应用数学和力学, 第 25 卷 第 3 期(2004 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 03_0297_08

不确定非完整系统的鲁棒适应控制*

慕小武[1], 虞继敏[1], 毕卫萍[1], 程代展[2]

(1. 郑州大学 数学系, 郑州 450052;
2. 中国科学院 数学与系统研究院 系统科学研究所, 北京 100080)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了一类带有不确定参数以及强非线性干扰项的链式非完整系统的鲁棒适应控制问题• 利用 State_scaling 和 back_stepping 技巧, 构造性地给出了一种使系统镇定的反馈设计方法, 使闭环系统指数稳定•

关 键 词: 非完整系统; 适应控制; 稳定性
中图分类号: O231.2 文献标识码: A

引 言

近几年来, 非完整系统的控制与镇定问题受到了广泛的关注, 研究该类问题的主要困难之一就是不存在光滑甚至连续的反馈使系统镇定, 所以寻找新的设计方法成为受人关注的困难的课题• 但目前的很多结果都是研究无漂移项的链式非完整控制系统的[1~6]• 本文研究了一类带有不确定参数以及强非线性干扰项的链式非完整系统的鲁棒适应控制问题, 利用 state_scaling 和 back_stepping 技巧, 构造性地给出了一种使系统镇定的反馈设计方法•

1 问 题 提 法

1993 年, Murray 和 Statry[7] 得到了一大类完整力学控制系统的正则表示:

$$\begin{cases} \dot\xi_1 = u_1, \\ \dot\xi_2 = u_2, \\ \dot\xi_3 = \xi_2 u_1, \\ \vdots \\ \dot\xi_n = \xi_{n-1} u_1 \bullet \end{cases} \tag{1}$$

本文将研究如下带有不确定及干扰的非完整系统的全局镇定问题:

$$\begin{cases} \dot x_0 = u_0 + \phi_0^d(t, x_0), \\ \dot x_i = (x_{i+1} + \theta^{\mathrm T} x_0^{n-i} g_i(x_1, \cdots, x_i)) u_0 + \phi_i^d(t, x_0, \boldsymbol x, u_0), \\ \vdots \\ \dot x_{n-1} = u + \theta^{\mathrm T} x_0 g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) u_0 + \phi_{n-1}^d(t, x_0, \boldsymbol x, u_0) \bullet \end{cases} \tag{2}$$

* 收稿日期: 2002_01_21; 修订日期: 2003_09_26
作者简介: 慕小武(1963—) , 男, 教授, 博士(联系人. Tel/ Fax: 86_371_7762897; E_mail: muxw@ public2. zz. ha. cn)•

这儿 $\boldsymbol{x}=(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})^{\mathrm{T}} \in R^n$ 和 $(u_0, u)^{\mathrm{T}} \in R^3$ 分别表示系统的状态和控制变量, $\theta \in R^p$ 表示未知参数, 而 ϕ_i^d 表示不确定的漂移项•

注 1 显然, 当 $\phi_i^d \equiv 0, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ 及 $\theta=\mathbf{0}$ (或 $g_j \equiv 0, 1 \leqslant j \leqslant n-1$) 时, 未干扰系统(2) 反馈等价于标准的链系统(1)•

注 2 当 $\theta=\mathbf{0}$ 或 $(g_j \equiv 0, 1 \leqslant j \leqslant n-1)$, 系统(2) 正是[2] 中所讨论的系统•

注 3 当 $\phi_i^d \equiv 0, 1 \leqslant i \leqslant n-1$, 系统(2) 正是[1] 中所讨论的系统• 本文的目标是设计如下动态反馈使系统镇定

$$\begin{cases} \dot{\chi}=\omega(\boldsymbol{x}, \chi, t) \qquad (\chi \in R^q), \\ \boldsymbol{u}=\vartheta(\boldsymbol{x}, \chi, t), \end{cases} \tag{3}$$

