)

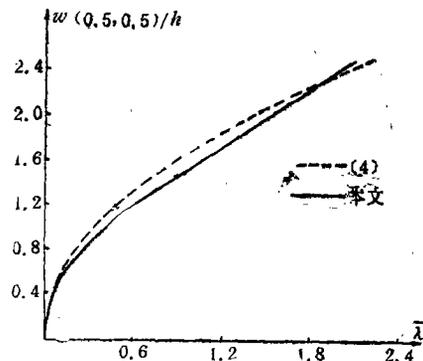


图 3 $KS(l=1, \mu=0.3), \bar{\lambda} = \lambda / \lambda_1, \lambda_1=39.042$

我们计算出了从第一特征值处分支出去的屈曲状态。图2~3分别给出了在 KF , KY 和 KS 这三种边界条件下的中心挠度(w_{\max}/h)关于 λ 的变化情况,在图3中,虚线为[4]用摄动法所得到的结果。对于 $l=2$ 的矩形板,获得了从 KY 的前两个特征值处分支出去的屈曲状态,图4~5显示了在不同的 λ 值下 X_1 方向的挠度(w/h)的变化情况。

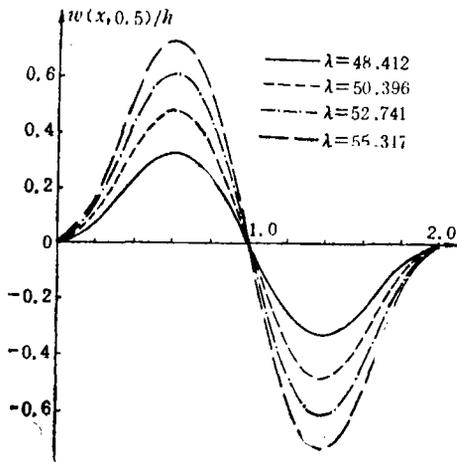


图4 $KY(l=2, \mu=0.3), \lambda_1=46.553$

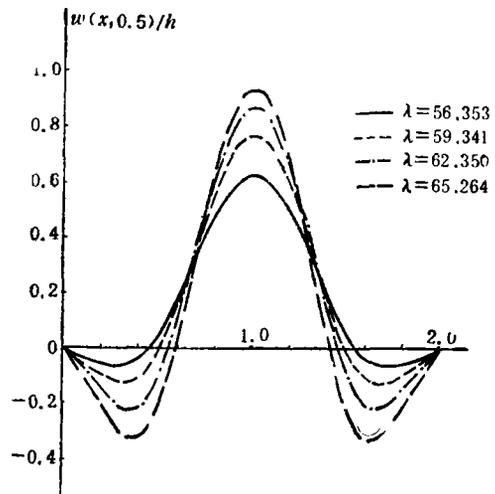


图5 $KY(l=2, \mu=0.3), \lambda_2=50.827$

参 考 文 献

- [1] Berger, M. S., On von Karman's equations and the buckling of a thin plate, I: The clamped plate, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (4) (1967), 687—719.
- [2] Berger, M. S. and P. C. File, On von Karman's equations and the buckling of a thin plate, II: Plate with general edge condition, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21(3) (1968), 227—241.
- [3] Yang Xiao and Cheng Changjun, Variational principles on perforated thin plates and finite element method on buckling and post-buckling analysis, *Acta Mechanica Sinica*, 7(2) (1991), 1—10.
- [4] 张建武、范祖尧, 简支矩形板后屈曲平衡路径的一个摄动解, *上海交通大学学报*, 18 (5) (1984), 101—111.
- [5] Bauer, L. and E. L. Reiss, Nonlinear buckling of rectangular plates, *SIAM J. Appl. Math.*, 13(3) (1965), 603—626.
- [6] 吕小安, 开孔柱壳的非线性理论与稳定性问题, 兰州大学博士学位论文 (1990).
- [7] 何录武, 夹层板的屈曲和分支, 兰州大学博士学位论文 (1990).
- [8] 朱正佑、程昌钧, 关于开孔薄板大挠度问题的一般数学理论, *力学学报*, 18(2) (1986), 123—135.
- [9] 朱正佑、程昌钧, 《分支问题的数值计算方法》, 兰州大学出版社 (1989).

The Buckled States of Rectangular Plates

He Lu-wu Cheng Chang-jun

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper, based on the generalized variational principle of plates, the buckled states of rectangular plates under uniaxial compression are studied by use of the finite element method and the numerical analysis results under various boundary conditions are obtained by using the continuation calculation method.

Key words finite element, continuation method, bifurcation point, bifurcation solution