应用数学和力学，第13卷第5期（1992年5月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘弹性厚板的动力方程*

杨正文　　杨挺青

（华中理工大学力学系，1991年5月11日收到）

摘　　要

本文导出了一般粘弹性厚板含剪切、挤压和转动惯性效应的动力方程，它是弹性厚板动力方程的推广。据此方程还可退化得到若干种类型的中厚度粘弹性板的动力方程。

关键词　粘弹性　厚板　动力方程

一、引　　言

与弹性薄板理论相比，弹性厚板理论近似地计及了剪切、挤压和转动惯性三种效应。由于有关效应所作的几何假设不尽相同，便形成各种类型的弹性厚板理论[1~3]；有关弹性厚板的动力理论，在文献[4]中有较全面的论述.

粘弹性板的许多研究工作，大多讨论准静态情形[5~8]。Mase 曾直接写出线性小挠度粘弹性板的动力方程[9]，但只限于薄板且未论述缘由。Pan 采用粘弹性材料微分型本构关系，推导出线性小挠度粘弹性中厚板的控制方程[10]，它是弹性Mindlin中厚板动力方程的推广，曾被Nagaya 引用于曲边板[11]。关于粘弹性厚板的一些文献[12~14]，均考虑某些较特殊的情况。

本文从动力学基本方程出发，采用粘弹性积分型本构关系，利用推导弹性厚板方程的类似方法，导出一般粘弹性厚板的动力方程。由此方程，可以简化得到若干特殊情况下的厚板动力方程。

二、基本关系与假设

设应力、应变和位移张量分别用σ_{ij}，ε_{ij}和u_i来表示，则小变形线性几何关系为

$$2\varepsilon_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i} \tag{2.1}$$

不计体力时三维理论的运动方程为

$$\sigma_{ij,j}=\rho \ddot{u}_i \tag{2.2}$$

其中　ρ为材料的密度。

* 卢文达推荐.国家自然科学基金资助项目。

积分型本构关系

$$S_{ij}=2G*de_{ij},\quad \sigma_{kk}=3K*d\varepsilon_{kk} \tag{2.3a、b}$$

其中　S_{ij}和e_{ij}分别表示应力偏量和应变偏量张量，σ_{kk} 和ε_{kk}分别为体应力和体应变，$G(t)$和$K(t)$分别是粘弹性材料的剪切和体积松驰函数，且有定义[15]

$$G*de_{ij}=\int_{-\infty}^{t}G(t-\zeta)\dot{e}_{ij}d\zeta \tag{2.4}$$

在处理粘弹性薄板的准静态问题时均引用弹性薄板理论，因而采用的是经典弹性薄板理论的几何假设。在小变形及线性本构关系情况下，材料性质对几何假设的影响可忽略不计，故对于粘弹性厚板，可参照弹性厚板理论作几何假设。连同材料方向，本文作如下假设。

1．板面方向位移偏离直法线部分沿各截面几何相似，即偏离部分可分离变量。

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z+\varphi(x,y,t)f(z),\quad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z+\psi(x,y,t)f(z) \tag{2.5a、b}$$

其中　u，v和w分别表示$u_i(i=x,y,z)$，右端第二项表示板面方向位移偏离直法线部分，φ、ψ及 f 均为待定函数。事实上，偏离部分的形式与剪应力的分布有关。

2．挤压变形沿各截面几何相似。

为简便计，采用惯用符号，如$\sigma_x=\sigma_{xx}$。若不计及挤压应力，板面变形只取决于弯曲应力σ_x和σ_y；当考虑挤压变形时，挤压变形对弯曲应力的影响相当于增加一项正比于σ_z的部分。因此，由式(2.3)此假设可表为

$$(K+4G/3)*\sigma_x=(K+G/3)*4G*d\varepsilon_x+(K-2G/3)*2G*d\varepsilon_y+A*qB(z) \tag{2.6a}$$

