应用数学和力学，第13卷第5期(1992年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

杆、壳理论在Hilbert空间的构造*

郑泉水　杨德品　宋固全

(江西工业大学，1991年1月9日收到)

摘　要

本文在Hilbert空间这一数学框架下系统地构造了杆、壳的一般理论，并成功地获得了对该理论系统的误差估计。

关键词　杆、壳理论　Hilbert空间　误差估计

一、引　　言

杆、壳理论的目的，是企图用一维或二维流形上有限变量的理论，提供杆、壳这些具有特殊几何的三维变形体的变形力学状态中最主要部份的描述．因此，它们本质上只能是近似理论．然而，对于这种根源于理论系统本身的近似性，却研究得很少[1]~[5]．但是，这个所谓理论系统的系统误差恰恰是判别一种杆、壳理论优、劣的重要指标之一，能否从杆、壳理论的某种构造过程本身，就给出该理论的误差估计呢？这正是本文关注的中心．

这篇文章利用三维方程近似化方法构造杆、壳理论，对于杆问题规定各个场量(如应力、位移等)在杆的每个横截面(二维区域)上属于加权平方可积的函数空间——一个Hilbert空间L^2；对于壳，则规定在法线区域上属于加权平方可积的函数空间．显然，这种规定并不会给理论的一般性带来实际的损害．于是，我们便可利用Hilbert空间的各种性质，特别是存在完备系这一属性，通过对完备系作有限截取，从而构造出(有限变量的)杆壳理论并同时获得方程系统的误差估计．

二、Hilbert空间$L^2(D)$和误差$O(\varepsilon_n)$

实数域上的一个Hilbert空间是实数域上定义有内积的完备的矢量空间[6]~[7]．设D是三维欧氏空间的有界分段曲线或分段曲面，γ是D上的正值可积函数，D上全体实值函数的集合构成一个矢量空间，对D上实值函数引进内积

$$\langle f,\ g\rangle:=\int_D \gamma f g d\mu \tag{2.1}$$

这里$d\mu$是一个积分单元，D上所有满足

$$0<\int_D \gamma f^2 d\mu<\infty \tag{2.2}$$

* 郭仲衡推荐．

的实值函数f的集合叫做(加权γ)平方可积空间，记为$L^2(D)$。这是一个实数域上的Hilbert空间。

Hilbert空间$L^2(D)$存在完备正文系 $(e_i\ ;\ i=1,2,\cdots)$

$$\langle e_i,\ e_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

且$L^2(D)$上任意元素f可在完备正文系上展开：

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}f_ie_i \qquad f_i=\langle f,e_i\rangle \tag{2.3}$$

系数f_i还满足Parseval等式：

$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}f_i^2 \tag{2.4}$$

可见：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}f_i^2=0 \tag{2.5}$$

若由$L^2(D)$的完备正文基$\{e_i\}$的前n个元素之集合$\{e_\alpha\ :\ \alpha=1,2,\cdots,n\}$线性张成$L^2(D)$的一个$n$维子空间

$$H_n(D)=\left\{\sum_{\alpha=1}^{N}a_\alpha e_\alpha\ :\ a_\alpha\ \text{为实数}\right\} \tag{2.6}$$

从$L^2(D)$到$H_n(D)$的投影算子记为P_n，那么

$$P_nf=\sum_{\alpha=1}^{n}f_\alpha e_\alpha \qquad \langle f,e_\alpha\rangle=f_\alpha \tag{2.7}$$

按照(2.5)对$L^2(D)$中的任意元素f有

$$\lim_{n\to\infty}\|f-P_nf\|=0 \qquad (\forall f\in L^2(D)) \tag{2.8}$$

选择合适的完备基$\{e_i\}$，便可找到恰当的正值小参数ε_n，当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to0$，对任何$L^2(D)$中的元素f，又成立

$$f-P_nf\doteq O(\varepsilon_n) \qquad (\forall f\in L^2(D)) \tag{2.9}$$

这个小参数ε_n，将在本文的系统误差估计中起到非常重要的作用。

对于实际上是n维欧氏空间的$H_n(D)$，采用一般基$\{G_\alpha\ :\ \alpha=1,2,\cdots,n\}$，通常将更为方便。根据张量分析的理论[8][9]，把$\{G_\alpha\}$看成是协变基，按下面的方法可以求出其逆变基$\{G^\alpha\}$

$$\left.\begin{aligned}&\langle G^\alpha,G_\beta\rangle=\delta^\alpha_\beta=\begin{cases}1 & (\alpha=\beta)\\ 0 & (\alpha\neq\beta)\end{cases}\\ &G^\alpha=\sum_{\beta=1}^{n}G^{\alpha\beta}G_\beta \qquad [G^{\alpha\beta}]=[G_{\alpha\beta}]^{-1}\\ &G_{\alpha\beta}=\langle G_\alpha,G_\beta\rangle\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

由于G_α，G^β都是$H_n(D)$中元素，故恒成立：

$$\langle G_\alpha,\ e_A\rangle=0 \qquad \langle G^\alpha,\ e_A\rangle=0 \qquad (A=n+1,\ n+2,\cdots) \tag{2.11}$$

于是，$L^2(D)$中任意元素f在$H_n(D)$的投影又可表示成

$$\left.\begin{aligned} &P_n f=\sum_{\alpha=1}^{n} f^\alpha G_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha G^\alpha \\ &f^\alpha=\langle f,G^\alpha\rangle \qquad f_\alpha=\langle f,G_\alpha\rangle \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

利用(2.9)及(2.11)式，有：

$$\langle f,e_A\rangle=O(\varepsilon_n) \qquad (A=n+1,n+2,\cdots) \tag{2.13}$$

三、杆 的 几 何

杆是一种特殊的三维变形体，在变形过程中，存在物质曲线C，该曲线尺寸比垂直于该曲线的另两个方向尺寸大得多。C为杆的基本流形，C的法平面与杆的交域为杆的横截面$\mathscr{A}$在C上引进弧长参数z，在$\mathscr{A}$上引进笛卡尔坐标系$\{x,y\}$，杆的几何特点可以使得$\{x,y,z\}$作为标的坐标系，引进曲线C的Frenet标架$\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$，$\mathbf{k}$为切向，$\mathbf{i}$为主法向，$\mathbf{j}$为副法向，本文将特别地取$x,y$坐标线分别沿$\mathbf{i}$和$\mathbf{j}$的正向。

记$\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_0(z)$为$C$的矢径，则杆构形中任一点$\mathbf{r}$的矢径为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+x\mathbf{i}+y\mathbf{j} \tag{3.1}$$

则$\mathbf{r}$处的自然标架为

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{g}_1=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r}=\mathbf{i} \\ &\mathbf{g}_2=\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{r}=\mathbf{j} \\ &\mathbf{g}_3=\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{r}=(1-kx)\mathbf{k}-\tau y\mathbf{i}+\tau x\mathbf{j} \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

