

# 圆盘形和圆环形压膜轴承的气动力分析\*

姚德良 傅仙罗

(中国科学院力学研究所, 1990年4月2日收到)

## 摘 要

本文按照气体动力学理论, 对圆盘形和圆环形压膜轴承的气动力作了详细的分析; 给出了这两种轴承的压力分布的解析表达式, 并用该方法修正了圆盘形压膜轴承的部分计算公式; 还给出了这两种轴承的压力分布和承载能力的计算结果, 可供设计者参考。

**关键词** 圆盘形 圆环形 压膜轴承

## 一、引 言

流体润滑轴承在人们对它有理性认识之前, 早已应用于工业部门。当时, 人们认为轴承的摩擦力基本上是轴承材料的函数。直到1883年, 俄国工程师 Petrov<sup>[1]</sup> 首次对流体润滑轴承摩擦效应作了理论分析, 指出产生这种摩擦效应的主要因素不是轴承材料, 而是润滑膜。同年, 英国人 Tower<sup>[2]</sup> 试验成功了油膜润滑轴颈轴承, 指出纯粹的流体润滑应该是可能的。

1886年, 英国科学家 Reynolds<sup>[3]</sup> 在不知道 Petrov 理论的情况下, 从理论上解释了 Tower 的实验。他根据润滑流动的特点, 假设润滑膜为层流, 不仅导出了描述润滑流动的微分方程, 还给出了该方程的某些解, 并且结果与实验相符。这样, Reynolds 为流体润滑作为一门专门的学问奠定了基础。

但是, 在 Reynolds 发表他的关于气体或液体轴承的研究成果之后的很长时间内, 气浮轴承的发展是缓慢的。直到本世纪50年代后期, 气浮轴承从一种新奇的事物发展成为工程中一项专门的学问。它已成为现代机械工程结构中的一个重要元件。

经过最近30来年的研究与发展, 已经建立了下列三种气浮轴承的技术基础: 动压气浮轴承、静压气浮轴承和压膜轴承。这些轴承在工业、农业、科学实验、国防方面都有广泛的应用。如高速离心机、大功率鼓风机、汽轮机、电子计算机、精密机床、测量仪表、气浮陀螺等。其中, 压膜轴承应用范围较窄。目前, 只在需要采用静压气浮轴承而又不便于提供气源的情况下, 用压膜轴承代替静压气浮轴承。如双轴线性加速度计。

压膜轴承由两个润滑面组成, 而润滑面之间的间隙很小, 间隙内充满液体或气体。其中, 一个润滑面通过换能器将电能变成具有一定振动频率和较大振幅的振动能而产生振动。由于润滑面的振动带动润滑介质运动, 在润滑膜内产生一定的压力分布而形成承载能力。不过压膜轴承的承载能力比其他气浮轴承要小些。

\* 李家春推荐。

本文根据粘性流体动力学理论,建立了圆盘形和圆环形压膜轴承的润滑方程,并得出了该方程的解析解。同时,给出了这两种轴承的压力分布和承载能力的计算结果,供设计者参考。

## 二、基本方程

罗马尼亚科学家 Tipei<sup>[4]</sup>早在1954年就导出了轴承表面具有三维速度分量,并且,润滑膜为可压缩非定常时的润滑方程可写为如下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ &= 6 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) - \rho \left[ (u_2 - u_1) \frac{\partial h}{\partial x} + (v_2 - v_1) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \right. \\ & \quad \left. + h \left[ \rho \frac{\partial}{\partial x} (u_2 + u_1) + \rho \frac{\partial}{\partial y} (v_2 + v_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

式中 $x, y$ 是与润滑膜垂直方向的坐标; $p$ 为润滑膜的压强,或称为润滑膜的压力分布; $\rho, \mu$ 分别为润滑介质的密度和粘度; $h$ 为膜厚; $u, v$ 分别为润滑表面在 $x, y$ 方向上的速度分量;下标1、2分别表示驱动面和轴承面上的量;膜厚 $h$ 对时间 $t$ 的导数代表了润滑膜表面的法向速度或挤压速度。

在液体作为润滑剂的情况下,尽管粘性的变化应该是一个重要的因素,但是,当法向速度很高时,润滑膜的热力学状态可以近似地作为绝热状态来处理。于是,我们认为膜的温度是常数,其粘性也是不变的。

