

弹性基础上环形板的屈曲和过屈曲*

杨 骁 程昌钧

(兰州大学力学系, 1990年4月28日收到)

摘 要

基于 von Kármán 方程, 本文利用打靶法系统地讨论了弹性基础上环形板的轴对称屈曲和过屈曲。

关键词 弹性基础 打靶法 分支解 渐近展式 过屈曲分析

一、引 言

作为一种结构元件, 环形板已广泛地应用于各种工程领域中, 有必要分析环形板的屈曲和过屈曲状态。具有大挠度的开孔薄板的一般数学理论已由[1, 2]中作者建立。根据这种理论, 在[3~6]中已讨论了环形板的轴对称失稳, 非轴对称失稳和剪切失稳。[7]中作者根据一般分支理论一般地分析了开孔薄板屈曲状态的存在性。本文将利用打靶法系统地研究弹性基础上环形板的屈曲和过屈曲, 控制方程仍是 von Kármán 型的并假设环形板的外边界受面内均匀压力的作用。利用有限差分法和打靶法计算了在各种边界条件下环形板的临界载荷, 给出了分支解的存在条件并利用摄动展开和打靶法得到了线性化问题的最小特征值 λ^* 附近分支解的渐近公式。最后, 分析了环形板的屈曲和过屈曲性态并由渐近公式数值地研究了屈曲性态对于边界条件和有关参数的依赖性。

二、基本问题

设弹性基础上有一内外半径分别为 a, b , 材料常数为 E, ν 的各向同性环形板, 并设在中面内内边界固定, 而外边界受均匀径向压力 p 的作用, 在竖直方向板的内外边界都是弹性支承的。在中面内取极坐标 (r, θ) 并使原点与环形板的几何中心重合, 此时, 存在单值应力函数 $\varphi^{(1,2)}$, 在轴对称情形下, 控制方程为:

微分方程

$$\begin{cases} D\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 w + Kw = \frac{h}{r}\left(\frac{dw}{dr} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d^2w}{dr^2} \frac{d\varphi}{dr}\right) & (2.1a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 \varphi = -\frac{E}{r}\frac{dw}{dr} \frac{d^2w}{dr^2} & \text{在}\Omega\text{内} & (2.1b) \end{cases}$$

* 薛大为推荐。

国家教委博士点基金资助项目。

中面位移单值性条件

$$\left(r \frac{d^3}{dr^3} + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \varphi + \frac{E}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = 0 \quad \text{当 } r=a \text{ 时} \quad (2.2)$$

边界条件

$$u_r = 0, \quad M_r = K_a^2 dw/dr, \quad Q_r = -K_a^1 w, \quad \text{当 } r=a \text{ 时} \quad (2.3)$$

$$\sigma_r = -p, \quad M_r = K_b^1 dw/dr, \quad Q_r = -K_b^2 w, \quad \text{当 } r=b \text{ 时} \quad (2.4)$$

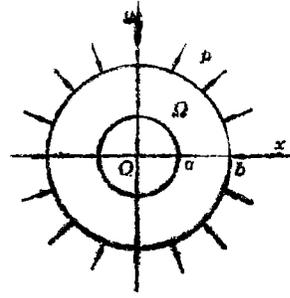


图 1

其中, Ω 为未变形板所占区域; $w(r)$, $\varphi(r)$ 分别为挠度和应力函数; h 为板的厚度; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; u_r , σ_r 分别为板的中面内径向位移和径向应力. K_a^2 , K_a^1 , K_b^1 , K_b^2 和 K 分别为边界和弹性基础上的弹性系数. M_r , M_θ 和 Q_r 为

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right)$$

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + h \sigma_r \frac{dw}{dr}$$

积分(2.1b)并利用(2.2)得

$$\left(r \frac{d^3 \varphi}{dr^3} + \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{E}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (2.5)$$