$$(K+4G/3)*\sigma_y=(K+G/3)*4G*d\varepsilon_y+(K-2G/3)*2G*d\varepsilon_x+A*qB(z) \tag{2.6b}$$

$$\tau_{xy}=G*d\gamma_{xy} \tag{2.6c}$$

其中　$B(z)$为挤压变形函数，A是决定于粘弹性材料性质的函数，$q(x,y,t)$ 为板面所受的横向分布荷载。

为了满足上下表面的边条件，在没有受外截的表面应没有挤压变形，而在受外截的表面上应完全计及挤压变形．当只有板的上表面受分布外截时，由式(2.6)可见，应有

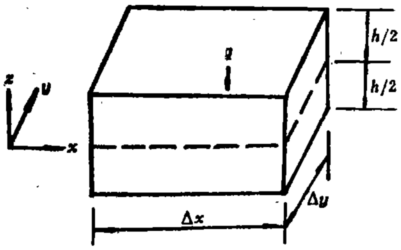

图1　粘弹性厚板

$$B(-h/2)=0,\quad B(h/2)=1 \tag{2.7a,b}$$

单位宽度上的弯矩，扭矩和剪力分别为

$$M_x(x,y,t)=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z dz,\quad M_y=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y z dz,\quad M_{xy}(x,y,t)=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}zdz \tag{2.8a,b,c}$$

$$Q_x(x,y,t)=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{zx}dz,\quad Q_y=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{zy}dz \tag{2.9a,b}$$

由式(2.1)和式(2.5)得

$$\gamma_{zx}=\varphi f'(z),\quad \gamma_{zy}=\psi f'(z) \tag{2.10a,b}$$

将式(2.9)及式(2.10)代入式(2.3a)，有

$$\tau_{zx}=G*d\gamma_{zx}=f'(z)G*d\sigma\equiv T(z)Q_x(x,y,t) \tag{2.11a}$$

$$\tau_{zy}=G*d\gamma_{zy}=f'(z)G*d\psi\equiv T(z)Q_y(x,y,t) \tag{2.11b}$$

其中待定函数$T(z)$满足

$$\int_{-h/2}^{h/2} T(z)dz=1 \tag{2.12}$$

不失一般性，设$f(0)=0$，则在$z=0$处有$u=v=0$，将式(2.11)沿厚度积分得

$$f(z)=\frac{Q_x p(z)}{G*d\varphi}=\frac{Q_y p(z)}{G*d\psi} \tag{2.13}$$

其中引入考虑剪切效应的偏离位移分布函数$p(z)$，且

$$p(z)=\int_0^z T(\zeta)d\zeta \tag{2.14}$$

由式(2.12)和式(2.14)可知，$p(z)$应满足

$$p(h/2)-p(-h/2)=1 \tag{2.15}$$

3. 材料为自然状态，满足光滑化初始条件[16]。在作Laplace变换过程中，认为有关函数及其各阶导数的初值为零[15]，也即定义Laplace变换为

$$\bar{g}(s)=\int_{0^-}^{\infty} g(t)\exp[-st]dt \tag{2.16a}$$

且 $$g^{(n)}(t)=s^n\bar{g}(s) \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{2.16b}$$

其中s是Laplace变换参量。

三、一般粘弹性厚板的动力方程

本节应用上述基本关系与例设推导一般动力方程。

式(2.5a)可改写为

$$u+\frac{\partial w}{\partial x}z=f(z)\varphi$$

两边对时间t求导数，然后与G作卷积并利用式(2.13)，整理得

$$G*du=Q_x p(z)-G*d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)z \tag{3.1a}$$

同理

$$G*dv=Q_y p(z)-G*d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)z \tag{3.1b}$$

将式(3.1)作Laplace变换后乘以$1/s$，再作逆变换得

$$G*u=Q_x*H(t)p(z)-zG*\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.2a}$$

$$G*v=Q_y*H(t)p(z)-zG*\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.2b}$$