## 三、圆环形压膜轴承

圆环形压膜轴承由上、下两圆环组成,两环间的间隙很小,其内充以气体或液体,其中一圆环作简谐振动,如图1所示。压膜轴承和动压气浮轴承不同之处是:对于速度边界条件来说,动压气浮轴承只有切向速度<sup>[5]</sup>,而压膜轴承只有法向速度。对于没有切向速度的圆环形压膜轴承,即没有转动的情况,方程(2.1)变成

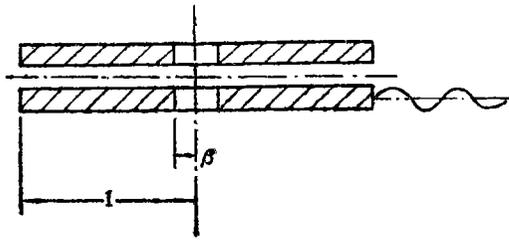


图1 圆环形压膜轴承

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (3.1)$$

对于方程(3.1),我们采用文献[5]中简化圆盘形止推轴承基本方程的方法,即将直角坐标 $x, y$ 转换成平面极坐标 $r, \theta$ ,考虑到润滑特性是与 $\theta$ 无关的,并且经过无量纲化后压膜轴承的润滑方程为

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( H^3 P R \frac{\partial P}{\partial R} \right) = \sigma \frac{\partial (P H)}{\partial T} \quad (3.2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r &= r_1 R, \quad p = p_a P, \quad t = T/\omega \\ h &= \bar{h} H, \quad \sigma = 12\mu\omega r_1^2 / p_a \bar{h}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

式中数 $\sigma$ 称为挤压数,  $r_1$ 为实际圆环的外径,  $\bar{h}$ 为平均膜厚,  $p_a$ 为环境压强,  $\omega$ 为谐振频率。由于驱动圆环是作简谐振动, 则润滑膜的厚度可以表示为

$$H = h/\bar{h} = 1 + a \cos T \quad (3.4)$$

式中 $a$ 为无量纲振幅。

在实际工程中,  $a$ 是一小量( $<0.4$ )。我们采用小扰动法求解, 即将无量纲压强 $P$ 展开成用 $a$ 表示的扰动级数, 则

$$P = 1 + aP_1 + a^2P_2 + a^3P_3 + \dots \quad (3.5)$$

将(3.4)和(3.5)代入(3.2)分别得到一阶、二阶、三阶扰动方程:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial P_1}{\partial R} \right) = R\sigma \frac{\partial}{\partial T} (P_1 + \cos T) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[ R \left( \frac{\partial P_2}{\partial R} + P_1 \frac{\partial P_1}{\partial R} + 3 \frac{\partial P_1}{\partial R} \cos T \right) \right] = R\sigma \frac{\partial}{\partial T} (P_2 + P_1 \cos T) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[ R \left( \frac{\partial P_3}{\partial R} + P_1 \frac{\partial P_2}{\partial R} + 3 \frac{\partial P_2}{\partial R} \cos T \right) \right] = R\sigma \frac{\partial}{\partial T} (P_3 + P_2 \cos T) \quad (3.8)$$

我们现求解方程(3.6), 它的特解为

$$\bar{P}_1 = -\cos T \quad (3.9)$$

相应的齐次方程为

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial P_1}{\partial R} \right) = R\sigma \frac{\partial P_1}{\partial T} \quad (3.10)$$

为了叙述简单起见, 引进下列变量:

$$\psi^2 = \sigma, \quad \delta = \psi R, \quad \nu^2 = i\delta^2, \quad \eta^2 = i\psi^2, \quad \zeta = \eta\beta, \quad \xi = \psi\beta \quad (3.11)$$

那么方程(3.10)的解空间的各线性无关解系为<sup>[6]</sup>:

$$\begin{aligned} &\text{ber}(\delta)\cos T, \quad \text{bei}(\delta)\cos T, \quad \text{ker}(\delta)\cos T, \quad \text{kei}(\delta)\cos T \\ &\text{ber}(\delta)\sin T, \quad \text{bei}(\delta)\sin T, \quad \text{ker}(\delta)\sin T, \quad \text{kei}(\delta)\sin T \end{aligned}$$