这里我们利用了曲线论的基本公式[10]．式中k为C的曲率，τ为C的扭率，($\mathbf{g}_i$; $i=1,2,3$) 的对偶基为：

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{g}^1=\mathbf{i}+\frac{\tau y}{A}\mathbf{k} \\ &\mathbf{g}^2=\mathbf{j}-\frac{\tau x}{A}\mathbf{k} \\ &\mathbf{g}^3=\frac{1}{A}\mathbf{k} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

其中

$$A=1-kx \tag{3.4}$$

从(3.2)式可得到杆的体积单元为：

$$dV=[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3]dxdydz=AdAdz \tag{3.5}$$

其中dA为$\mathscr{A}$面上的面积元素。

设$\mathbf{n}$和$\hat{\mathbf{n}}$分别为杆表面的外法向及$\mathscr{A}$之边界$\partial\mathscr{A}$的外单位法向，$(\pi/2+\beta)$为$\mathbf{n}$与$\mathbf{k}$的夹

角，则有：

$$\mathbf{n}=\mathring{\mathbf{n}}\cos\beta-\mathbf{k}\sin\beta \tag{3.6}$$

对于杆表面的面积元$d\bar{A}$，有：

$$d\bar{\mathbf{A}}\cdot\mathring{\mathbf{n}}=(d\mathbf{t}x\mathbf{g}_3dz)\cdot\mathring{\mathbf{n}}$$

即

$$d\bar{A}=\varLambda\eta dcdz \tag{3.7}$$

其中$\mathbf{t}$为$\partial\mathscr{A}$的切向量，dc为$\partial\mathscr{A}$的弧长元，而

$$\eta=\sec\beta \tag{3.8}$$

设

$$\inf z=z_1, \quad \sup z=z_2 \tag{3.9}$$

上式中z的区域为杆的构型，我们可以允许z_1，z_2是无限的，称$z=z_1$和$z=z_2$为杆的两个端面。

四、杆的基本方程及误差估计

对于定义在杆的当前杆型上的函数空间可以看作是以z为参数的$\mathscr{A}$面上函数空间簇$\mathscr{F}[\mathscr{A},z]$，对于每一个$z$值，按照一定方法可以使得$\mathscr{F}[\mathscr{A},z]$成为平方可积空间$L^2[\mathscr{A},z]$，这样，们可以找到$L^2[\mathscr{A},z]$中的完备系$\{G_\alpha:\ \alpha=1,2,\cdots,n.\ G_A=e_A:\ A=n+1,\ n+2,\ \cdots\}$及截取的$n$维子空间$H_n[\mathscr{A},z]$，对于$\mathscr{F}[\mathscr{A},z]$中的任意元素$f$可在$\{G_i\}$上作Fourier展开：

$$f=\sum_{\alpha=1}^{n}f^\alpha G_\alpha+\sum_{A=n+1}^{\infty}f^Ae_A\overset{\text{记为}}{=\!=}f^iG_i \qquad (f^i\in D(C)) \tag{4.1}$$

$D(C)$为定义在杆的流形C上的除有限点外几乎处处连续的函数的集合.

我们回忆到三维非极连续介质力学中的虚位移原理：

$$\int_V[\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]\delta\mathbf{u}dV+\oint_{\partial V}[\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}]\delta\mathbf{u}dS=0 \tag{4.2}$$

在(4.2)式中，$\boldsymbol{\sigma}$，$\rho\mathbf{b}$，$\rho\mathbf{a}$和$\mathbf{p}$分别是Cauchy应力、体力、惯性力及面力，$\delta\mathbf{u}$是满足边界条件的虚位移。$\delta\mathbf{u}$若取为：

$$\delta\mathbf{u}=\sum_{\alpha=0}^{n}\delta\boldsymbol{\varphi}_\alpha G^\alpha+\sum_{A=n+1}^{\infty}\partial\varphi_Ae_A \tag{4.3}$$

代进(4.3)式，可以得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n}\int_C\left\{\int_{\mathscr{A}}\varLambda[\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]G^\alpha dA+\oint_{\partial\mathscr{A}}\varLambda\eta(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})G^\alpha dc\right\}\delta\boldsymbol{\varphi}_\alpha dz\\&+\sum_{A=n+1}^{\infty}\int_C\left\{\int_{\mathscr{A}}\varLambda[\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]e_AdA+\oint_{\partial\mathscr{A}}\varLambda\eta(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})e_Adc\right\}\delta\varphi_Adz\\&+\text{端面边界项}=0\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4)式可以分解为下面三式：

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\int_C\left\{\int_{\mathscr{A}}\varLambda[\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]G^\alpha dA+\oint_{\partial\mathscr{A}}\varLambda\eta(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})G^\alpha dc\right\}\delta\varphi_\alpha dz=0 \tag{4.5}$$

$$\sum_{A=n+1}^{\infty}\int_{\sigma}\left\{\int_{\mathscr{A}}\Lambda[\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]e_A dA+\oint_{\partial\mathscr{A}}\Lambda\eta(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\ e_A dc\right\}\delta\varphi_A dz=0 \tag{4.6}$$

$$\text{端面边界项}=0 \tag{4.7}$$

将$\boldsymbol{\sigma}$，$\mathbf{u}$及$\mathbf{a}$在完备系上作Fourier展开：

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{m}^i G_i \qquad \mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}^i G_i \qquad \mathbf{a}=\ddot{\mathbf{u}}=\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^i G_i \tag{4.8}$$

以及

$$\mathbf{t}=\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}=\mathbf{M}^i G_i \tag{4.9}$$

我们定义$L^2[\mathscr{A},z]$的内积为：

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathscr{A}} fg\,dA \qquad (\forall f,\ g\in L^2[\mathscr{A},z]) \tag{4.10}$$

这样，我们有

$$\int_{\mathscr{A}} G^a G_i dA=\langle G^a,G_i\rangle=\delta_i^a \tag{4.11}$$

利用(3.3)式，div$\boldsymbol{\sigma}$可以写为：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{g}^1\partial_x\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g}^2\partial_y\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g}^3\partial_z\boldsymbol{\sigma}$$
$$=\frac{1}{\Lambda}\mathbf{k}(\partial_z+\tau y\partial_x-\tau x\partial_y)\boldsymbol{\sigma}+\mathring{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\boldsymbol{\sigma} \tag{4.12}$$

$\mathring{\mathrm{d}}$iv是$\mathscr{A}$面上的散度．

$$\int_{\mathscr{A}}\Lambda\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}G^a dA=\frac{d\mathbf{M}^i}{dz}\int_{\mathscr{A}}G^a G_i dA+\mathbf{M}^i\int_{\mathscr{A}}G^a(\partial_z+\tau g\partial_x-\tau x\partial_y)G_i dA$$
$$+\int_{\mathscr{A}}G^a\mathring{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\Lambda\boldsymbol{\sigma}dA$$
$$=\frac{d\mathbf{M}^a}{dz}+\mathbf{M}^i\int_{\mathscr{A}}G^a(\partial_z+\tau y\partial_x-\tau x\partial_y)G_i dA+\mathbf{m}^i\oint_{\partial\mathscr{A}}\Lambda\eta G^a G_i\mathbf{n}dc$$
$$+\mathbf{M}^i\oint_{\partial\mathscr{A}}\Lambda G^a G_i\mathrm{tg}\beta dc-\mathbf{m}^i\int_{\mathscr{A}}\Lambda G_i\mathring{\mathrm{g}}\mathrm{rad}G_a dA \tag{4.13}$$