其中 $H(t)$为Heaviside单位阶跃函数。

由式(2.1)及式(3.1)有

$$G*d\varepsilon_x=\frac{2Q_x}{\partial x}p(z)-G*d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)z,\quad G*d\varepsilon_y=\frac{\partial Q_y}{\partial y}p(z)-G*d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)z \tag{3.3a、b}$$

$$G*d\gamma_{xy}=\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y}+\frac{\partial Q_y}{\partial x}\right)p(z)-2G*d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)z \tag{3.3c}$$

将式(2.6a)两边同乘以z之后沿厚度积分，考虑式(2.8)及式(2.3)得

$$(K+4G/3)*M_x=4(K+G/3)*\left[\frac{\partial Q_x}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}p(z)zdz-G*d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2}z^2dz\right]$$

$$+2(K-2G/3)*\left[\frac{\partial Q_y}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}p(z)zdz-G*d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2}z^2dz+A*q\int_{-h/2}^{h/2}B(z)zdz\right.$$

即

$$(K+4G/3)*M_x=\frac{h^3}{12}\left[4(K+G/3)*\frac{\partial\beta_x}{\partial x}+2(K-2G/3)*\frac{\partial\beta_y}{\partial y}+\frac{K_\sigma}{h}A*q\right] \tag{3.4a}$$

同理

$$(K+4G/3)*M_y=\frac{h^3}{12}\left[4(K+G/3)*\frac{\partial\beta_y}{\partial y}+2(K-2G/3)*\frac{\partial\beta_x}{\partial x}+\frac{K_\sigma}{h}A*q\right] \tag{3.4b}$$

$$M_{xy}=\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y}+\frac{\partial\beta_y}{\partial x}\right) \tag{3.4c}$$

其中

$$\beta_x=Q_x\frac{K_\tau}{h}-G*d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \beta_y=Q_y\frac{K_\tau}{h}-G*d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3.5a,b}$$

$$K_\tau=\frac{12}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2}p(z)zdz,\qquad K_\sigma=\frac{12}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2}B(z)zdz \tag{3.6a,b}$$

为了将三维运动方程用内力来表示，将式(2.2)中前两式乘以z后沿厚度积分，第三式直接沿厚度积分，利用式(2.8)和式(2.9)得

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\ddot{u}zdz \tag{3.7a}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\ddot{v}zdz,\quad \frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=\rho h\ddot{w} \tag{3.7b,c}$$

注意到$\overline{\partial(G*\dot{u})/\partial t}=\bar{G}s^2\bar{u}=\overline{G*\ddot{u}}$，从而$\partial(G*\dot{u})/\partial t=G*\ddot{u}$，故式(3.7a)两边与$G$作卷积后，将式(3.1a)代入得

$$G*\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho z\frac{\partial}{\partial t}\left[Q_xp(z)-G*d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)z\right]dz$$

即

$$G*\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x\right)=\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial\beta_x}{\partial t} \tag{3.8a}$$

同理

$$G*\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y\right)=\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial\beta_y}{\partial t} \tag{3.8b}$$

由式(3.5)解得Q_x和Q_y代入式(3.7c)有

$$\frac{h}{K_\tau}\left[\frac{\partial\beta_x}{\partial x}+\frac{\partial\beta_y}{\partial y}+G*d[\nabla^2 w)\right]+q=\rho h\ddot{w} \tag{3.9}$$