将 $\sigma_r = (1/r)(d\varphi/dr)$ 代入(2.1a), (2.5)中, (2.1a), (2.5)变为

$$\left. \begin{aligned} D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 w + Kw - \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left(r \sigma_r \frac{dw}{dr} \right) &= 0 \\ \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{E}{2r^2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (2.6)$$

由 $\sigma_\theta = d(r\sigma_r)/dr$ 和 Hook 定律得

$$u_r = rE^{-1} [d(r\sigma_r)/dr - \nu\sigma_r] \quad (2.7)$$

引入无量纲量和常数

$$x = \frac{r}{b}, \quad c = \frac{a}{b}, \quad \bar{W} = \frac{w}{h}, \quad U_r = \frac{u_r}{h}, \quad \lambda = \frac{b^2 h}{D} p$$

$$N_r = \frac{b^2 h}{D} \sigma_r, \quad N_\theta = \frac{b^2 h}{D} \sigma_\theta, \quad \Sigma_r = \frac{b^2}{Dh} M_r, \quad \Sigma_\theta = \frac{b^2}{Dh} M_\theta$$

$$q_r = \frac{b^3}{Dh} Q_r, \quad k_r^2 = \frac{h}{D} K_a^2, \quad k_a^2 = \frac{b^3}{D} K_a^1, \quad k_b^1 = \frac{h}{D} K_b^1$$

$$k_b^2 = \frac{b^3}{D} K_b^2, \quad k_s = \frac{b^4}{D} K, \quad \gamma = 12(1-\nu^2)$$

则无量纲的控制方程为

$$\left\{ \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \bar{W} + k_s \bar{W} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x N_r \frac{d\bar{W}}{dx} \right) \right. = 0 \quad (2.8a)$$

$$\left. \left\{ \frac{d^2 N_r}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{dN_r}{dx} + \frac{\gamma}{2x^2} \left(\frac{d\bar{W}}{dx} \right)^2 \right. \right. = 0 \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \quad (2.8b)$$

$$\left. \begin{aligned} x d N_r / d x + (1-\nu) N_r = 0, \quad (\Sigma_r - k_d^2 d / d x) \bar{W} = 0, \quad (q_r + k_d^2) \bar{W} = 0 \\ \text{当 } x=c \text{ 时} \\ N_r = -\lambda, \quad (\Sigma_r - k_d^2 d / d x) \bar{W} = 0, \quad (q_r + k_d^2) \bar{W} = 0, \quad \text{当 } x=1 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中, $\bar{\Omega} = \{x | x \in (c, 1)\}$, 为方便起见, Σ_r , Σ_θ 和 q_r 写为算子形式

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r(\cdot) &= -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx}\right)(\cdot), \quad \Sigma_\theta(\cdot) = -\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \nu \frac{d^2}{dx^2}\right)(\cdot) \\ q_r(\cdot) &= \left(-\frac{d^3}{dx^3} - \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} + N_r \frac{d}{dx}\right)(\cdot), \quad N_\theta = \frac{d}{dx}(x N_r) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

三、线性化问题和临界载荷

当板未发生屈曲时, 即 $\bar{W} \equiv 0$, 控制方程为

$$\left. \begin{aligned} d^2 N_r / dx^2 + 3x^{-1} d N_r / dx = 0 \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \\ x d N_r / dx + (1-\nu) N_r = 0 \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \\ N_r = -\lambda \quad \text{当 } x=1 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

解得

$$N_r \equiv \lambda N_r^* \equiv -\lambda \left\{ \frac{1}{(1+\nu) + c^2(1-\nu)} \left[(1+\nu) + (1-\nu) \frac{c^2}{x^2} \right] \right\} \quad (3.2)$$