这儿 ω 和 ϑ 是光滑函数, 使对 $\forall(\boldsymbol{x}(0), \chi(0)) \in R^n \times R^q$ 闭环系统(2) ~ (3) 的解 $(\boldsymbol{x}(t), \chi(t))$ 在 $t \geqslant 0$ 存在且有界, 而且当 t 趋于 $+\infty$ 时, $\boldsymbol{x}(t)$ 趋于0• 在本文中, $q \geqslant p$, χ 的分量可理解为对未知参数 θ 的估计, 我们也把(3) 称为适应控制器•

State_scaling 技巧在本文中我们对系统(2) 做如下假定:

假设 1 $\forall i, 0 \leqslant i \leqslant n-1$, 存在非负光滑函数 ϕ_i 满足下列不等式:

$$|\phi_0^d(t, x_0)| \leqslant c_{03}|x_0|, \tag{4}$$

$$|\phi_i^d(t, x_0, u_0)| \leqslant |(x_1, \cdots, x_i)| \phi_i(x_0, x_1, \cdots, x_i, u_0),$$
$$\forall(t, x_0, \boldsymbol{x}, u_0) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times R^{n-1} \times \mathbf{R}• \tag{5}$$

假设 2

$$g_i(0)=0 \qquad (\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n-1)• \tag{6}$$

注4 假设 1 中, 不确定的非线性项 ϕ_i^d 满足一组三角型条件, 而且界函数 ϕ_i 一般地是非线性的, 这个结构性条件在非线性适应控制和鲁棒控制中是相当普遍的假定([2]Z. P. Jiang, 2000)•

本文中我们将对一类带有不确定参数以及强非线性干扰项的链式非完整系统(2), 利用 state_scaling 和 back_stepping 技巧, 构造性地给出了一种使系统鲁棒镇定的反馈设计方法• (2) 所满足的三角型结构使我们能够对 u_0 和 u 分别设计鲁棒适应控制律• 下面引进一组 state_scaling 变换[2][8]:

$$z_i=x_i / x_0^{n-i-1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \tag{7}$$

在新的 z 坐标下, 系统(2) 可变为下列形式:

$$\begin{cases} \dot{z}_i=\dfrac{u_0}{x_0} z_{i+1}+\theta^{\mathrm{T}} x_0 g_i(x_1, x_2, \cdots, x_i) u_0+ \\ \qquad \dfrac{\phi_i^d}{x_0^{n-i-1}}-\dfrac{(n-i-1)(u_0+\phi_i^d(t, x_0))}{x_0} z_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-2), \\ \dot{z}_{n-1}=u+\theta^{\mathrm{T}} x_0 g_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) u_0+\phi_{n-1}^d(t, x_0, \boldsymbol{x}, u_0)• \end{cases} \tag{8}$$

由假设 1, 我们可选择控制律 u_0 为

$$u_0=-\lambda_0 x_0, \tag{9}$$

这儿 $\lambda_0>c_{03}$ 是正的设计参数•

类似于[2], 我们可得到下列引理

引理 1 $\forall t_0 \geqslant 0$ 和 $\forall x_0(t_0) \in \mathbf{R}$, 相应的(2) + (9) 的解 $x_0(t)$ 对 $t \geqslant t_0$ 存在, 且满足

$$x_0 \geqslant 0 \Rightarrow x_0(t_0) \mathrm{e}^{-(\lambda_0+c_{03})(t-t_0)} \leqslant x_0(t) \leqslant x_0(t_0) \mathrm{e}^{-(\lambda_0-c_{03})}, \tag{10}$$

$$x_0 \leqslant 0 \Rightarrow x_0(t_0) \mathrm{e}^{-(\lambda_0-c_{03})(t-t_0)} \leqslant x_0(t) \leqslant x_0(t_0) \mathrm{e}^{-(\lambda_0+c_{03})}, \tag{11}$$