其中 $\text{ber}(\delta)$ 和 $\text{bei}(\delta)$ 分别为汤姆孙函数 $I_0(\nu)$ 的实部和虚部,  $\text{ker}(\delta)$ 和 $\text{kei}(\delta)$ 分别为开耳芬函数 $K_0(\nu)$ 的实部和虚部。于是:

$$\begin{aligned} P_1^* &= [(c_1 + ic_2)I_0(\nu) + (c_3 + ic_4)K_0(\nu) - 1] \cos T \\ &\quad + i[(c_1 + ic_2)I_0(\nu) + (c_3 + ic_4)K_0(\nu)] \sin T \end{aligned} \quad (3.12)$$

边界条件:

$$\text{Re}P_1^* = 0 \quad (\text{当 } R = \beta \text{ 或 } R = 1 \text{ 时}) \quad (3.13)$$

根据边界条件可以求得:

$$c_i = \Delta_i / \Delta \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta &= 2\text{Re} [K_0(\xi)K_0(\eta)]\text{Re}[I_0(\xi)I_0(\eta)] + 2\text{Im}[I_0(\xi)I_0(\eta)] \\
 &\quad \cdot \text{Im}[K_0(\xi)K_0(\eta)] - |K_0(\eta)| |I_0(\xi)| - |K_0(\xi)| |I_0(\eta)| \\
 \Delta_1 &= -\text{ber}(\xi)|K_0(\eta)| - \text{ber}(\psi)|K_0(\xi)| \\
 &\quad + \text{Re}\{I_0(\xi)[K_0(\eta)K_0(\xi)]\} + \text{Re}\{K_0(\xi)[I_0(\eta)K_0(\eta)]\} \\
 \Delta_2 &= \text{bei}(\xi)|K_0(\eta)| + \text{bei}(\psi)|K_0(\xi)| \\
 &\quad + \text{Im}\{I_0(\eta)[K_0(\eta)K_0(\eta)]\} + \text{Im}\{I_0(\xi)[K_0(\xi)K_0(\eta)]\} \\
 \Delta_3 &= -\text{ker}(\xi)|I_0(\eta)| - \text{ker}(\psi)|I_0(\xi)| \\
 &\quad + \text{Re}\{K_0(\eta)[I_0(\xi)I_0(\eta)]\} + \text{Re}\{I_0(\eta)[I_0(\eta)K_0(\xi)]\} \\
 \Delta_4 &= \text{kei}(\xi)|I_0(\eta)| + \text{kei}(\psi)|I_0(\xi)| \\
 &\quad + \text{Im}\{I_0(\xi)[I_0(\eta)K_0(\eta)]\} + \text{Im}\{K_0(\xi)[I_0(\xi)I_0(\eta)]\}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

则一阶扰动压强可以表示成

$$P_1 = E \cos T - F \sin T \quad (3.16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 E &= c_1 \text{ber}(\delta) - c_2 \text{bei}(\delta) + c_3 \text{ker}(\delta) - c_4 \text{kei}(\delta) - 1 \\
 F &= c_1 \text{bei}(\delta) + c_2 \text{ber}(\delta) + c_3 \text{kei}(\delta) + c_4 \text{ker}(\delta)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