其中$\mathring{\mathrm{g}}$rad为$\mathscr{A}$平面上的梯度．我们利用了(3.6)式及Gauss散度定理．此时(4.5)式成为：

$$d\mathbf{M}^a/dz+\mathbf{M}^i n_a^i-\mathbf{m}^i\int_{\mathscr{A}}\Lambda G_i\mathring{\mathrm{g}}\mathrm{rad}G^a dA+\mathbf{q}^a-J_i^a\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^i=0 \tag{4.14}$$

式中

$$n_a^i=\int_{\mathscr{A}}G^a\partial_z G_i dA+\tau\oint_{\partial\mathscr{A}}G^a G_i(y\mathring{n}_x-x\mathring{n}_y)dc$$
$$+\oint_{\partial\mathscr{A}}\Lambda G^a G_i\mathrm{tg}\beta dc-\tau\int_{\mathscr{A}}G_i(y\partial_x-x\partial_y)G^a dA \tag{4.15}$$

$$\mathbf{q}^a=\int_{\mathscr{A}}\Lambda\rho\mathbf{b}G^a dA+\oint_{\partial\mathscr{A}}\Lambda\eta\mathbf{p}G^a dc \tag{4.16}$$

$$J_i^a=\int_{\mathscr{A}}\Lambda\rho G^a G_i dA \tag{4.17}$$

将式(4.11)对z求偏导，有

$$\langle\partial_z G^a,G_i\rangle+\langle G^a,\partial_z G_i\rangle+\oint_{\partial\mathscr{A}}[\tau(y\mathring{n}_x-x\mathring{n}_y)+\Lambda\mathrm{tg}\beta]G^a G_i dc=0 \tag{4.18}$$

利用(4.18)式，(4.15)式可以简化为：

$$n_i^\alpha=-\int_{\mathscr{A}}G_i\partial_z G^\alpha dA-\tau\int_{\mathscr{A}}G_i(y\partial_x-x\partial_y)G^\alpha dA \tag{4.19}$$

一般地，$\partial_z G^\alpha+\tau(y\partial_x-x\partial y)G^\alpha\in L^2[\mathscr{A},z]$，这样，从(2.13)式，可得到

$$n_i^\alpha=O(\varepsilon_n) \tag{4.20}$$

同理，只要ρ是连续的，利用(2.13)式，从(4.17)式，有

$$J_A^\alpha=O(\varepsilon_n) \tag{4.21}$$

对于项$\int_{\mathscr{A}}\varLambda G_i\mathbf{g}\mathrm{rad}G^\alpha dA$，同样有

$$\int_{\mathscr{A}}\varLambda G_i\mathbf{g}\mathrm{rad}G^\alpha dA=O(\varepsilon_n) \tag{4.22}$$

考虑到(2.13)，从(4.9)，(4.10)，我们有

$$\begin{aligned}&m^A=\langle\boldsymbol{\sigma},e_A\rangle=O(\varepsilon_n)\\&M^A=O(\varepsilon_n)\qquad\ddot{\varphi}^A=O(\varepsilon_n)\end{aligned} \tag{4.23}$$

利用(4.20)～(4.23)式，(4.14)式可以改写为：

$$d\mathbf{M}^\alpha/dz+\mathbf{M}^\beta n_\beta^\alpha-\mathbf{m}^\beta\int_{\mathscr{A}}\varLambda G_\beta\mathbf{g}\mathrm{rad}G^\alpha dA+\mathbf{g}^\alpha-J_\beta^\alpha\ddot{\varphi}^\beta+O(\varepsilon_n^2)=0 \tag{4.24}$$

按照相类似的步骤，可以将(4.6)式转化为：

$$d\mathbf{M}^A/dz+\mathbf{M}^i n_i^A-\mathbf{m}^i\int_{\mathscr{A}}\varLambda G_i\mathbf{g}\mathrm{rad}e_A dA+\mathbf{q}^A-J_i^A\ddot{\varphi}^i=0 \tag{4.25}$$

根据式(4.20)～(4.23)，(4.25)式的右边项是$O(\varepsilon_n)$量级，这组方程可以忽略。在方程(4.24)中，忽略二阶小量$O(\varepsilon_n^2)$，可以得到有限变量的场方程：

$$d\mathbf{M}^\alpha/dz+\mathbf{M}^\beta n_\beta^\alpha-\mathbf{m}^\beta\int_{\mathscr{A}}\varLambda G_\beta\mathbf{g}\mathrm{rad}G^\alpha dA+\mathbf{g}^\alpha-J_\beta^\alpha\ddot{\varphi}^\beta=0 \tag{4.26}$$

将(4.26)式代回(4.4)式，并对$d\mathbf{M}^\alpha/dz\delta\boldsymbol{\varphi}_\alpha$分部积分，得到：

$$\int_C[-\mathbf{m}^\alpha\delta\mathbf{K}_\alpha+(\mathbf{q}^\alpha-J_\beta^\alpha\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^\beta)\delta\varphi_\alpha]dz+(\mathbf{M}^\alpha\delta\boldsymbol{\varphi}_\alpha)\Big|_{z-}^{z+}$$

$$+\text{端面边界项}=0 \tag{4.27}$$

其中

$$\mathbf{K}_\alpha=\mathbf{k}\otimes d\boldsymbol{\varphi}_\alpha/dz-\mathbf{k}\otimes\boldsymbol{\varphi}_\beta n_\alpha^\beta+p_\alpha^\beta\otimes\boldsymbol{\varphi}_\beta \tag{4.28}$$

$$p_\alpha^\beta=\int_{\mathscr{A}}\varLambda G_\alpha\mathbf{g}\mathrm{rad}G^\beta dA \tag{4.29}$$

在推导(4.27)式的过程中，利用了等式

$$\mathbf{M}^\alpha=\mathbf{m}^\alpha\mathbf{k} \tag{4.30}$$

因为$\mathbf{m}^\alpha$为二阶对称张量，根据功共轭原理，$\mathbf{K}_\alpha$的对称部份$(\mathbf{K}_\alpha)$即为与$\mathbf{m}^\alpha$相对应的应变度量张量。

设杆的两个端面$z=z_1$和$z=z_2$用$\mathscr{A}(z_1)$及$\mathscr{A}(z_2)$表示。(4.7)式可以表示为：

$$\int_{\mathscr{A}(z_1)}(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\bar{\mathbf{n}})\delta\mathbf{u}dA+\int_{\mathscr{A}(z_2)}(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\bar{\mathbf{n}})\delta\mathbf{u}dA=0 \tag{4.31}$$

为了讨论的方便，我们假定$\mathscr{A}(z_1)$，$\mathscr{A}(z_2)$两个面为杆在此处的横截面。此时(4.31)式中的$\bar{\mathbf{n}}$等于$\mathbf{k}$上式可写成：