为进一步将式(3.8)也表示为β_x、β_y和w的方程组，综合式(3.4)和式(3.8)，从中消去M_x，M_y和M_{xy}得到

$$G*(K+4G/3)*Q_x=\frac{h^3}{12}G*\left[4(K+G/3)*\frac{\partial^2\beta_x}{\partial x^2}+3K*\frac{\partial^2\beta_y}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+(K+4G/3)*\frac{\partial^2\beta_x}{\partial y^2}+\frac{K_\sigma}{h}A*\frac{\partial q}{\partial x}\right]-\frac{\rho h^3}{12}(K+4G/3)*d\beta_x \tag{3.10a}$$

$$G*(K+4G/3)*Q_y=\frac{h^3}{12}G*\left[4(K+G/3)*\frac{\partial^2\beta_y}{\partial y^2}+3K*\frac{\partial^2\beta_x}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+(K+4G/3)*\frac{\partial^2\beta_y}{\partial x^2}+\frac{K_\sigma}{h}A*\frac{\partial q}{\partial y}\right]-\frac{\rho h^3}{12}(K+4G/3)*d\beta_y \tag{3.10b}$$

将由式(3.5)解得的Q_x和Q_y代入式(3.10)得

$$G*(K+4G/3)\frac{h}{K_\tau}*\left[\beta_x+G*d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]=\frac{h^3}{12}G*\left[4(K+G/3)*\frac{\partial^2\beta_x}{\partial x^2}+3K*\frac{\partial^2\beta_y}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+(K+4G/3)*\frac{\partial^2\beta_x}{\partial y^2}+\frac{K_\sigma}{h}A*\frac{\partial q}{\partial x}\right]-\frac{\rho h^3}{12}(K+4G/3)*d\beta_x \tag{3.11a}$$

$$G*(K+4G/3)\frac{h}{K_\tau}*\left[\beta_y+G*d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]=\frac{h^3}{12}G*\left[4(K+G/3)*\frac{\partial^2\beta_y}{\partial y^2}+3K*\frac{\partial^2\beta_x}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+(K+4G/3)*\frac{\partial^2\beta_y}{\partial x^2}+\frac{K_\sigma}{h}A*\frac{\partial q}{\partial y}\right]+\frac{\rho h^3}{12}\left(K+\frac{4}{3}G\right)*d\beta_y \tag{3.11b}$$

式(3.9)和式(3.11)即以β_x，β_y和w为参量的基本微分方程组。若由此解得β_x，β_y和w，则可由式(3.5)求得Q_x和Q_y，由式(3.4)计算M_x、M_y和M_{xy}。

为寻求只以挠度w为未知参量的方程，将式(3.7c)两边与$G*(K+4G/3)$作卷积，用式(3.10)代入有

$$\frac{h^3}{12}G*\left[4\left(K+\frac{G}{3}\right)*\nabla^2\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial x}+\frac{\partial\beta_y}{\partial y}\right)+\frac{K_\sigma}{h}A*\nabla^2 q\right]-\frac{\rho h^3}{12}\left(K+\frac{4G}{3}\right)$$

$$*d\left(\frac{\alpha\beta_x}{\partial x}+\frac{\partial\beta_y}{\partial y}\right)+G*\left(K+\frac{4G}{3}\right)*q=\rho hG*\left(K+\frac{4G}{3}\right)*\ddot{w} \tag{3.12}$$

将从式(3.9)解出的$(\partial\beta_x/\partial x+\partial\beta_y/\partial y)$代入式(3.12)，便得到仅含未知参量——挠度$w$的一般粘弹性厚板的动力方程：

$$\frac{h^3}{12}G*4\left(K+\frac{G}{3}\right)*G*\frac{\partial}{\partial t}\nabla^4 w-4I_0K_\tau G*\left(K+\frac{G}{3}\right)*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 w-I_0G*\left(K+\frac{4G}{3}\right)$$

$$*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 w+\rho I_0K_\tau\left(K+\frac{4G}{3}\right)*\frac{\partial^3}{\partial t^3}w+\rho hG*\left(K+\frac{4G}{3}\right)*\frac{\partial^2}{\partial t^2}w$$

$$=-\frac{h^2}{12}G*\left[4K_\tau\left(K+\frac{G}{3}\right)-K_\sigma A\right]*\nabla^2 q$$

$$+I_0\frac{K_\tau}{h}\left(K+\frac{4G}{3}\right)*\frac{\partial}{\partial t}q+G*\left(K+\frac{4G}{3}\right)*q \tag{3.13}$$