压膜轴承的气膜压强，即方程(3.2)的解为：

$$P = 1 + \alpha P_1 + O(\alpha^2) \quad (3.18)$$

直接求解二阶扰动方程(3.7)是困难的，我们采用对(3.7)式求时间的平均，并令

$$\int_0^{2\pi} P_2 dT = \frac{1}{2\pi} \bar{P}_2 \quad (3.19)$$

这样方程(3.7)的求解就简单多了，其结果为

$$\bar{P}_2 = (E^2 + F^2)/4 - 3E/2 \quad (3.20)$$

如图2所示，即为圆环形压膜轴承的压力分布。于是，时间平均压强可以表达为

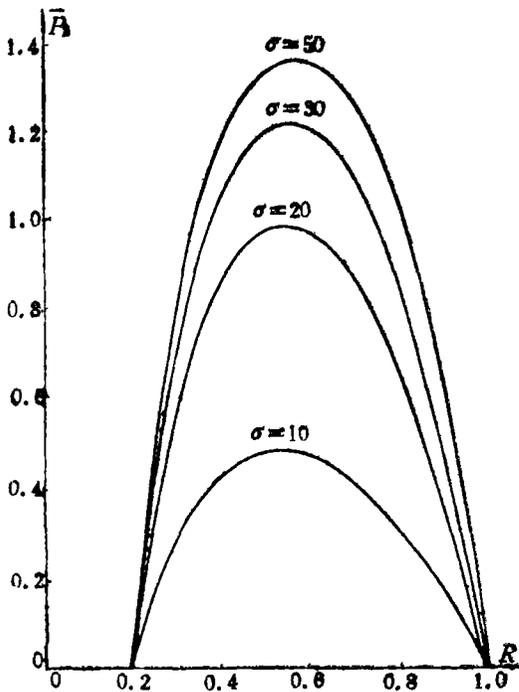


图2 圆环形压膜轴承压力分布

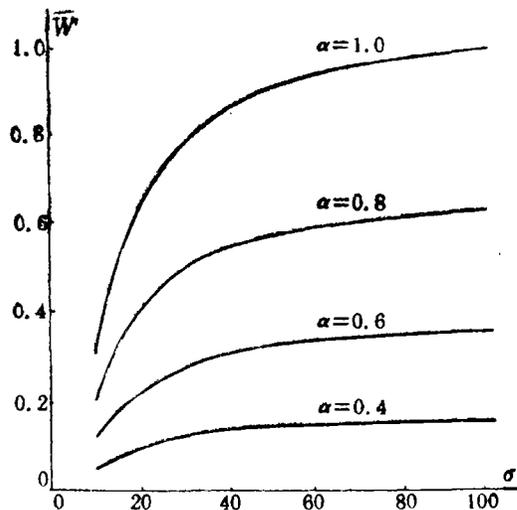


图3 圆环形压膜轴承承载能力

$$\bar{P} = 1 + \alpha^2 \bar{P}_2 = 1 - \alpha^2 (3E/2 + (E^2 + F^2)/4) \quad (3.21)$$

圆环形压膜轴承的无量纲承载能力的求法是将式(3.18)及(3.21)在圆环面上求积分, 他们的形式分别如下:

$$W' = 2\alpha \int_{\beta}^1 P_1 R dR \quad (3.22)$$

$$W' = 2\alpha^2 \int_{\beta}^1 \bar{P}_2 R dR \quad (3.23)$$

其中 $P_1$ 及 $\bar{P}_2$ 分别由式(3.16)及(3.20)确定。式(3.22)和(3.23)可以用数值积分求出结果。不过, 式(3.22)对时间求平均等于零, 式(3.23)的结果如图3所示, 即为圆环形压膜轴承的承载能力。

### 四、圆盘形压膜轴承

对于圆盘形压膜轴承, 基本方程和膜厚表达式是与圆环形压膜轴承一致的。由于圆盘形压膜轴承的润滑面包括坐标原点, 如图4所示。

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 即在坐标原点, 函数 $\ker(\delta)$ 和 $\kei(\delta)$ 之值趋于无穷, 根据圆盘形压膜轴承的气膜压强处处为有限值这一条件, 函数 $\ker(\delta)$ 和 $\kei(\delta)$ 不可能是方程(3.10)的解。因此, 基本解系为<sup>[6]</sup>:

$$\text{ber}(\delta)\cos T, \text{bei}(\delta)\cos T, \text{ber}(\delta)\sin T, \text{bei}(\delta)\sin T$$

边界条件为

$$\text{Re}P_1^* = 0 \quad (\text{当 } R=1 \text{ 时}) \quad (4.1)$$

我们用与圆环形压膜轴承同样解法可求得圆盘形压膜轴承的一阶扰动压强:

$$P_1 = A\cos T - B\sin T \quad (4.2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\text{ber}(\psi)\text{ber}(\delta) + \text{bei}(\psi)\text{bei}(\delta)}{\text{ber}^2(\psi) + \text{bei}^2(\psi)} - 1 \\ B &= \frac{\text{ber}(\psi)\text{bei}(\delta) - \text{bei}(\psi)\text{ber}(\delta)}{\text{ber}^2(\psi) + \text{bei}^2(\psi)} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

圆盘形压膜轴承的气膜压强为

$$P = 1 + \alpha P_1 + O(\alpha^2) \quad (4.4)$$

对于二阶扰动方程(3.7)的结果在形式上与式(3.20)一致, 即为

$$\bar{P}_2 = -(A^2 + B^2)/4 - 3A/2 \quad (4.5)$$

如图5所示。于是, 时间平均压强表达为<sup>[7]</sup>:

$$\bar{P} = 1 + \alpha^2 \bar{P}_2 = 1 - \alpha^2 (3A/2 + (A^2 + B^2)/4) \quad (4.6)$$