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_a|_{z=z_1}\int_{\mathscr{A}(z_1)}(\mathbf{p}+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k})G^a dA+\delta\boldsymbol{\varphi}_a|_{z=z_2}\int_{\mathscr{A}(z_2)}(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k})G^a dA=0 \tag{4.32}$$

将(4.8)式代入上式，经整理可得到：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{M}^a|_{z=z_1}&=-\int_{\mathscr{A}(z_1)}\mathbf{p}G^a dA\\ \mathbf{M}^a|_{z=z_2}&=\int_{\mathscr{A}(z_2)}\mathbf{p}G^a dA\end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

上式实际上就是杆问题的应力边界条件。最后，我们可以得到杆问题的虚功方程：

$$\int_C[-\mathbf{m}^a\delta\mathbf{K}_a+(\mathbf{q}^a-J^a_\beta\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^\beta)\delta\boldsymbol{\varphi}_a]dz+\left(\delta\boldsymbol{\varphi}_a\int_{\mathscr{A}(z_1)}\mathbf{p}G^a dA\right)\Big|_{z=z_1}$$

$$+\left(\delta\boldsymbol{\varphi}_a\int_{\mathscr{A}(z_2)}\mathbf{p}G^a dA\right)\Big|_{z=z_2}=0 \tag{4.34}$$

在工程应用中，我们经常取$n=2$，且取C通过横截面$\mathscr{A}$的形心，逆变基$\{G^a\}$取为：

$$G^1=1\qquad G^2=x \tag{4.35}$$

从(2.10)式，有

$$G_1=1/A,\qquad G_2=\frac{1}{I_x}x \tag{4.36}$$

其中

$$A=\int_{\mathscr{A}}dA,\qquad I_x=\int_{\mathscr{A}}x^2 dA$$

分别为横截面$\mathscr{A}$的面积及对y轴的惯性矩。

取

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma^{ij}\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_j\qquad(i,j=1,2,3)$$
$$\mathbf{i}_1=\mathbf{i},\quad \mathbf{i}_2=\mathbf{j},\quad \mathbf{i}_3=\mathbf{k}$$

展开张量$\mathbf{M}^a,\mathbf{m}^a$，可以得到：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{M}^1&=\int_{\mathscr{A}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}dA=\mathbf{i}\int_{\mathscr{A}}\sigma^{13}dA+\mathbf{j}\int_{\mathscr{A}}\sigma^{23}dA+\mathbf{k}\int_{\mathscr{A}}\sigma^{33}dA\\ &=Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+N\mathbf{k}\\ \mathbf{M}^2&=\int_{\mathscr{A}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}x dA=\mathbf{i}\int_{\mathscr{A}}\sigma^{13}x dA+\mathbf{j}\int_{\mathscr{A}}\sigma^{23}x dA+\mathbf{k}\int_{\mathscr{A}}\sigma^{33}x dA\\ &=M_{xz}\mathbf{i}+M_{yz}\mathbf{j}+M_x\mathbf{k}\\ \mathbf{m}^1&=\int_{\mathscr{A}}\boldsymbol{\sigma}dA=\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_j\int_{\mathscr{A}}\sigma^{ij}dA=m^{1ij}\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_j\\ \mathbf{m}^2&=\int_{\mathscr{A}}\sigma x dA=\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_j\int_{\mathscr{A}}\sigma^{ij}x dA=m^{2ij}\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_j\end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

平衡方程(4.26)式展开为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dQ_x}{dz}-\tau Q_y+\mathbf{k}N+q''=0\\ &\frac{dQ_y}{dz}+\tau Q_x+q^{12}=0,\ dN/dz-kQ_x+q^{13}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dM_{xz}}{dz}-\tau M_{yz}+kM_z+km^{211}-m^{111}+q^{21}=0\\&\frac{dM_{yz}}{dz}+\tau M_{xz}+km^{221}-m^{121}+q^{22}=0\\&\frac{dM_z}{dz}-Q_x+q^{23}=0\end{aligned}\right\}\tag{4.39}$$

将(4.28)式展开为分量形式为：

$$\mathbf{K}_1=\mathbf{k}\otimes d\boldsymbol{\varphi}_1/dz+\mathbf{i}\otimes\boldsymbol{\varphi}_2,\quad \mathbf{K}_2=\mathbf{k}\otimes d\boldsymbol{\varphi}_2/dz-\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{\varphi}_2\tag{4.40}$$

令

$$\begin{aligned}&U_x=\frac{1}{A}\int_{\mathscr{A}}u_xdA,\qquad U_y=\frac{1}{A}\int_{\mathscr{A}}u_ydA,\qquad U_z=\frac{1}{A}\int u_zdA\\&\Phi_x=\frac{1}{I_x}\int_{\mathscr{A}}u_xxdA,\qquad \Phi_y=\frac{1}{I_x}\int_{\mathscr{A}}u_yxdA,\qquad \Phi_z=\frac{1}{I_x}\int_{\mathscr{A}}u_zxdA\end{aligned}\tag{4.41}$$

则有如下的"广义应力"与"广义应变"的对应关系：

$$\begin{aligned}&Q_x\sim\frac{1}{2}(dU_x/dz-\tau U_y+\Phi_z+kU_z)\\&Q_y\sim\frac{1}{2}(dU_y/dz+\tau U_x)\\&\mathrm{N}\sim dU_z/dz-kU_x,\ m^{111}\sim\Phi_x,\qquad m^{121}\sim\frac{1}{2}\Phi_y\end{aligned}\tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}&M_{xz}\sim\frac{1}{2}(d\phi_x/dz-\tau\Phi_y),\ M_{yz}\sim\frac{1}{2}(d\phi_y/dz+\tau\Phi_x)\\&M_z\sim d\phi_z/dz-k\Phi_x,\ m^{211}\sim-k\Phi_x,\ m^{221}\sim-2^{-1}k\Phi_y\end{aligned}\tag{4.43}$$

为了得到误差指标ε_n，可以利用Taylor级数展开式．令h为杆点x坐标方向的厚度．对于任一属于L^2的函数$f(x,y,z)$在$x=0$处对x展开

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=f(0,y,z)+f'(0,y,z)x+\frac{1}{2}f''(\theta,y,z)x^2\\&=f(0,y,z)+f'(0,y,z)x+\frac{1}{2}h^2f''(\theta,y,z)\left(\frac{x}{h}\right)^2\\&=f(0,y,z)+f'(0,y,z)x+O(h^2)\qquad(|\theta|<h)\end{aligned}\tag{4.44}$$

当我们采用(4.35)式时，下述关系是式成立的：

$$P_nf=f(0,y,z)+f'(0,y,z)x+O(\varepsilon_n)\tag{4.45}$$

代入(2.9)式，可以得到：

$$f=f(0,y,z)+f'(0,y,z)x+O(\varepsilon_n)\tag{4.46}$$

比较(4.44)、(4.46)两式，可以发现：

$$\varepsilon_n=h^2\tag{4.47}$$

五、壳的几何

壳是一种具有在厚度方向尺寸比中面其它两个方向尺寸小得多的几何特征的三维体．若记它的当前构型为$\mathscr{B}$．它的基本流形可取为壳的中面$\mathscr{A}$．相对流形的法截线为C，在$\mathscr{A}$面

