

单位圆到任意曲线保角 变换的近似计算方法*

郑志强

(哈尔滨工业大学, 1991年4月22日收到)

摘 要

本文讨论了将单位圆内部映射成由任意曲线(包括任意曲线割缝)边界围成的单连通域内部或外部的保角变换问题,以多边形逼近单连通域的边界,采用 Schwartz-Christoffel 积分建立单位圆与该多边形的映射函数,给出了确定 Schwartz-Christoffel 积分中未知参数的数值计算方法。

关键词 曲线边界 保角变换 Schwartz-Christoffel 积分

一、引 言

采用映射-复变函数方法求解边值问题在弹性力学、流体力学以及物理学中有广泛的应用,尤其在近二十年发展起来的线弹性断裂力学中,求解具有割缝边界的问题,更显示出了它的优越性。但是在以往的研究中总是局限于较规则的边界,因为可采用初等函数比较容易地将单位圆映射成这样的边界,使问题转化到单位圆上研究。事实上,我们遇到的大部分问题是任意曲线边界的边值问题。因此,无论在理论还是实际上建立单位圆与任意曲线的映射函数都具有十分重要的意义。

尽管 Reimann 定理指出了单位圆与任意曲线映射函数的存在性,但并没有给出具体的映射方法。理论上已有三种近似方法,其一是共轭三角级数法^[1],其二是建立在映射函数极小定理基础上的一种方法^[2]。这两种方法都是构造一个多项式来逼近映射函数,前者按二边界的点的对应关系,后者按映射函数在任意曲线边界的面积积分关系得到一组确定多项式系数的线性方程。二者的共同缺点是对于边界有延伸到无穷远点的情形或由割缝组成的边界无法处理,而且数值计算的程序通用性差。

第三种方法也是本文要进一步研究的^[2],克服了前两种方法的不足之处。它是用线段逼近任意曲线,这些线段构成一个多边形,采用 Schwartz-Christoffel 积分将单位圆保角映射成多边形。尽管该方法理论较完整,但没有一个可由计算机实现的计算方法,因而没有引起人们的足够重视。

本文将分别讨论把单位圆内部映射到多边形内部或外部两种情况的 Schwartz-

* 钱伟长推荐。

Christoffel 积分, 这个多边形除了可以是一个闭的 Jordan 曲线以外, 还可以是由割缝组成的或一个顶点在无穷远的特殊多边形. 同时给出了处理瑕积分的变换公式以及确定 Schwartz-Christoffel 积分中未知参数的逐次迭代线性方程组. 最终实现单位圆到任意曲线的保角映射. 文中最后一节通过三个例子说明了该方法是可行的.

二、单位圆内部保角映射到多边形内部的 Schwartz-Christoffel 积分

首先讨论将上半平面保角映射到多边形内部, 然后再经分式线性变换把单位圆内部保角变换到上半平面.

2.1 上半平面到多边形内部保角映射的 Schwarz-Christoffel 积分

定理 1^[3] 设函数 $\xi = \omega(z)$ 把上半平面 $\text{Im}z > 0$ 双方单值保角映射成内角为 $\alpha_n\pi$ $0 < \alpha_n \leq 2$, $n=1, 2, \dots, N$ 的 N 边形的内部, 而且实轴上的点 a_n ($-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_N < +\infty$) 对应于 N 边形的顶点. 那么

$$\omega(z) = C_1 \int_0^z \prod_{n=1}^N (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + C_2 \quad (2.1)$$

其中 C_1 和 C_2 为常数; $\sum_{n=1}^N \alpha_n = N - 2$.

公式(2.1)中 a_n ($n=1, 2, \dots, N$) 有三个点可以任意选取, C_1 与 C_2 可由多边形与上半平面二点的对应关系来确定. 这样, (2.1)式中有 $N-3$ 个未知参数 a_n 须由问题的条件来确定.