其中 $I_0=\rho h^3/12$。

式(3.13)是一个关于挠度w的微分积分方程，其中仅含有I_0，K_τ或K_σ的项分别表示转

动惯性效应、剪切效应或挤压效应项，而含I_0，K_τ和K_σ中两者的有关项表示两种耦合效应项。

虽然在最一般情况下不能直接求解式（3.13），但可以将此式简化应用于各种特殊情形。以下将举例说明。

四、若干特殊情况

1. 弹性厚板

对于弹性材料，K及G均为常量。而对n个常数$b_i(i=1,2,\cdots,n)$有关系式

$$b_1*b_2*\cdots*b_n*\frac{\partial^n}{\partial t^n}w=b_1b_2\cdots b_nw \tag{4.1}$$

于是，对式(3.13)两边关于时间t求两次导数，并利用式(4.1)，得

$$\begin{aligned}&\frac{h^3}{12}G^2\cdot 4\left(K+\frac{G}{3}\right)\nabla^4w-I_0K_\tau G\cdot 4\left(K+\frac{G}{3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2w-I_0G\left(K+\frac{4G}{3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2w\\&\quad+\rho I_0K_\tau\left(K+\frac{4G}{3}\right)\frac{\partial^4}{\partial t^4}w+\rho hG\left(K+\frac{4G}{3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}w\\&=\frac{I_0K_\tau}{h}\left(K+\frac{4G}{3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}q-\frac{h^2}{12}G\left[4K_\tau\left(K+\frac{G}{3}\right)-K_\sigma A\right]\nabla^2q+G\left(K+\frac{4G}{3}\right)q\end{aligned}\tag{4.2}$$

若取$A=K-2G/3$，考虑到弹性常数关系式

$$3K=\frac{E}{1-2\mu},\quad 2G=\frac{E}{1+\mu}$$

其中E和μ分别表示弹性材料的拉压模量和泊桑比。记

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},\quad C=\frac{E}{\mu(1+\mu)}$$

则式(4.2)改写为

$$\begin{aligned}&\nabla^4w-\left(\frac{\rho K_\tau}{G}+\frac{I_0}{D}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2w+\frac{\rho K_\tau}{G}\,\frac{I_0}{C}\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}w+\frac{\rho h}{D}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}w\\&\quad=\frac{K_\tau}{Gh}\,\frac{I_0}{D}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}q+\left(\frac{K_\sigma}{Ch}-\frac{K_\tau}{Gh}\right)\nabla^2q+\frac{q}{D}\end{aligned}\tag{4.3}$$