上取拖带坐标系$\{\theta^\alpha: \alpha=1,2\}$，相应的自然基记为$\{\mathbf{a}_\alpha: \alpha=1,2\}$，沿法截线方向取直线坐标$\theta^3=z$。$z=0$对应于$\mathscr{A}$面，$C$的正向记为$\mathbf{a}_3=\mathbf{N}$，记$a_{\alpha\beta}$、$b_{\alpha\beta}$为$\mathscr{A}$面的第一、第二基本形式：

$$a_{\alpha\beta}=\mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{a}_\beta \qquad \partial_\alpha\mathbf{N}=-b_{\alpha\beta}a^\beta \tag{5.1}$$

下面给出了必需的一些微分几何的性质[11]：自然基$\{g_i: i=1,2,3\}$和基$\{a_i\}$的关系：

$$\mathbf{g}_\alpha=\mu_\alpha^\beta\mathbf{a}_\beta,\quad \mathbf{g}_3=\mathbf{N},\quad \mathbf{g}^\alpha=\lambda_\beta^\alpha\mathbf{a}_\beta,\quad \mathbf{g}^3=N \tag{5.2}$$

$$\lambda_\beta^\alpha\mu_\alpha^\gamma=\delta_\beta^\gamma,\quad \lambda_\beta^\alpha\mu_\gamma^\beta=\delta_\gamma^\alpha,\quad \mu=\sqrt{g/a}$$

$$\mu|_\lambda=\mu\lambda_\delta^\gamma\mu_{\gamma/\lambda}^\delta=\mu\lambda_\delta^\gamma\mu_{\lambda/\gamma}^\delta,\quad \mu|_3=\mu_{,3}=-\mu b_\alpha^\gamma\lambda_\gamma^\alpha \tag{5.3}$$

其中

$$\sqrt{g}=[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3] \qquad \sqrt{a}=[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] \tag{5.4}$$

$\mathbf{g}_\alpha$和度量张量$g_{\alpha\beta}$意义下的christoff符号$\bar{\Gamma}_{\beta i}^\gamma$和$\mathbf{a}_\alpha$及$a_{\alpha\beta}$意义下的christoff符号$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$的关系：

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma+\lambda_\xi^\gamma\mu_{\alpha/\beta}^\xi,\quad \bar{\Gamma}_{\beta 3}^\alpha=-\lambda_\delta^\alpha b_\beta^\delta \tag{5.5}$$

在第五、第六两节中，小写Greek字母指标取值1,2，小写Latin字母指标取值1,2,3，大写Greek字母指标取值1,2,…,n。大写Latin字母指标取值1,2,…,n，$n+1$,…指标A取值$n+1$，$n+2$,…。

壳体中的体积元素为：

$$dV=[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3]d\theta^1d\theta^2dz=\sqrt{g}\,d\theta^1d\theta^2dz=\mu dAdz \tag{5.6}$$

dA为壳中面的面积元素，对于壳体的边界$\partial\mathscr{B}$，它由上、下表面z^+，z^-及侧面s所组成。对于上表面，有：

$$\partial_\alpha z^+=-\mathbf{n}\cdot\mathbf{g}_\alpha/(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})=-\eta n_\beta\mu_\alpha^\beta \tag{5.7}$$

对于下表面，同样有：

$$\partial_\alpha z^-=-\mathbf{n}\cdot\mathbf{g}_\alpha/(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})=-\eta n_\beta\mu_\alpha^\beta \tag{5.8}$$

其中$\mathbf{n}$为上、下表面之法线，n_β为$\mathbf{n}$在$\mathbf{a}_\beta$的分量：

$$\mathbf{n}_\beta=\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_\beta \qquad \eta=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})^{-1}=n_3^{-1} \tag{5.9}$$

壳体上、下表面的面积元素为

$$dS=(\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2)\cdot\mathbf{N}d\theta^1d\theta^2\cdot\eta=A\eta dA \tag{5.10}$$

对于侧面s，我们仅讨论它垂直于中面的情况。它的面积元为：

$$ds=\mu\epsilon_{\alpha\gamma}d\theta^\gamma dz\cdot(\mathbf{g}^\alpha\cdot\bar{\mathbf{n}})=\bar{n}^\delta\mu_\gamma^\xi\epsilon_{\delta\xi}d\theta^\gamma dz \tag{5.11}$$

其中$\bar{n}^\delta$为s的单位外法线，$\epsilon_{\alpha\gamma}$为$\mathscr{A}$面上的轮排张量

$$\bar{\mathbf{n}}=\bar{\mathbf{n}}^\delta\mathbf{a}_\delta \qquad \bar{n}^\delta=\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a}^\delta \tag{5.12}$$

六、壳的基本方程及误差估计

对于以壳$\mathscr{B}$为定义域的函数空间，可以看作是以$\mathscr{A}$为参数的一个函数空间簇$\mathscr{F}[z,\mathscr{A}]$如果对于$\forall f\in\mathscr{F}[z,\mathscr{A}]$，要求加权平方可积

$$\left|\int_C \gamma f^2dz\right|<\infty$$

则$\mathscr{F}[z,\mathscr{A}]$成为一个平方可积函数空间簇$L^2[z,\mathscr{A}]$。如果我们定义$D(\mathscr{A})$为$\mathscr{A}$上的几乎处处连续函数的集合。$\{G_I: I=1,2,\cdots,n,n+1,\cdots\}$为$L^2[z,\mathscr{A}]$上的完备基。则对于$\forall f\in L^2[z,\mathscr{A}]$，有

$$f=\sum_{I=1}^{\infty}f_I G^I \overset{\text{记为}}{=\!=} G_I f_I \qquad (f^I\in D(\mathscr{A});\ \forall f\in L^2[z,\mathscr{A}]) \tag{6.1}$$

本节中，我们再从非极连续介质力学中的虚位移原理出发

$$\int_{\mathscr{B}}[\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]\delta\mathbf{u}dV+\oint_{\partial\mathscr{B}}[\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}]\delta\mathbf{u}dS=0 \tag{6.2}$$

我们选择$\delta\mathbf{u}$如下：

$$\delta\mathbf{u}=\delta\boldsymbol{\varphi}_\Gamma G^\Gamma+\delta\boldsymbol{\varphi}_A e_A \tag{6.3}$$

将(6.3)式代入(6.2)式，并利用(5.6)，(5.10)，(5.11)式得到

$$\int_{\mathscr{A}}\left\{\int_C\mu[\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]G^\Gamma dC+[\mu\eta(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})G^\Gamma]_{z^-}^{z^+}\right\}\delta\boldsymbol{\varphi}_\Gamma dA$$
$$+\int_{\mathscr{A}}\left\{\int_C\mu[\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]e_A dC+[\mu\eta(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})e_A]_{z^-}^{z^+}\right\}\delta\boldsymbol{\varphi}_A dA$$
$$+\int_s\delta\mathbf{u}(\mathbf{p}-\boldsymbol{\sigma}\bar{\mathbf{n}})\bar{n}^\delta\mu_\gamma^\zeta\epsilon_{\delta\zeta}d\theta^\gamma dz=0 \tag{6.4}$$