2.2 Schwartz-Christoffel 积分中未知参数的迭代方程组的建立

如图1所示, 若以 A_i 表示多边形的第 i 个顶角. 那么第 i 个边的长度为:

$$A_i A_{i+1} = |\xi_{i+1} - \xi_i| = |C_1| \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \prod_{n=1}^N (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt \right| \quad (2.2)$$

如果选取使 $z - a_n$ 为正实数对应 $(z - a_n)^{\alpha_n - 1}$ ($n=1, 2, \dots, N$) 的单值解析分支, 则(2.2)式可写成:

$$\begin{aligned} A_i A_{i+1} &= |C_1| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \prod_{n=1}^i (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \cdot \prod_{n=i+1}^N (a_n - t)^{\alpha_n - 1} dt \\ &= |C_1| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

式中

$$f(t) = \prod_{n=1}^i (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \cdot \prod_{n=i+1}^N (a_n - t)^{\alpha_n - 1} \quad (2.4)$$

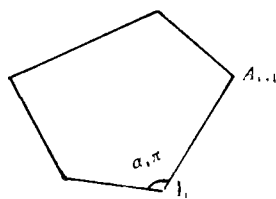


图 1 多边形

如果给定的多边形各边长与第一边的比为 $\lambda_i (i=2, 3, \dots, N)$ 则:

$$\frac{A_i A_{i+1}}{A_1 A_2} = \lambda_i \quad (A_{N+1} = A_1; i=2, 3, \dots, N-1) \quad (2.5)$$

选定(2.3)式三个参数 a_1 、 a_2 和 a_N ，方程(2.5)中独立方程只有 $N-3$ 个。令:

$$J_i(a_3, a_4, \dots, a_{N-1}) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt \quad (2.6)$$

则(2.5)式变为:

$$J_i(a_3, a_4, \dots, a_{N-1}) = \lambda_i J_1(a_3, a_4, \dots, a_{N-1}) \quad (i=2, 3, \dots, N-2) \quad (2.7)$$

下面给出方程(2.7)的近似解法。选取参量的任何一组初值 $a_j^{(0)} (j=3, 4, \dots, N-1)$ 令:

$$J_i^{(0)} = J_i(a_3^{(0)}, a_4^{(0)}, \dots, a_{N-1}^{(0)}) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial J_i^{(0)}}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} J_i(a_3^{(0)}, a_4^{(0)}, \dots, a_{N-1}^{(0)}) \quad (2.9)$$

$$\delta_j^{(1)} = a_j - a_j^{(0)} \quad (i=2, 3, \dots, N-2; j=3, 4, \dots, N-1) \quad (2.10)$$

将方程(2.7)左右两边按 $\delta_j^{(1)}$ 展成 Taylor 级数，并且只保留一次幂，就得:

$$J_i^{(0)} + \sum_{j=3}^{N-1} \delta_j^{(1)} \frac{\partial J_i^{(0)}}{\partial a_j} = \lambda_i \left(J_1^{(0)} + \sum_{j=3}^{N-1} \delta_j^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_j} \right) \quad (i=2, 3, \dots, N-2) \quad (2.11)$$

求解这个方程组得到 $\delta_j^{(1)}$ ，于是:

$$a_j^{(1)} = a_j^{(0)} + \delta_j^{(1)} \quad (j=3, 4, \dots, N-1) \quad (2.12)$$

再设

$$\delta_j^{(2)} = a_j - a_j^{(1)} \quad (j=3, 4, \dots, N-1) \quad (2.13)$$

求解类似于(2.11)式对于修正值 $\delta_j^{(2)} (j=3, 4, \dots, N-1)$ 的方程组，可得到 $\delta_j^{(2)}$ 。

一般地，迭代方程组可写成:

$$\sum_{j=3}^{N-1} \delta_j^{(k+1)} \cdot \frac{\partial}{\partial a_j} (J_i^{(k)} - \lambda_i J_1^{(k)}) = \lambda_i J_1^{(k)} - J_i^{(k)} \quad \begin{matrix} (i=2, 3, \dots, N-2) \\ (k=0, 1, 2, \dots) \end{matrix} \quad (2.14)$$

及 $a_j = a_j^{(k)} + \delta_j^{(k+1)}$

上式可以计算出 $a_j (j=3, 4, \dots, N-1)$ 的值到任意精度，即对给定的误差界EPS，总可有一个 k 使得 $\delta_j^{(k)} < \text{EPS} (j=3, 4, \dots, N-1)$ 。

2.3 迭代方程组中系数的确定

(1) 如果 $a_i - 1 > 0$ ， $a_{i+1} - 1 > 0$ ，则积分(2.6)为定积分，可以直接采用一种数值积分方法计算其值。而

$$\frac{\partial J_i}{\partial a_j} = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1-a_j}{t-a_j} f(t) dt \quad (2.15)$$