此即弹性厚板的动力方程，与文献[4]中式（2.23a）完全相同。故本文导出的一般粘弹性厚板方程可以退化到相应弹性厚板的动力方程。

2. 粘弹性Mindlin中厚板

为便于比较，应用粘弹性材料微分型本构关系，将微分积分方程式（3.13）化为微分方程。微分本构关系为

$$p'S_{ij}=Q'e_{ij},\quad p''\sigma_{kk}=Q''\varepsilon_{kk} \tag{4.4a,b}$$

其中p'、Q'、p''和Q''都是关于时间t的线性微分算子。对式(2.3)和式(4.4)分别作Laplace变换，得到关系式

$$s\bar{G}=\bar{Q}'/2\bar{p}',\quad s\bar{K}=\bar{Q}''/3\bar{p}'' \tag{4.5a,b}$$

将一般方程式(3.13)作Laplace变换，有

$$\frac{h^3}{12}\bar{G}^2\cdot 4\left(\bar{K}+\frac{\bar{G}}{3}\right)s\nabla^4\bar{w}-4I_0K_\tau\bar{G}\left(K+\frac{\bar{G}}{3}\right)s^2\nabla^2\bar{w}$$
$$-I_0\bar{G}\left(\bar{K}+\frac{4\bar{G}}{3}\right)s^2\nabla^2\bar{w}+\rho I_0K_\tau\left(\bar{K}+\frac{4\bar{G}}{3}\right)s^3\bar{w}+\rho h\bar{G}\left(\bar{K}+\frac{4\bar{G}}{3}\right)^2 s\bar{w}$$
$$=-\frac{h^2}{12}\bar{G}[4K_\tau(\bar{K}+\bar{G}/3)-K_\sigma\bar{A}]\nabla^2\bar{q}+\frac{I_0K_\tau}{h}\left(\bar{K}+\frac{4\bar{G}}{3}\right)s\bar{q}+\bar{G}\left(\bar{K}+\frac{4\bar{G}}{3}\right)\bar{q} \tag{4.6}$$

依Mindlin中厚板理论，设偏离位移分布函数为正弦函数而忽略挤压变形，即

$$p(z)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi z}{h}, \quad B(z)=0$$

代入式(3.6)得

$$K_\tau=12/\pi^2,\ K_\sigma=0 \tag{4.7}$$

将式(4.6)两边同作用算子$6s^2\bar{p}'^3\bar{p}''$，并利用式(4.5)和式(4.7)，然后作 Laplace 逆变换得

$$\Big[\Big((2p'Q''+p''Q')Q'^2\frac{h^3}{12}\nabla^4-(p'Q''+2p''Q')Q'p'I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2-\frac{2}{\chi^2}(2p'Q''+p''Q')$$
$$\cdot Q'p'I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2+\frac{2\rho}{\chi^2}I_0(p'Q''+2p''Q')p'^2\frac{\partial^4}{\partial t^4}+(p'Q''+2p''Q')Q'p'\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big]w$$
$$=\Big[(p'Q''+2p''Q')p'Q'-\frac{2}{\chi^2}(2p'Q''+p''Q')Q'p'\frac{h^2}{12}\nabla^2$$
$$+\frac{\rho h^2}{6\chi^2}(p'Q''+2p''Q')p'\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big]q \tag{4.8}$$

其中　$\chi^2=\pi^2/12$.式(4.8)即粘弹性Mindlin中厚板的动力方程，与Pan所导出的方程[10]一致。由此可见，由一般厚板方程式(3.13)可简化得到仅考虑剪切变形与转动惯性影响的厚板方程。

若不计剪切变形和转动惯性的影响，则方程式 (4.8)即化简为 Mase[9]所给出的粘弹性薄板的基本方程。

3. 粘弹性Reissner中厚板

若设偏离位移函数和挤压变形函数均为三次函数，即

$$p(z)=\frac{3}{2}\left[\frac{z}{h}-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right],\quad B(z)=\frac{3}{4}\left[\frac{z}{h/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{h/2}\right)^3+\frac{2}{3}\right]$$

代入式(3.6)得

$$K_\tau=6/5,\qquad K_\sigma=6/5 \tag{4.9}$$

起式(4.6)两边同作用算子$6s^2\bar{p}'^3\bar{p}''$，并利用式(4.5)和式(4.9)，然后作Laplace逆变换得

$$\Big[(2p'Q''+p''Q')Q'^2\frac{h^3}{12}\nabla^4-(p'Q''+2p''Q')Q'p'I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2$$

$$-\frac{2}{\chi^2}(2p'Q''+p''Q')Q'p'I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2+\frac{2\rho}{\chi^2}I_0(p'Q''+2p''Q')p'^2\frac{\partial^4}{\partial t^4}$$

$$+(p'Q''+2p''Q')Q'p'\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big]w$$

$$=\Big[(p'Q''+2p''Q')p'Q'-\frac{3}{\chi^2}(p'Q''+p''Q')Q'p'\frac{h^2}{12}\nabla^2$$

$$+\frac{\rho h^2}{6\chi^2}(p'Q''+2p''Q')p'^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big]q \tag{4.10}$$