一阶扰动方程(3.6)的无量纲承载能力为:

$$W' = \alpha [g_1(\sigma)\cos T + g_2(\sigma)\sin T] + O(\alpha^2) \quad (4.7)$$

其中

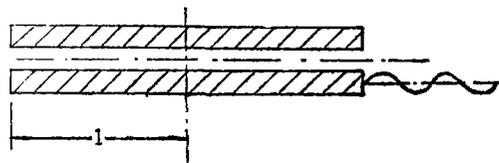


图4 圆盘形压膜轴承

$$\left. \begin{aligned} g_1(\sigma) &= \frac{\sqrt{2}}{\psi} \frac{\text{ber}(\psi)[\text{ber}_1(\psi) - \text{bei}_1(\psi)] + \text{bei}(\psi)[\text{ber}_1(\psi) + \text{bei}_1(\psi)]}{\text{ber}^2(\psi) + \text{bei}^2(\psi)} - 1 \\ g_2(\sigma) &= \frac{\sqrt{2}}{\psi} \frac{-\text{ber}(\psi)[\text{ber}_1(\psi) + \text{bei}_1(\psi)] + \text{eib}(\psi)[\text{ber}_1(\psi) - \text{bei}_1(\psi)]}{\text{ber}^2(\psi) + \text{bei}^2(\psi)} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

二阶扰动方程的无量纲承载能力为

$$W' = 2\alpha^2 \int_0^1 \bar{P}_2 R dR \quad (4.9)$$

式中  $\bar{P}_2$  由式(4.5)确定。结果如图 6 所示。

当  $\sigma \rightarrow 0$  时

$$\bar{P} = 1 + (\alpha^2 \sigma^2 / 64)(5 - 4R^2 - R^4) \quad (4.10)$$

和

$$W' = \alpha^2 \sigma^2 / 24 \quad (4.11)$$

当  $\sigma \rightarrow \infty$  时

$$\begin{aligned} \bar{P} &= 1 + 5\alpha^2/4 - \alpha^2 \{ R^{-\frac{1}{2}} \exp[\alpha(\delta) - \alpha(\psi)] \cos[\beta(\psi) - \beta(\delta)] \\ &\quad + \exp[2[\alpha(\delta) - \alpha(\psi)]] / 4R \} \end{aligned} \quad (4.12)$$