将$\boldsymbol{\sigma}$，$\mathbf{u}$，$\mathbf{a}$进行 Fourier 展开：

$$\mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}^I G_I,\quad \mathbf{a}=\ddot{\mathbf{u}}=\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^I G_I,\ \mathbf{g}^i\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\mathbf{g}^i=\mathbf{M}^{Ii}G_I=\mathbf{M}^I\mathbf{a}^i G_I \tag{6.5}$$

从商定理知，$\mathbf{M}^I$为一个二阶张量。我们定义$L^2[z,\mathscr{A}]$的内积为：

$$\langle f,\ g\rangle=\int_C\mu fg dz \qquad (\forall f\cdot g\in L^2[z,\mathscr{A}]) \tag{6.6}$$

因为

$$\langle G^\Gamma,\ G_I\rangle=\delta_I^\Gamma=\begin{cases}1 & (\Gamma=I)\\ 0 & (\Gamma=1)\end{cases} \tag{6.7}$$

对θ^α坐标求偏导得到：

$$\langle\partial_\alpha G^\Gamma,G_I\rangle+\langle G^\Gamma,\partial_\alpha G_I\rangle+\int_C\mu_\alpha G^\Gamma G_I dz-[\mu\eta G^\Gamma G_I n_\beta\mu_\alpha^\beta]_{z^-}^{z^+}=0 \tag{6.8}$$

利用壳的几何特性，展开$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{g}^\alpha\partial_\alpha\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g}^3\partial_z\boldsymbol{\sigma}=\partial_\alpha(\mathbf{M}^I\mathbf{a}^\alpha G_I)+\partial_z(\mathbf{M}^I\mathbf{N}G_I)-\partial_\alpha\mathbf{g}^\alpha\boldsymbol{\sigma}$$

$$\int_C\mu\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}dz=\int_C\mu G^\Gamma\partial_\alpha(\mathbf{M}^I\mathbf{a}^\alpha G_I)dz+\int_C\mu G^\Gamma\partial_z(\mathbf{M}^I\mathbf{N}G_I)dz$$
$$-\int_C\mu G^\Gamma\partial_\alpha\mathbf{g}^\alpha\boldsymbol{\sigma}dz \tag{6.9}$$

上式中的右边第一个积分项为

$$\int_C\mu G^\Gamma\partial_\alpha(\mathbf{M}^I\mathbf{a}^\alpha G_I)dz=\partial_\alpha(\mathbf{M}^\Gamma\mathbf{a}^\alpha)-\mathbf{M}^I\mathbf{a}^\alpha\left[\int_C\mu G_I\partial_\alpha G^\Gamma dz\right.$$
$$\left.-\int_C\mu\lambda_\beta^\gamma\mu_{\gamma,\alpha}^\beta G_I G^\Gamma dz\right]+[\mu\eta G^\Gamma n_\beta\mu_\alpha^\beta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{g}^\alpha]_{z^-}^{z^+} \tag{6.10}$$

第二个积分项为

$$\int_C\mu G^\Gamma\partial_z(\mathbf{M}^I\mathbf{N}G_I)dz=\mathbf{M}^I\mathbf{N}\int_C\mu G^\Gamma\partial_z G_I dz$$

$$=\mathbf{M}^{I}\mathbf{N}[(\mu G^{\Gamma}G_{I})]_{z-}^{z+}-\int_{C}\mu G_{I}\partial_{z}G^{\Gamma}dz+\int_{C}\mu\lambda_{\gamma}^{\beta}b_{\beta}^{\gamma}G_{I}G^{\Gamma}dz \tag{6.11}$$

而

$$\partial_{\alpha}\mathbf{g}^{\alpha}=-\bar{\Gamma}_{\alpha j}^{\alpha}\mathbf{g}^{j}=-(\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}+\lambda_{\gamma}^{\alpha}\mu_{\alpha/\beta}^{\gamma})\mathbf{g}^{\beta}+\lambda_{\delta}^{\gamma}b_{\gamma}^{\delta}\mathbf{N}$$

所以(6.9)式中的第三个积分项为：

$$\int_{C}\partial_{\alpha}\mathbf{g}^{\alpha}\sigma\mu G^{\Gamma}dz=-\mathbf{M}^{\Gamma}\mathbf{a}^{\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}-\mathbf{M}^{I}\mathbf{a}^{\beta}\int_{C}\mu G_{I}G^{\Gamma}\lambda_{\gamma}^{\alpha}\mu_{\alpha/\beta}^{\gamma}dz$$

$$+\mathbf{M}^{I}\mathbf{N}\int_{C}\mu G^{\Gamma}G_{I}\lambda_{\delta}^{\gamma}b_{\gamma}^{\delta}dz \tag{6.12}$$

将(6.10)～(6.12)式代入(6.9)式，

$$\int_{C}\mu G^{\Gamma}\mathrm{div}\sigma dz=\partial_{\alpha}(\mathbf{M}^{\Gamma}\mathbf{a}^{\alpha})+\mathbf{M}^{\Gamma}\mathbf{a}^{\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}-\mathbf{M}^{I}\mathbf{a}^{\alpha}\int_{C}\mu G_{I}\partial_{\alpha}G^{\Gamma}dz$$

$$+\mathbf{M}^{I}\mathbf{N}[(\mu G^{\Gamma}G_{I})|_{z-}^{z+}-\int_{C}\mu G_{I}\partial_{z}G^{\Gamma}dz]+[\mu\eta G^{\Gamma}n_{\beta}\mu_{\alpha}^{\beta}\sigma\mathbf{g}^{\alpha}]_{z-}^{z+} \tag{6.13}$$

而(6.4)式其它项为：

$$[\mu\eta(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{n})G^{\Gamma}]_{z-}^{z+}=[\mu\eta\mathbf{p}G^{\Gamma}]_{z-}^{z+}-[\mu\eta\sigma\mathbf{g}^{\alpha}n_{\beta}\mu_{\alpha}^{\beta}G^{\Gamma}]_{z-}^{z+}$$

$$-[\mu\eta\sigma\mathbf{N}n_{3}G^{\Gamma}]_{z-}^{z+} \tag{6.14}$$

$$\int_{s}\delta\mathbf{u}(\mathbf{p}-\sigma\bar{n})\bar{n}^{\delta}\mu_{\gamma}^{\zeta}\epsilon_{\delta\zeta}d\theta^{\gamma}dz$$

$$=\int_{\partial\mathscr{A}}\delta\boldsymbol{\varphi}_{\Gamma}[\int_{C}G^{\Gamma}\mathbf{p}\bar{n}^{\delta}\mu_{\gamma}^{\zeta}dz-\mathbf{M}^{I}\mathbf{a}^{\alpha}\int_{C}G^{\Gamma}G_{I}\bar{n}_{\beta}\mu_{\alpha}^{\beta}\bar{n}^{\delta}\mu_{\gamma}^{\zeta}dz]\epsilon_{\delta\zeta}d\theta^{\gamma} \tag{6.15}$$