注 5　由引理 1, 我们可得到集合 $\{(x_0, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}\times R^{n-1} \mid x_0 \neq 0\}$ 在系统(2) + (9) 下是正不变集合•

当 u_0 取(9) 的形式时, 系统(8) 对所有的 x_0 都是有定义的, 尽管坐标变换(7) 在 $x_0 = 0$ 没有定义•

现在我们把(8) 写成更为紧凑的形式:

$$\begin{cases} \dot z_i = -\lambda_0 z_{i+1} - \lambda_0 x_0^2\theta^{\mathrm T} x_0 g_i(x_1, \cdots, x_i) + \phi_i^d(t, x_0, \mathbf{x}) & (1 \leqslant i \leqslant n-2), \\ \dot z_{n-1} = u - \lambda_0 x_0^2\theta^{\mathrm T} g_i(x_1, \cdots, x_i) + \phi_{n-1}^d(t, x_0, \mathbf{x}) \end{cases} \tag{12}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant n-1$

$$\phi_i^d = \frac{\phi_i^d(t, x_0, \mathbf{x}, -\lambda x_0)}{x_0^{n-i-1}} - \frac{(n-i-1)(-\lambda_0 x_0 + \phi_i^d(t, x_0))}{x_0} z_i \tag{13}$$

引理 2　$1 \leqslant i \leqslant n-1$, 存在光滑非负的函数 ϕ_i 使得

$$|\phi_i^d(t, x_0, \mathbf{x})| \leqslant |(z_1, \cdots, z_i)|\, \phi_i(x_0, z_1, \cdots, z_i) \tag{14}$$

2　递归设计

我们先讨论 $x_0(t_0) \neq 0$ 的情形, 然后再讨论 $x_0(t_0) = 0$ 的情形•

1. $x_0(t_0) \neq 0$

由引理 1 及注 2, $x_0(t) \neq 0$, $\forall t \geqslant t_0$, 所以我们可以利用状态变换(7) 与通常的 back_stepping 技巧[9, 10, 11] 对系统(12) 设计控制律 u

第一步: 先从(12) 开始, 令

$$\dot z_1 = -\lambda_0 z_2 - \lambda_0 x_0^2\theta^{\mathrm T} g_1(x_1) + \phi_1^d(t, x_0, \mathbf{x}), \tag{15}$$

这儿把 z_2 看做虚拟输入, 定义

$$\xi_1 = z_1,$$

引进 Liapunov 函数 V_1:

$$V_1 = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2\lambda}|\hat\theta - \theta|^2, \tag{16}$$

这儿 $\hat\theta$ 是 θ 的估计, λ 是引理 2 中的设计常数•　取 V_1 沿着(15) 的时间导数, 我们得到:

$$\dot V_1 = \xi_1\dot\xi_1 + \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}\dot{\hat\theta}, \tag{17}$$

$$\dot V_1 = \xi_1(-\lambda_0 z_2 - \lambda_0 x_0^2\theta^{\mathrm T} g_i(x_1) + \phi_1^d(t, x_0, \mathbf{x})) + \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}\dot{\hat\theta}, \tag{18}$$

$$\dot V_1 \leqslant -\lambda_0\xi_1 z_2 + \xi_1^2\phi_1(x_0, z_1) - \lambda_0 x_0^2\theta^{\mathrm T} g_1(x_1)\xi_1 + \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}\dot{\hat\theta}, \tag{19}$$

$$\dot V_1 = -\lambda_0\xi_1\left(z_2 - \frac{\xi_1\phi_1(x_0, z_1)}{\lambda_0} + x_0^2\theta^{\mathrm T} g_1(x_1)\right) + \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}(\dot{\hat\theta} + \lambda\lambda_0 x_0^2\xi_1\hat\theta^{\mathrm T} g_1(x_1)), \tag{20}$$