此即粘弹性Reissner中厚板理论的基本控制方程，其中$\chi^2=5/6$。

类似地，可据具体几何假设与某些变量代换，得到胡海昌方程[3]、Власов方程[17]等在粘弹性厚板中的推广形式。

4. 粘弹性薄板

只考虑垂直于板面方向的惯性效应，在一般方程式(3.13)中去除含有K_τ，K_σ或I_0的项后，得到粘弹性薄板的动力方程

$$\frac{h^3}{12}\Big[4\Big(K+\frac{G}{3}\Big)*G*\frac{\partial}{\partial t}\nabla^4 w+\rho h\Big(K+\frac{4G}{3}\Big)*\frac{\partial^2}{\partial t^2}w=\Big(K+\frac{4G}{3}\Big)*q \tag{4.11}$$

将式(4.11)作Laplace变换，改写为

$$s\bar{D}\nabla^4\bar{w}+\rho h\bar{\ddot{w}}=\bar{q} \tag{4.12}$$

同样得到文献[9]中给出的方程式(1)。

此外，对于弹性薄板，K和G为常量，将式(4.12)对时间t求导一次后，整理得常见的弹性薄板动力方程

$$D\nabla^4 w+\rho h\ddot{w}=q \tag{4.13}$$

参 考 文 献

[1] Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 12 (1945), 69—77.

[2] Mindlin, R. D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 18 (1951), 31—38.

[3] 胡海昌，各向同性夹层板反对称小挠度的若干问题，力学学报，(6)(1963)，53—60.

[4] 曹志远、杨昇田，《厚板动力学理论及其应用》，科学出版社 (1983).

[5] Radovskii, B. S., Application of the calculation scheme for a layered viscoelastic medium to the estimation of the stressed state of highways and airport pavements with moving load, *Soviet Appl. Mech.*, 15(10)(1979), 940—946.

[6] Hewitt, J. S. and J. Mazumder, Vibration of viscoelastic plates under transverse load by the method of constant deflection contours, *J. Sound Vib.*, 33(3)(1974), 319—333.

[7] Roberston, S. R., Solving the problem of forced motion of viscoelastic plates by Valanis' method with an application to a circular plate, *J. Sound Vib.*, 14 (3)(1971), 263—278.

[8] 杨挺青等，粘弹性基支薄板的准静态弯曲，华中工学院学报，15 (1987)，1—6，

[9] Mase, G. E., Behavior of viscoelastic plates in bending, *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 86 (EM3)(1960), 25—39.
[10] Pan, H. H., Vibration of viscoelastic plates, *J. de Mecanique*, 5(3)(1966), 355 374.
[11] Nagaya, K., Dynamics of viscoelastic plate with curved boundaries of arbitrary shape, *J. Appl. Mech.*, 45 (1978), 629—635.
[12] Pister, K. S., Viscoelastic plates on a viscoelastic foundation, *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 87(EM1)(1961), 43—54.
[13] Stinivas, S. and A. K. Rao, Flexure of thick rectangular viscoelastic plates, *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 98(EM3) (1972), 771—776.
[14] Kobayashi, H. and K. Sonoda, Thick circular plates on linear viscoelastic foundations, Proc. 31rd Japan National Congress for Appl. Mech., *Theo. & Appl. Mech.*, 31, Tokyo, Nov. (1981), 153—164.
[15] Gurtin, M. E. and E. Sternberg, On the linear theory of viscoelasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11 (1962),291—536.
[16] Власов Б. Ф., Об уравнениях теории изгиба пластинок, *Изв. АН СССР*, ОТН, 12(1957), 57—60.

An Equation of Motion for a Thick Viscoelastic Plate

Yang Zheng-wen Yang Ting-qing

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

In this paper an equation of motion is presented for a general thick viscoelastic plate, including the effects of shear deformation, extrusion deformation and rotatory inertia. This equation is the generalization of equations of motion for the corresponding thick elastic plate, and it can be degenerated into several types of equations for various special cases.

Key words viscoelastic, thick plate, equation of motion