(2) 更一般地, 如果 $\alpha_i - 1 < 0$, $\alpha_{i+1} - 1 < 0$ 则积分(2.6) 是以 a_i 与 a_{i+1} 为瑕点的瑕积分。

取 (a_i, a_{i+1}) 区间中任意一点 c_i , 在 (a_i, c_i) 上积分作 $t = a_i + x^{1/\alpha_i}$ 的变换, 在 (c_i, a_{i+1}) 上的积分作 $t = a_{i+1} - x^{1/\alpha_{i+1}}$ 的变换, 消去奇异项可将瑕积分转化为定积分:

$$J_i = \frac{1}{\alpha_{i+1}} \int_0^B \varphi(a_{i+1} - x^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}) dx + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^E \psi(a_i + x^{\frac{1}{\alpha_i}}) dx \quad (2.16)$$

式中 $B = (a_{i+1} - c_i)^{\alpha_{i+1}}$, $E = (c_i - a_i)^{\alpha_i}$

$$\varphi(t) = \prod_{n=1}^i (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \prod_{n=i+2}^N (a_n - t)^{\alpha_n - 1} \quad (2.17)$$

$$\psi(t) = \prod_{n=1}^{i-1} (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \prod_{n=i+1}^N (a_n - t)^{\alpha_n - 1} \quad (2.18)$$

关于(2.16)的 $\partial J_i / \partial a_j$:

A) 当 $j < i$ 或 $j > i+1$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_i}{\partial a_j} &= \frac{1}{\alpha_{i+1}} \int_0^B \frac{1-a_j}{a_{i+1} - x^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}} - a_j} \varphi(a_{i+1} - x^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}) dx \\ &+ \frac{1}{\alpha_i} \int_0^E \frac{1-a_j}{a_i + x^{\frac{1}{\alpha_i}} - a_j} \psi(a_i + x^{\frac{1}{\alpha_i}}) dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

B) 当 $j = i$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_i}{\partial a_i} &= \frac{1}{\alpha_{i+1}} \int_0^B \frac{1-a_i}{a_{i+1} - a_i - x^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}} \varphi(a_{i+1} - x^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}) dx \\ &- \psi(c_i)(c_i - a_i)^{\alpha_i - 1} + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^E \psi'(a_i + x^{\frac{1}{\alpha_i}}) dx \end{aligned} \quad (2.20)$$

这里

$$\psi'(t) = \psi(t) \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N \frac{\alpha_n - 1}{t - a_n} \quad (2.21)$$

C) 当 $j = i+1$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_i}{\partial a_{i+1}} &= \varphi(c_i)(a_{i+1} - c_i)^{\alpha_{i+1} - 1} + \frac{1}{\alpha_{i+1}} \int_0^B \varphi'(a_{i+1} - x^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}) dx \\ &+ \frac{1}{\alpha_i} \int_0^E \frac{\alpha_{i+1} - 1}{a_{i+1} - a_i - x^{\frac{1}{\alpha_i}}} \psi(a_i + x^{\frac{1}{\alpha_i}}) dx \end{aligned} \quad (2.22)$$

这里

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i+1}}^N \frac{\alpha_n - 1}{t - a_n} \quad (2.23)$$

2.4 上半平面到有一顶角在无穷远点的多边形内部保角变换的 Schwartz-Christoffel 积分

如果多边形一顶角如 A_n 点对应于上半平面的无穷远点, 这相当选定了 $a_n = \infty$. 作变换 $z = a_{N-1}/w$ 则(2.1)式变为:

$$\xi = C_1' \int_0^w \prod_{n=1}^{N-1} (t - a_n')^{\alpha_n - 1} dt + C_2' \quad (2.24)$$

只要选定二个参数 a_1' 和 a_2' , 采用前述相同的方法可以确定出其余 $N-3$ 个参数.

特别地如果多边形顶角 A_n 在无穷远处, 采用公式(2.24)即可避开 $(t - a_n)^{\alpha_n - 1}$ 项由于 $\alpha_n < 0$ 引起的瑕积分的计算.