现在我们定义函数 α_1 与 θ 的估计 $\hat\theta$ 并引进新的变量 ξ_2

$$\alpha_1(x_0, z_1, \hat\theta) = \frac{\xi_1\phi_i(x_0, z_1)}{\lambda_0} - x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_1(x_1) + \lambda_1\xi_1, \tag{21}$$

$$\dot{\hat\theta} = \tau_1^*(x_0, x_1) = -\lambda\lambda_0 x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_1(x_1), \tag{22}$$

$$\xi_2 = z_2 - \alpha_1(x_0, z_1, \hat\theta), \tag{23}$$

这儿 λ_1 是正的设计常数, 则由(20) 得到

$$\dot{V}_1 \leqslant \lambda_0 \lambda_1 \xi_1^2 - \lambda_0 \xi_1 \xi_2. \tag{24}$$

注意 α_1 是光滑函数并满足

$$\begin{cases} \alpha_1(x_0, 0, \hat{\theta}) = 0 & (\forall x \in \mathbf{R}), \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_0}(x_0, 0, \hat{\theta}) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

第 i 步: $(2 \leqslant i \leqslant n-2)$: 假定在第$(i-1)$ 我们已经定义好了 α_{i-1}、$\hat{\theta}$、ξ_i 及 Liapunov 函数 V_{i-1},

$$V_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^2 + \frac{1}{2\lambda} | \hat{\theta} - \theta |^{\mathrm{T}},$$

沿着 $(z_1, \cdots, z_{i-1})$ _ 子系统(12) 满足

$$\dot{V}_{i-1} \leqslant - \sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_0 \lambda_j - i + 1 + j) \xi_j^2 - \lambda_0 \xi_{i-1} \xi_i \qquad (\lambda_j > 1), \tag{26}$$

这儿

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau_{i-1}^*(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, \hat{\theta}), \tag{27}$$

$$\xi_i = z_i - \alpha_{i-1}(x_0, z_1, \cdots, z_{i-1}, \hat{\theta}) = 0. \tag{28}$$

注意到 α_{i-1} 是光滑函数并满足

$$\alpha_{i-1}(x_0, \cdots, 0, \hat{\theta}) = 0 \qquad (\forall x_0 \in \mathbf{R}), \tag{29}$$

所以由(29), 我们有

$$\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_0}(x_0, \cdots, 0, \hat{\theta}) = 0 \qquad (\forall x_0 \in \mathbf{R}). \tag{30}$$

现在, 我们希望对 $(z_1, \cdots, z_i)$ _ 子系统(14) 获得类似的性质, 其中 z_{i+1} 被认为是虚拟输入, 考虑 Liapunov 函数:

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \xi_i^2, \tag{31}$$

取 V_i 相对于(12) 的时间导数, 并考虑到(26)、(28) 我们有:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = {} & \dot{V}_{i-1} + \xi_i \dot{\xi}_i \leqslant \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_0 \lambda_j - i + 1 + j) \xi_j^2 - \lambda_0 \xi_{i-1} \xi_i + \\ & \frac{1}{\lambda} (\hat{\theta} - \theta)^{\mathrm{T}} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1}^*) + \xi_i \Bigg[- \lambda_0 z_{i+1} - \lambda_0 x_0^2 \theta^{\mathrm{T}} g_i(x_1, \cdots, x_i) + \\ & \phi_i^d(t, x_0, \boldsymbol{x}) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_0} \dot{x}_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_i} \dot{z}_j - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \Bigg] = \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_0 \lambda_j - i + 1 + j) \xi_j^2 - \lambda_0 \xi_i z_{i+1} - \lambda_0 \xi_{i-1} \xi_i + \\ & \xi_i \Big(\phi_i^d(t, x_0, \boldsymbol{x}) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_0} (- \lambda_0 x_0 + \phi_0^d) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_j} (- \lambda_0 z_{j+1} + \phi_0^d) \Big) + \\ & \xi_i \Big(- \lambda_0 x_0^2 \theta^{\mathrm{T}} g_i(x_1, \cdots, x_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_j} \lambda_0 x_0^2 \theta^{\mathrm{T}} g_i(x_1, \cdots, x_j) - \\ & \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \frac{1}{\lambda} (\hat{\theta} - \theta)^{\mathrm{T}} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1}^*). \end{aligned} \tag{32}$$