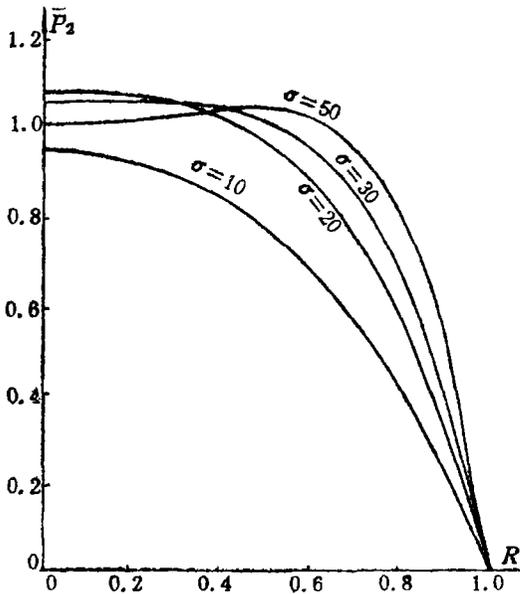


图5 圆盘形压膜轴承压力分布

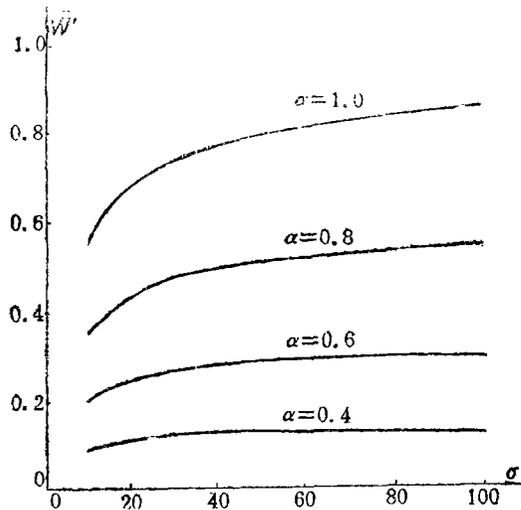


图6 圆盘形压膜轴承承载能力

和

$$\begin{aligned} W' &= \alpha^2 \left\{ \frac{5}{4} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\sqrt{R}} \exp[\alpha(\delta) - \alpha(\psi)] \cos[\beta(\psi) - \beta(\delta)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4R} \exp[2[\alpha(\delta) - \alpha(\psi)]] \right] R dR \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha(z) &\sim \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8z\sqrt{2}} - \frac{25}{384z^3\sqrt{2}} - \frac{13}{128z^4} - \dots \\ \beta(z) &\sim \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8z\sqrt{2}} - \frac{1}{16z^2} - \frac{25}{384z^3\sqrt{2}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

## 五、结 果 讨 论

圆环形和圆盘形压膜轴承的压力分布和承载能力计算结果分别如图2、图3、图5和图6所示。图2表示圆环形压膜轴承的压力分布，由图上我们容易看出，在圆环的外边界和内边界上 $\bar{P}_2$ 的值都等于零。同时， $\bar{P}_2$ 的值随 $\sigma$ 的增大而增加，到 $\sigma$ 增至70附近时，达到极值线，之后随 $\sigma$ 增大而 $\bar{P}_2$ 降低（图上未画出）。同时，对于固定的 $\sigma$ ， $\bar{P}_2$ 从零开始随 $R$ 的增大而增加，达到极值后又下降，一直到零为止。

图3表示圆环形压膜轴承的承载能力。由图中我们可以看出， $\bar{W}'$ 随 $\sigma$ 的增大而增大，同时， $\bar{W}'$ 随 $\alpha$ 的变化而变化， $\alpha$ 越大， $\bar{W}'$ 也越大。

对于表示圆盘形压膜轴承压力分布的图5，我们可以发现，当 $\sigma$ 较小时，在圆盘中心处， $\bar{P}_2$ 达到最大，随 $R$ 的增加而 $\bar{P}_2$ 减小，到外边界上为零。当 $\sigma$ 增加到接近30时，圆盘中心处的 $\bar{P}_2$ 不是极大值，极大值位于中心处和外边界之间。当 $\sigma$ 越大，极大值也就越靠近外边界，因此，承载能力也越大。

图6表示圆盘形压膜轴承的承载能力。我们将图6与图3比较可以看出，不论圆盘形还是圆环形压膜轴承其承载能力的定性变化规律是一样的。不过，当 $\sigma$ 小的时候，圆环形压膜轴承的承载能力要比圆盘形压膜轴承的承载能力小，当 $\sigma$ 增加时，圆环形压膜轴承的承载能力比圆盘形压膜轴承的承载能力增加得快；当 $\sigma$ 较大时，圆环形压膜轴承的承载能力比圆盘形压膜轴承的承载能力大，而圆盘形压膜轴承的承载能力很快趋向于渐近线。

上面我们给出的两种轴承的压力分布和承载能力的计算结果，可以供工农业、国防、科研部门工程设计人员参考。

## 参 考 文 献

- [1] Petrov, N., Friction in machines and the effect of the lubricant, *Engrg. J. St. Petersburg.* (1883), 71—140, 228—279, 377—436, 535—546. (in Russian)
- [2] Tower, B., First report on friction experiments, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 34 (a)(1883), 632—659; (b) (1884), 29—35; Second report on friction experiments, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 36 (1885), 58—70.
- [3] Reynolds, O., On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A.*, 177 (1886), 157—234.
- [4] Tipei, N., Ecuatiile, lubrificatiei cu gaze, *Comunicarile Acad. R. P. R.*, 4 (1954), 599—704.
- [5] 傅仙罗, 气膜方程, 惯性导航与器件, (3) (1980).
- [6] 魏执权等译, 《特殊函数》(1957).
- [7] Gross, W. A., *Gas Film Lubrication*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London (1962).

## Aerodynamic Analysis of Circular Plate-Shaped and Circular Ring-Shaped Squeeze Film Bearings

Yao De-liang    Fu Xian-luo

*(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing)*

### Abstract

Aerodynamics of circular plate- and circular ring-shaped squeeze film bearings is analyzed in detail, yielding analytic expressions for the pressure distribution of these bearings. Several formulae for these bearings are modified using the developed method. The paper also gives numerical results of pressure distribution and load-bearing capacities of these bearings.

**Key words** circular ring-shaped, circular plate-shaped, squeeze film bearing