2.5 单位圆内部到多边形内部保角变换的 Schwartz-Christoffel 积分

将单位圆内部保角映射到上半平面可采用分式线性变换:

$$\eta = \frac{z - \gamma}{z - \bar{\gamma}} \quad \text{或} \quad z = \frac{\gamma - \eta \bar{\gamma}}{1 - \eta} \quad (2.25)$$

式中 γ 为上半平面的任意一点.

把(2.25)式代入(2.1)式, 得:

$$\xi = \Omega(\eta) = C_1 \int_0^{\frac{\gamma - \eta \bar{\gamma}}{1 - \eta}} \prod_{n=1}^N (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + C_2 \quad (2.26)$$

或为

$$\xi = \Omega(\eta) = C_1' \int_0^\eta \sum_{n=1}^N (t - a_n')^{\alpha_n - 1} dt + C_2' \quad (2.27)$$

$$\text{式中} \quad a_n' = \frac{a_n - \gamma}{a_n - \bar{\gamma}} \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (2.28)$$

为单位圆周上按逆时针方向依次排列的点.

公式(2.27)就是将单位圆内部保角映射成多边形内部的 Schwartz-Christoffel 积分. 事实上只要由方程(2.14)求出 $a_j (j=3, 4, \dots, N-1)$, 就可以认为函数 $\xi = \Omega(\eta)$ 已经确定.

三、单位圆内部保角映射到多边形外部的 Schwartz-Christoffel 积分

定理 2^[3]: 设函数 $\xi = \omega(z)$ 把上半平面 $\text{Im}z > 0$ 双方单值保角映射成外角为 $\alpha_n \pi (0 < \alpha_n < 2, n=1, 2, \dots, N)$ 的 N 边形的外部, 而且实轴上的点 $a_n (-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < +\infty)$ 对应于 N 边形的顶点, 那么

$$\xi = \omega(z) = C_1 \int_0^z \prod_{n=1}^N (t - a_n)^{\alpha_n - 1} (t - \gamma)^2 (t - \bar{\gamma})^2 dt + C_2 \quad (3.1)$$

其中 C_1 及 C_2 为常数; γ 为上半平面中的一点. 而且 $\sum_{n=1}^N \alpha_n = N + 2$.

对(3.1)式作

$$\eta = \frac{z-\gamma}{z-\bar{\gamma}} \quad \text{或} \quad z = \frac{\gamma-\eta\bar{\gamma}}{1-\eta} \quad (3.2)$$

的变换, 得到

$$\xi = \Omega(\eta) = C_1' \int_0^\eta \prod_{n=1}^N (t-a_n')^{\alpha_n-1} \frac{dt}{t^2} + C_2' \quad (3.3)$$

$$\text{式中} \quad a_n' = \frac{a_n - \gamma}{a_n - \bar{\gamma}} \quad (3.4)$$

为单位圆周上按顺时针方向依次排列的点.

公式(3.3)即为将单位圆内部保角映射到多边形外部的 Schwartz-Christoffel 积分. 问题的求解在于确定 γ 和 $a_n (n=1, 2, \dots, N)$.

类似于前节的讨论, 取定 γ 、 a_1 和 a_2 , 可以得到关于(3.1)式的迭代方程组:

$$\sum_{j=3}^N \delta_j^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial a_j} (J_i^{(k)} - \lambda_i J_1^{(k)}) = \lambda_i J_i^{(k)} - J_i^{(k)} \quad (i=2, 3, \dots, N-1; k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

$$\text{式中} \quad J_i^{(k)} = \int_{a_i}^{i+1} \prod_{n=1}^i (t-a_n^{(k)})^{\alpha_n-1} \prod_{n=i+1}^N (a_n^{(k)}-t)^{\alpha_n-1} \frac{dt}{(t-\gamma)^2(t-\bar{\gamma})^2} \quad (3.6)$$

若取 $\gamma = i = \sqrt{-1}$ 令:

$$f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \prod_{n=1}^i (t-a_n)^{\alpha_n-1} \prod_{n=i+1}^N (a_n-t)^{\alpha_n-1} \quad (3.7)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \prod_{n=1}^i (t-a_n)^{\alpha_n-1} \prod_{n=i+2}^N (a_n-t)^{\alpha_n-1} \quad (3.8)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \prod_{n=1}^{i-1} (t-a_n)^{\alpha_n-1} \prod_{n=i+1}^N (a_n-t)^{\alpha_n-1} \quad (3.9)$$

则

$$\varphi'(t) = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i+1}}^i \frac{\alpha_n-1}{t-a_n} - \frac{4t}{1+t^2} \right) \varphi(t) \quad (3.10)$$

$$\psi'(t) = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{i-1} \frac{\alpha_n-1}{t-a_n} - \frac{4t}{1+t^2} \right) \psi(t) \quad (3.11)$$

这样方程(3.5)中的 $J_i^{(k)}$ 与 $\partial J_i^{(k)} / \partial a_j$ 的计算公式与2.3节给出的完全相同.