由(28) ~ (30) 和假设 1, 通过直接计算及配方, 存在一个非负的光滑函数 ϕ_i 使得

$$\Big| -\lambda_0\xi_{i-1}\xi_i+\xi_i\Big(\phi_i^d(t,x_0,\boldsymbol{x})-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_0}(-\lambda_0x_0+\phi_0^d)-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial z_j}(-\lambda_0z_{j+1}+\phi_0^d)\Big|\leqslant\sum_{j=1}^{i-1}\xi_i^2+\xi_i^2\phi_i(x_0,z_1,\cdots,z_i)\cdot \tag{33}$$

由(32)、(33)我们有

$$\dot V_i\leqslant-\sum_{j=1}^{i-1}(\lambda_0\lambda_j-i+j)\xi_j^2-\lambda_0\xi_i\Big(z_{i+1}-\frac{1}{\lambda_0}\xi_i\phi_i(x_0,z_1,\cdots,z_i)+x_0^2\hat\theta^{\mathrm T}g_i(x_1,\cdots,x_i)-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial z_j}x_0^2\hat\theta^{\mathrm T}g_i(x_1,\cdots,x_j)+\frac{1}{\lambda_0}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat\theta}\dot{\hat\theta}\Big)+\frac{1}{\lambda}(\hat\theta-\theta)^{\mathrm T}\Big(\dot{\hat\theta}-\tau_{i-1}^*+\lambda\lambda_0\xi_ix_0^2\Big(g_i(x_1,\cdots,x_i)-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial z_j}g_j(x_1,\cdots,x_j)\Big)\Big) \tag{34}$$

定义

$$\alpha_i(x_0,z_1,\cdots,z_i,\hat\theta)=\lambda_i\xi_i+\frac{1}{\lambda_0}\xi_i\phi_i(x_0,z_1,\cdots,z_i)-x_0^2\hat\theta^{\mathrm T}g_i(x_1,\cdots,x_i)+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial z_j}x_0^2\hat\theta^{\mathrm T}g_i(x_1,\cdots,x_i)-\frac{1}{\lambda_0}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat\theta}\dot{\hat\theta}, \tag{35}$$

$$\dot{\hat\theta}=\tau_{i-1}^*-\lambda\lambda_0\xi_ix_0^2\Big(g_i(x_1,\cdots,x_i)-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial z_j}g_i(x_1,\cdots,x_i)\Big)=\tau_i^*, \tag{36}$$

$$\xi_{i+1}=z_{i+1}-\alpha_i(x_0,z_1,\cdots,z_i,\hat\theta), \tag{37}$$

这儿 λ_i 是正常数。我们有:

$$\dot V_i\leqslant-\sum_{j=1}^{i-1}(\lambda_0\lambda_j-i+j)\xi_j^2-\lambda_0\lambda_i\xi_i^2-\lambda_0\xi_i\xi_{i+1}=-\sum_{j=1}^{i-1}(\lambda_0\lambda_j-i+j)\xi_j^2-\lambda_0\xi_i\xi_{i+1}\cdot \tag{38}$$

由构造, α_i 是光滑函数并满足:

$$\alpha_1(x_0,\cdots,0,\hat\theta)=0\qquad(\forall x\in\mathbf{R}), \tag{39}$$

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_0}(x_0,\cdots,0,\hat\theta)=0\cdot \tag{40}$$