将(6.13)～(6.15)式代入(6.4)式，经过整理得到：

$$\partial_{\alpha}\mathbf{M}^{\Gamma}\mathbf{a}^{\alpha}+\mathbf{M}^{I}\mathbf{n}_{I}^{\Gamma}+\mathbf{q}^{\Gamma}-J_{I}^{\Gamma}\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{I}=0 \tag{6.16}$$

$$\partial_{\alpha}\mathbf{M}_{A}\mathbf{a}^{\alpha}+\mathbf{M}^{I}\mathbf{n}_{AI}+\mathbf{q}_{A}-J_{IA}\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{I}=0 \tag{6.17}$$

$$\int_{\partial\mathscr{A}}\delta\boldsymbol{\varphi}_{\Gamma}\left[\int_{C}G^{\Gamma}\mathbf{p}\bar{n}^{\delta}\mu_{\gamma}^{\zeta}dz-\mathbf{M}^{I}\mathbf{a}^{\alpha}\bar{n}_{\beta}\bar{n}^{\delta}\int_{C}G^{\Gamma}G_{I}\mu_{\alpha}^{\beta}\mu_{\gamma}^{\zeta}\right]\epsilon_{\delta\zeta}d\theta^{\gamma}=0 \tag{6.18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_{I}^{\Gamma}=-\mathbf{a}^{\alpha}\int_{C}\mu G_{I}\partial_{\alpha}G^{\Gamma}dz-\mathbf{N}\left[-b_{\alpha}^{\alpha}\delta_{I}^{\Gamma}+\int_{C}\mu G_{I}\partial_{z}G^{\Gamma}dz\right]\\&\mathbf{q}^{\Gamma}=\int_{C}\mu\rho\mathbf{b}G^{\Gamma}dz+[\mu\eta\mathbf{p}G^{\Gamma}]_{z-}^{z+},\quad J_{I}^{\Gamma}=\int_{C}\mu G^{\Gamma}G_{I}\rho dz\end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_{AI}=-\mathbf{a}^{\alpha}\int_{C}\mu G_{I}\partial_{\alpha}e_{A}dz-\mathbf{N}\int-b_{\alpha}^{\alpha}\delta_{AI}+\int_{C}\mu G_{I}\partial_{z}e_{A}dz\\&\mathbf{q}_{A}=\int_{C}\mu\rho\mathbf{b}e_{A}dz+[\mu\eta\mathbf{p}e_{A}]_{z-}^{z+},\quad J_{IA}=\int_{C}\mu e_{A}G_{I}\rho dz\end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

因为 $\partial_{z}G^{\Gamma},\ \partial_{\alpha}G^{\Gamma},\ \rho G^{\Gamma}\in L^{2}[z,\ \mathscr{A}]$ (6.21)

利用(2.13)式，可得到

$$\mathbf{n}_A^\Gamma = O(\varepsilon_n) \qquad J_A^\Gamma = O(\varepsilon_n) \tag{6.22}$$

注意到事实：

$$\mathbf{M}^A = \mathbf{M}_A = O(\varepsilon_n) \qquad \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^A = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_A = O(\varepsilon_n) \tag{6.23}$$

(6.16)式变为

$$\partial_\alpha \mathbf{M}^\Gamma \mathbf{a}^\alpha + \mathbf{M}^\Delta \mathbf{n}_\Delta^\Gamma + \mathbf{q}^\Gamma - J_\Delta^\Gamma \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^\Delta + O(\varepsilon_n^2) = 0 \tag{6.24}$$

忽略二阶小量，可得到壳的场方程

$$\partial_\alpha \mathbf{M}^\Gamma \mathbf{a}^\alpha + \mathbf{M}^\Delta n_\Delta^\Gamma + \mathbf{q}^\Gamma - J_\Delta^\Gamma \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^\Delta = 0 \tag{6.25}$$

同理，对(5.17)式进行量级分析，可知此式左边是一个 $O(\varepsilon_n)$ 量级项，该组方程可以忽略。

对于边界条件，作如下一些简化

$$\frac{1}{\mu} \approx \mu \approx 1 \qquad \mu_\beta^\alpha \approx \delta_\beta^\alpha \tag{6.26}$$

这样(6.18)式可以近似为

$$\oint_{\partial \mathscr{A}} \delta \boldsymbol{\varphi}_\Gamma \left[\int_C G^\Gamma \mathbf{p} dz - \mathbf{M}^\Gamma \bar{\mathbf{n}} \right] dc = 0 \tag{6.27}$$

推导过程中利用了等式：

$$dc = \bar{n}^\delta \epsilon_{\delta\gamma} d\theta^\gamma$$

记

$$\bar{\mathbf{q}}^\Gamma = \int_C G^\Gamma \mathbf{p} dz \tag{6.28}$$

则壳的应力边界条件为

$$\mathbf{M}^\Gamma \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{q}}^\Gamma \tag{6.29}$$

利用这些结果，我们可以从(6.4)式推导出壳的虚功方程：

$$\int_{\mathscr{A}} [-\mathbf{M}^\Gamma : \delta \mathbf{K}_\Gamma + \mathbf{q}^\Gamma \delta \boldsymbol{\varphi}_\Gamma - J_\Delta^\Gamma \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^\Delta \delta \boldsymbol{\varphi}_\Gamma] dA + \oint_{\partial \mathscr{A}} \delta \boldsymbol{\varphi}_\Gamma \mathbf{M}^\Gamma \bar{\mathbf{n}} dc = 0 \tag{6.30}$$

式中

$$\mathbf{K}_\Gamma = \partial_\alpha \boldsymbol{\varphi}_\Gamma \otimes \mathbf{a}^\alpha + b_\alpha^\alpha \boldsymbol{\varphi}_\Gamma \otimes \mathbf{N} - \boldsymbol{\varphi}_\Delta \otimes \mathbf{n}_\Gamma^\Delta \tag{6.31}$$

$\mathbf{K}_\Gamma$就是与应力合矢$\mathbf{M}^\Gamma$相对应的应变度量张量。

在工程应用中，最有应用价值的是取n等于2，且取

$$G^1 = 1 \qquad G^2 = z \tag{6.32}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} & G_1 = \frac{1}{G}\left(\int_C \mu z^2 dz - z\int_C \mu z dz\right), \quad G_2 = \frac{1}{G}\left(-\int_C \mu z dz + z\int_C \mu dz\right) \\ & G = |G^{\alpha\beta}| = \int_C \mu z^2 dz \int_C \mu dz - \left(\int_C \mu z dz\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