四、算例与讨论

用 FORTRAN 语言编制关于方程(2.14)和(3.5)的程序,在 ASTP286 机上运行.输入 α_i , $\alpha_i^{(0)}$ 和 λ_i ,采用高斯法求积分,全主元高斯消去法求解线性方程组,取误差界 $EPS = 10^{-5}$.算例如下.

例1 将上半平面保角映射到以圆与沿其径长等于半径的割缝为边界(简称边界 I)所围成区域的内部.

边界 I 如图 2 所示.表 1 和表 2 分别给出了以十四边形和十八边形逼近边界 I 时计算的输入参数与计算结果.

例2 将上半平面保角映射到以 1/4 圆弧割缝为边界(简称边界 II)所围成的区域的外部.

边界 II 如图 3 所示.表 3 和表 4 分别给出了以六边形和十二边形逼近边界 II 时计算的输入参数与计算结果.

例3 将上半平面保角映射到以割缝和凹线构成的十三边形(一顶角在无穷远处)为边界(简称边界 III)的下半平面.

边界 III 如图 4 所示.表 5 给出了计算的输入参数与计算结果.

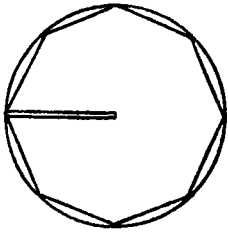


图2 边界 I

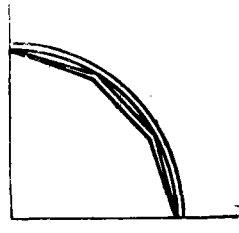


图3 边界 II

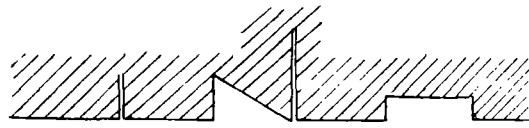


图4 边界 III

表1 上半平面映射到以十四边形逼近边界 I 内部的输入参数与计算结果

i	1	2	3	4	5	6	7
α_i	0.83333	0.83333	0.83333	0.83333	0.83333	0.83333	0.41667
$\alpha_i^{(0)}$	-5	-1	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4
λ_i		1	1	1	1	1	1.93185
a_i	-5	-1	-0.32323	-0.06055	0.06549	0.12568	0.14374
i	8	9	10	11	12	13	14
α_i	2	0.41667	0.83333	0.83333	0.83333	0.83333	0.83333
$\alpha_i^{(0)}$	-0.3	-0.2	0.2	0.4	0.6	0.8	5
λ_i	1.93185	1	1	1	1		
a_i	0.71429	1.42722	1.45563	1.55370	1.77745	2.34336	5

通过以上计算我们认为:

(1)、以多角形逼近任意曲线可以达到任意的接近程度.当然随着多边形边数的增加,计算量也相应地增大.

(2)、通过对结果的验证(计算(2.1)式、(2.24)式和(3.1)式)可知,误差在 10^{-3} 、 10^{-4} 和 10^{-5} 时对映射效果影响不大.

表2 上半平面映射到以十八边形逼近边界 I 内部的输入参数与计算结果

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α_i	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.4375
$\alpha_i^{(0)}$	-5	-2	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.2	0.4	0.6
λ_i		1	1	1	1	1	1	1	2.56292
a_i	-5	-2	-1.37868	-1.11852	-0.98159	-0.90231	-0.85582	-0.83112	-0.82336
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
α_i	2	0.4375	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875
$\alpha_i^{(0)}$	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	5
λ_i	2.56292	1	1	1	1	1	1	1	5
a_i	-0.38461	0.15713	0.16902	0.20749	0.28281	0.42067	0.69153	1.36165	5