第 $n-1$ 步:假设我们已经定义了光滑函数 α_{n-1}、$\hat\theta$, ξ_{n-1} 及 Liapunov 函数 V_{n-2} 并满足:

$$\dot V_{n-2}\leqslant-\sum_{j=1}^{i-2}(\lambda_0\lambda_j-n+2+j)\xi_j^2-\lambda_0\xi_{n-2}\xi_{n-1}, \tag{41}$$

$$\xi_{n-1}=z_{n-1}-\alpha_{n-2}(x_0,z_1,\cdots,z_i,\hat\theta), \tag{42}$$

$$\alpha_{n-2}(x_0,0,\cdots,0,\hat\theta)=0\qquad(\forall x_0\in\mathbf{R}), \tag{43}$$

$$\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial x_0}(x_0,\cdots,0,\hat\theta)=0\cdot \tag{44}$$

考虑 z_(12), 定义 Liapunov 函数 V_{n-2}

$$V_{n-1}=V_{n-2}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-2})+\frac{1}{2}\xi_{n-1}^2\cdot \tag{45}$$

取 V_{n-1} 沿着(12)的导数, 我们有

$$
\begin{aligned}
\dot V_{n-1} \leqslant{}& \dot V_{n-2} + \xi_{n-1}\dot\xi_{n-1} \leqslant \\
& -\sum_{j=1}^{n-2}(\lambda_0\lambda_j - n + 2 + j)\xi_j^2 - \lambda_0\xi_{n-2}\xi_{n-1} + \\
& \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}(\dot{\hat\theta} - \tau^*_{n-2}) + \xi_{n-1}(\dot z_{n-1} - \dot\alpha_{n-2}) = \\
& -\sum_{j=1}^{n-2}(\lambda_0\lambda_j - n + 2 + j)\xi_j^2 - \lambda_0\xi_{n-2}\xi_{n-1} + \\
& \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}(\dot{\hat\theta} - \tau^*_{i-2}) + \xi_{n-1}\Bigg(u - \lambda_0 x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + \\
& \phi^d_{n-1}(t, x_0, x_1, -\lambda x_0) - \frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial x_0}\dot x_0 - \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial z_j}\dot z_j - \frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial\hat\theta}\dot{\hat\theta}\Bigg) \leqslant \\
& -\sum_{j=1}^{n-2}(\lambda_0\lambda_j - n + 2 + j)\xi_j^2 + \xi_{n-1}u - \lambda_0\xi_{n-2}\xi_{n-1} + \\
& \xi_{n-1}\Big(\phi^d_{n-1}(t, x_0, x_1, -\lambda x_0) - \frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial x_0}\dot x_0 - \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial z_j}(-\lambda_0 z_{j+1} - \\
& \lambda_0 x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_i(x_1, \cdots, x_j) + \phi^d_j(t, x_0, \boldsymbol{x}))\Big) + \xi_{n-1}\Bigg(-\lambda_0 x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) - \\
& \frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat\theta}\dot{\hat\theta}\Bigg) + \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}(\dot{\hat\theta} - \tau^*_{i-2}) = \\
& -\sum_{j=1}^{n-2}(\lambda_0\lambda_j - n + 2 + j)\xi_j^2 + \xi_{n-1}u - \lambda_0\xi_{n-2}\xi_{n-1} + \\
& \xi_{n-1}\Big(\phi^d_{n-1}(t, x_0, x_1, -\lambda x_0) - \frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial x_0}\dot x_0 - \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial z_j}(-\lambda_0 z_{j+1} + \\
& \phi^d_j(t, x_0, \boldsymbol{x}))\Big) + \xi_{n-1}\Bigg(-\lambda_0 x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + \\
& \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial z_j}\lambda_0 x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_j(x_1, \cdots, x_j) - \frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial\hat\theta}\dot{\hat\theta}\Bigg) + \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}(\dot{\hat\theta} - \tau^*_{i-2}).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