记

$$\left.\begin{aligned} & N^{\alpha\beta} = \int_C \mu \mu_\gamma^\beta \sigma^{\alpha\gamma} dz, \qquad V^\alpha = N^{\alpha 3} = \int_C \mu \sigma^{\alpha 3} dz \\ & m^\alpha = \int_C \mu \mu_\gamma^\alpha \sigma^{3\gamma} dz, \qquad m^3 = \int_C \mu \sigma^{33} dz \\ & M^{\alpha\beta} = \int_C \mu \mu_\gamma^\beta \sigma^{\alpha\gamma} z dz, \qquad M^{\alpha 3} = \int_C \mu \sigma^{\alpha 3} z dz \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

平衡方程(6.25)写成分量形式：

$$\left.\begin{aligned} N^{\alpha\beta}|_\alpha - b^\beta_\alpha N^{\alpha3} + q^{1\beta} - J^1_\Delta \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{\Delta\beta} = 0 \\ N^{\alpha3}|_\alpha + b^\beta_\alpha N^{\alpha\beta} + q^{13} - J^1_\Delta \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{\Delta3} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

$$\left.\begin{aligned} M^{\alpha\beta}|_\alpha - b^\beta_\alpha M^{\alpha3} + q^{2\beta} - J^2_\Delta \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{\Delta\beta} = m^\beta \\ M^{\alpha3}|_\alpha + b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} + q^{23} - J^2_\Delta \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{\Delta3} = m^3 \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

其中 $$q^{\Delta i} - J^\Delta_\Delta \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{\Delta i} = (\mathbf{q}^\Delta - J^\Delta_\Delta \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^\Delta)\cdot \mathbf{a}_i \tag{6.37}$$

三维连续介质力学中，Cauchy 应力是对称的：

$$\epsilon_{ijk}\sigma^{ij} = 0 \tag{6.38}$$

ϵ_{ijk}为三维空间的 Eddington 张量．在二维壳面$\mathscr{A}$上，(6.38)式为

$$\epsilon_{\alpha\beta}\mu^\alpha_\gamma \mu^\beta_\delta \sigma^{\gamma\delta} = 0 \qquad \epsilon_{\gamma\delta}\sigma^{\delta3} + \epsilon_{\beta\gamma}\sigma^{3\beta} = 0 \tag{6.39}$$

在上式两式同乘以μ，并在C上积分：

$$\epsilon_{\alpha\beta}(N^{\alpha\beta} - b^\alpha_\gamma M^{\gamma\beta}) = 0, \quad (\epsilon_{\gamma\alpha} + \epsilon_{\alpha\gamma})V^\alpha = 0 \tag{6.40}$$

另外从定义(6.34)式，可得到关系式

$$V^\alpha = m^\alpha + b^\alpha_\gamma M^{\gamma3} \tag{6.41}$$

对于以壳$\mathscr{B}$为定义域的任一函数$f \in L^2[z, \mathscr{A}]$在$z=0$点对$z$进行 Taylor 展开

$$\begin{aligned} f &= f(0, \mathscr{A}) + f'(0, \mathscr{A})z + \frac{1}{2}f''(\theta, \mathscr{A})z^2 \\ &= f(0, \mathscr{A}) + hf'(0, \mathscr{A})\left(\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{2}h^2 f''(\theta, \mathscr{A})\left(\frac{z}{h}\right)^2 \\ &= f(0, \mathscr{A}) + f'(0, \mathscr{A})z + O(h^2) \qquad (|\theta| < h) \end{aligned} \tag{6.42}$$

式中h为壳的厚度．在(6.32)式的条件下，有：

$$P_n f = f(0, \mathscr{A}) + f'(0, \mathscr{A})z + O(\varepsilon_n) \tag{6.43}$$

则(2.9)式成为

$$f = f(0, \mathscr{A}) + f(0, \mathscr{A})z + O(\varepsilon_n) \tag{6.44}$$

比较(6.42)式与(6.44)式，可得到

$$\varepsilon_n = h^2 \tag{6.45}$$

七、本构方程的构造

在三维连续介质力学中，材料的本构关系为[12]：

$$\boldsymbol{\sigma} = C(\boldsymbol{\mathscr{F}}_H)$$

即$\boldsymbol{\sigma}$为变形梯度$\boldsymbol{\mathscr{F}} = \mathbf{I} + \mathrm{grad}\ \mathbf{u}$的全部历史的泛函$\mathbf{I}$为单位二阶张量．引入

$$\boldsymbol{\mathscr{F}}^* = \mathbf{I} + \mathrm{grad}(P_n \mathbf{u})$$

$\boldsymbol{\mathscr{F}}^*$的过去全部历史记为$\boldsymbol{\mathscr{F}}^*_H$，注意到

$$\boldsymbol{\sigma} = P_n \boldsymbol{\sigma} + O(\varepsilon_n)$$

故当C可微时，有

$$P_n \boldsymbol{\sigma} = C[\boldsymbol{\mathscr{F}}^*_H] + O(\varepsilon_n)$$

从前几节可知，$P_n \boldsymbol{\sigma}$ 即为杆，壳的应力合矢的函数．

八、结　论

前面几节中，我们已经得到了杆、壳理论的场方程（平衡方程），应变度量及本构方程。显且得到了它们的误差估计：平衡方程的误差估计为$O(\varepsilon_n^2)$，应变度量从功共轭原理得到，是精确的，而本构方程的误差为$O(\varepsilon_n)$。可见，这三种方程的误差量级不一致，本构方程的误差最大，从而影响了整个方程系统的误差降低。

参 考 文 献

[1] Nordgren, R. P., A bound on the error in plate theory, *Q. App. Math.*, **28** (1971), 587—595.

[2] Simmonds, J. G., An improved error estimate in the classical theory of plate bending, *Q. App. Math.*, **29** (1971), 439—447.

[3] Rychter, Z., A bound on the error in the linear theory of transversely isotropic plate bending, *Acta Mechanica*, **34** (1984), 121—126.

[4] Rychter, Z., An improved error estimate for Reissner's plate theory, *Int. J. Solids Struct.*, **24** (1986), 537—544.

[5] Rychter, Z., Global error estimate in Reissner theory of thin elastic shells, *Int. J. Engng. Sci.*, **26** (1988), 787—795.

[6] 夏道行等，《实变函数论及泛函分析》，人民教育出版社（1978）。

[7] 徐利治、王仁宏、周蕴时，《函数逼近的理论和方法》，上海科技出版社（1983）。

[8] 郭仲衡，《张量（理论及应用）》，科学出版社（1988）

[9] 黄克智，《张量分析》，清华大学出版社（1986）。

[10] 苏步青，《微分几何》，人民教育出版社（1979）。

[11] Flügge, W., *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*, Springer-verleg (1972).

[12] 德冈辰雄，《理性迫续介质力学入门》（中译本），科学出版社（1982）。

Structure of Rod Shell Theories in Hilbert Space

Zheng Quan-shui　　Yang De-pin　　Song Gu-quan

(Jiangxi Polytechnic University, Nanchang)

Abstract

This paper builds symmetrically general theories of rods, shells under mathematical frame of "Hilbert Space", and successfully obtains the error estimate to the system of the theory.

Key words theories of rod, shell, Hilbert space, error estimate