表3 上半平面映射到以六边形逼近边界 I 外部的输入参数与计算结果

i	1	2	3	4	5	6
α_i	2	0.83333	0.83333	2	1.16667	1.16667
$\alpha_i^{(0)}$	-5	-3	-1	0	0.5	1
λ_i		1	-1	1	1	
a_i	-5	-3	-2.51682	-1.76947	-1.23857	-1.05165

表4 上半平面映射到以十二边形逼近边界 I 外部的输入参数与计算结果

i	1	2	3	4	5	6
α_i	2	0.91667	0.91667	0.91667	0.91667	0.91667
$\alpha_i^{(0)}$	-5	-3	-1	-0.8	-0.4	0.4
λ_i		1	1	1	1	1
a_i	-5	-3	-2.57339	-2.28946	-2.05113	-1.80884
i	7	8	9	10	11	12
α_i	2	1.08333	1.08333	1.08333	1.08333	1.08333
$\alpha_i^{(0)}$	0.8	1	1.4	1.8	2	3
λ_i	1	1	1	1	1	
a_i	-1.32560	-0.93450	-0.78300	-0.67556	-0.59296	-0.52857

表5 上半平面映射到边界 II 内部的输入参数与计算结果

i	1	2	3	4	5	6
α_i	0.5	2	0.5	0.5	1.66667	0.33333
$\alpha_i^{(0)}$	-5	-2.5	-1	0	1	2
λ_i		1	2	1	2	2
a_i	-5	-2.5	-0.28274	1.16330	2.86010	5.82392
i	7	8	9	10	11	12
α_i	2	0.5	0.5	1.5	1.5	0.5
$\alpha_i^{(0)}$	5	8	10	15	20	25
λ_i	2	1	0.5	1	0.5	
a_i	10.29440	15.27243	15.45625	15.76246	18.71499	19.50527

(3)、对于任意选取的 $N-2$ (或 $N-3$) 个初值 $\alpha_i^{(0)}$, 如果迭代一次使其中的一个小于选

定的 $a_2^{(0)}$, 则下次迭代会出现负数开方的错误而停止程序的运行。实际计算时可以选取一组初值试算, 以保证 $a_i^{(0)} (i=1, 2, \dots, N)$ 的单调性 (可以编一段程序重排任选初值的顺序, 只要它们不小于 $a_2^{(0)}$ 而保递增即可)。

(4)、算例中迭代次数 LJI 依次是 7, 8, 11, 8 和 10。LJI 取决于初值 $a_j^{(0)}$ 的选取。实际上, 可以选取较大的 EPS (如 $\text{EPS}=5 \times 10^{-2}$) 计算, 然后选取这时结果作为初值正式计算, 这样可以降低迭代次数减少运行时间。

总之, 用该方法进行近似映射是行之有效的。它不仅适用于单位圆到一般的闭曲线的映射, 也适用于单位圆到特殊的闭曲线 (如任意闭割缝) 或有一点在无穷远点的“闭”曲线的映射, 而且程序输入数据简单、通用性强。这使该方法优于其它方法。并且这种计算方法的实现为求解一类极有应用价值的数学物理方程提供了可能性。

参 考 文 献

- [1] 樊大钧编, 《数学弹性力学》, 新时代出版社(1983), 274~279.
- [2] 格.列.伦兹等著, 熊振翔等译, 《复变函数与运算微积初步》, 人民教育出版社(1960), 181~184.
- [3] 伊.伊.普里瓦洛夫等, 《复变函数引论》, 闵嗣鹤等译, 人民教育出版社(1950), 433, 444.

An Approximate Method on the Conformal Mapping from a Unit Circle to an Arbitrary Curve

Zheng Zhi-qiang

(Department of Mechanics, Haerbin Institute of Technology, Haerbin)

Abstract

In this paper, the conformal mapping problem on the transformation from the interior of a unit circle to the interior of the simply connected region or exterior with an arbitrary curvilinear boundary (including an arbitrary curvilinear cut crack) is discussed. The boundary of the simply connected region is approximated by a polygon. The mapping function from a unit circle to a polygon is founded by using the Schwartz-Christoffel integral. A numerical calculation method to determine the unknown parameters in the Schwartz-Christoffel integral is given.

Key words arbitrary curve, mapping, Schwartz-Christoffel integral