由假设 1 及(41) ~ (44), 通过类似于[2]的直接计算, 存在一个非负光滑的函数 ϕ_{n-1} 满足:

$$
\begin{aligned}
&\Bigg| -\lambda_0\xi_{n-2}\xi_{n-1} + \xi_{n-1}\Bigg(\phi^d_{n-1} - \frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial x_0}(-\lambda_0 x_0 + \phi^d_0(t, x_0)) - \\
&\sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial z_j}(-\lambda_0 z_{j+1} + \phi^d_i)\Bigg)\Bigg| \leqslant \sum_{j=1}^{n-2}\xi_j^2 + \xi_{n-1}^2\phi_{n-1}(x_0, z_1, \cdots, z_{n-1}).
\end{aligned}
\tag{47}
$$

由(46)、(47) 我们有:

$$
\begin{aligned}
\dot V \leqslant{}& -\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_0\lambda_j - n + 2 + j)\xi_j^2 + \xi_{n-1}\Big(u - \lambda_0 x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + \\
& \sum_{j=1}^{n-2}\lambda_0 x_0^2\hat\theta^{\mathrm T} g_i(x_1, \cdots, x_j) - \frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial\hat\theta}\dot{\hat\theta} + \xi_{n-1}\phi_{n-1}(x_0, z_1, \cdots, z_{n-1})\Big) + \\
& \frac{1}{\lambda}(\hat\theta - \theta)^{\mathrm T}\Bigg(\dot{\hat\theta} - \tau^*_{n-2} + \lambda\lambda_0\xi_{n-1}x_0^2\Bigg(g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) - \\
& \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial z_j}g_j(x_1, \cdots, x_j)\Bigg)\Bigg),
\end{aligned}
\tag{48}
$$

令

$$
\dot{\hat\theta} = \tau^*_{n-2} - \lambda\lambda_0 x_0^2\xi_{n-1}\Bigg(g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) -
$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial z_j}g_j(x_1,\cdots,x_j)\right),\tag{49}$$

$$\begin{aligned}u=&-\lambda_0\lambda_{n-1}\xi_{n-1}-\xi_{n-1}\phi_{n-1}(x_0,z_1,\cdots,z_{n-1})+\\&\lambda_0x_0^2\left(\theta^{\mathrm{T}}g_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1})-\sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial z_j}\theta^{\mathrm{T}}g_j(x_1,\cdots,x_j)\right)+\frac{\partial\alpha_{n-2}}{\partial\theta}\dot{\theta},\end{aligned}\tag{50}$$

这儿 λ_{n-1} 是正常数. 由(49)、(50), 我们得到:

$$\dot{V}\leqslant-\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_0\lambda_j-n+1+j)\xi_j^2.\tag{51}$$

2\. $x_0(t_0)=0$

不失一般性, 我们假定 $t_0=0$, 当 $x_0(0)=0$. 时, 我们选择 u_0 如下:

$$u_0=u_0^*,\ u_0^*\neq0.\tag{52}$$

由于 ϕ_0 整体满足 Lipschit 条件, 所以解 $x_0(t)$ 在 $t\geqslant0$ 都存在. $\forall t'>0$, 在区间 $[0,t']$ 上, 对(2)+(52)应用于类似于上面的 back_stepping_based 技巧, 得到非线性反馈 $u=u^*(x_0,\boldsymbol{x})$, 由类似于(51)的不等式, 如果选择足够大的设计参数, 我们可得到(2)+(52)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[0,t']$ 上是存在的, 由于 $x_0(t')\neq0$, 我们在 t' 时刻分别切换 u_0 和 u 到(9)和(50).

3 稳定性分析

我们将要证明在前面得到的适应控制器满足适应调节的目的.

定理 在假设 1 和假设 2 下, 选择适应的设计参数 λ_i, 并应用以上描述的开关控制策略, 则闭环系统(2)+(49)+(50)的解在 $[0,\infty)$ 上是存在唯一且有界的, 而且我们还有:

$$\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{x}(t)|=0.$$

证明 由以上分析, 我们只需要证明 $\boldsymbol{x}_0(0)\neq0$ 的情形, 由(51), 我们有:

$$\dot{V}_{n-1}\leqslant-\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_0\lambda_j-n+1+j)\xi_j^2.\tag{53}$$

选择设计参数 λ_i 使得:

$$\lambda_0\lambda_j-n+1+j>0.$$

由(53), V_{n-1} 沿着(2)(49)(50)的轨道是有界的非增函数, 由此, ξ_i, θ 是有界的, 且 V 是一致连续的, 由 Babalat' 引理[12], 我们有:

$$\lim_{t\to+\infty}V_{n-1}=0,\tag{54}$$

由 V 的定义, 我们得到:

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_j=0,\tag{55}$$

由以上构造, 我们有:

$$\begin{cases}\xi_1=z_1,\\\xi_2=z_2-\alpha_1,\\\vdots\\\xi_{n-1}=z_{n-1}-\alpha_{n-2},\end{cases}\tag{56}$$

$$z_i=\frac{x_i}{x_0^{n-i-1}}\quad(1\leqslant i\leqslant n-2).\tag{57}$$

由此我们得到 x_i, z_i 是有界的, 且有:

$$\lim_{t\to\infty} z_i = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \tag{58}$$

$$\lim_{t\to\infty} x_i = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1)\cdot \tag{59}$$

[参 考 文 献]

[1] JIANG Zhong_ping, Pomet J B. Global stabilitzation of parametric chained_form systems by time_varying dynamic feedback[J]. Int Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 1996, **10**(1): 47—59.

[2] JIANG Zhong_ping. Robust exponential regulation of nonholonmic systems with uncertainties[J]. Automatica, 2000, **36**(2): 189—209.

[3] Astolfi A. Discontinuous control of nonholonomic systems[J]. Systems and Control Letters, 1996, **27**(1): 37—45.

[4] JIANG Zhong_ping. Iterative design of time_varying stabilizers for multi_input systems in chained form [J]. Systems and Control Letters, 1996, **28**(3): 255—262.

[5] JIANG Zhong_ping, Nijmeijer H. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, **44**(2): 265—279.

[6] JIANG Zhong_ping, Pomet J B. Combining back_stepping and time_varying techniques for a nwe set of adaptive controlers[A]. In: Pomet J B Ed. Proceedngs of 33rd IEEE Conference on Decision and Control[C]. Florida: Springer, 1994, 2207—2212.

[7] Murray R M, Sastry S. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1993, **38**(3): 700—716.

[8] Anold V I. Geometrical Methods of Ordinary Differetial Equations[M]. Berlin: Springer, 1987.

[9] Kanellakopoulos I, Kokotović P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. IEEE Trans Automat control, 1991, **36**(7): 1241—1253.

[10] Kanellakopoulos I, Kokotović P V, Morse A S. A toolkit for nonlinear feedback design[J]. Systems and Control Letters, 1992, **18**(1): 83—92.

[11] Marino R, Tomei P. Robust stabilization of feedback linearizable time_varyng uncertain nonlinear systems[J]. Automatica, 1993, **29**(2): 181—189.

[12] Khalil H K. Nonlinear Systems[M]. 2nd Ed. Upper Saddle River, N J: Prentice_Hall, 1996.

Robust Adaptive Control of Nonholonomic Systems With Uncertainties

MU Xiao_wu[1], YU Ji_min[1], BI Wei_ping[1], CHENG Dai_zhan[2]

(1. Department of Systems Science and Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, P.R.China;

2. Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P.R.China)

Abstract: Robust adaptive control of nonholonomic systems in chained form with linearly parameterized and strongly nonlinear disturbance and drift terms is dicussed. The novelty of the proposed method is a combined use of the state_scaling and the back_stepping procedure.

Key words: nonholonomic system; adaptive control; stability