显然, 对任意 λ , $(\bar{W}, N_r) = (0, \lambda N_r^*)$ 为 (2.8), (2.9) 的一个解. 对应于板的未屈曲状态, 称为平凡解. 控制方程 (2.8), (2.9) 在平凡解 $(\bar{W}, N_r) = (0, \lambda N_r^*)$ 处的线性化问题为

$$\left. \begin{aligned} L_\lambda w &\equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^2 w + k_\theta w - \frac{\lambda}{x} \frac{d}{dx} \left(x N_r^* \frac{dw}{dx}\right) = 0 \\ L N_r &\equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d}{dx}\right) N_r = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} x d N_r / dx + (1-\nu) N_r = 0, \quad (\Sigma_r - k_d^2 d / d x) w = 0, \quad (q_{r\lambda} + k_d^2) w = 0, \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \\ N_r = 0, \quad (\Sigma_r - k_d^2 d / d x) w = 0, \quad (q_{r\lambda} + k_d^2) w = 0, \quad \text{当 } x=1 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中, $q_{r\lambda}(\cdot) \equiv \left[-\frac{d^3}{dx^3} - \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} + \lambda N_r^* \frac{d}{dx} \right](\cdot)$

(3.3), (3.4) 是一个特征值问题, 特征参数为 λ , 如果当 $\lambda = \lambda^*$ 时, (3.3), (3.4) 至少有一个非零解, 则称 λ^* 为特征值, 工程中也称为临界载荷, 一般而言, 这种 λ 有无穷多个, 但其中最小的具有重要的意义.

在 (3.3), (3.4) 中, 容易求得 $N_r = 0$. 为了讨论 (3.3), (3.4) 中非零解 w 的存在性, 构造如下初值问题

$$L_\lambda w = 0 \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \quad (3.5a)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma_r - k_d^2 d / d x) w = 0, \quad (q_{r\lambda} + k_d^2) w = 0 \\ d^2 w / dx^2 = A_1 \\ d^3 w / dx^3 = A_2, \quad \text{当 } k_d^2 \neq 0 \text{ 时, 或 } w = A_2, \quad \text{当 } k_d^2 = 0 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \quad (3.5b)$$

其中, A_1, A_2 为待定常数.

显然, (3.5)的解可表示为

$$w = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 \quad (3.6)$$

其中, ξ_1, ξ_2 分别为当 $(A_1, A_2) = (1, 0)$ 和 $(A_1, A_2) = (0, 1)$ 时(3.5)的解, 并且 ξ_1 和 ξ_2 为 λ 的解析函数。显然, (3.6)为(3.3), (3.4)的非零解的充要条件为(3.6)满足(3.4)中当 $x=1$ 时的 w 边界条件。于是得到关于 A_1, A_2 的两个线性方程

$$b_{11}A_1 + b_{12}A_2 = 0, \quad b_{21}A_1 + b_{22}A_2 = 0 \quad (3.7)$$

其中,

$$b_{11} = \xi_1''(1) + \nu \xi_1'(1) + k_1^i \xi_1'(1), \quad b_{12} = \xi_2''(1) + \nu \xi_2'(1) + k_2^i \xi_2'(1)$$

$$b_{21} = \xi_1''(1) + \xi_1''(1) - (1 + \lambda N^*(1)) \xi_1'(1) - k_1^b \xi_1(1)$$

$$b_{22} = \xi_2''(1) + \xi_2''(1) - (1 + \lambda N^*(1)) \xi_2'(1) - k_2^b \xi_2(1)$$

因此, (3.3), (3.4)有非零解的充分必要条件为(3.7)有非零解 $A = \{A_1, A_2\}^T \neq 0$ 。它等价于

$$\det J(\lambda) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0 \quad (3.8)$$

这里, $J(\lambda)$ 为(3.7)的系数矩阵。

(3.8)称为特征方程, 其根为临界载荷 λ^* 。

利用Runger-Kutta法和Newton法求解方程(3.8), 得到临界载荷, 其迭代过程如下:

(1) 首先给定初值 $\lambda_0 > 0$ 及误差精度 $\delta > 0$, 将区间 $[c, 1]$ 分成 N 等分;

(2) 对一系列 $\lambda_i (i=0, 1, 2, \dots)$, 利用Runger-Kutta法求解初值问题(3.5), 得到 ξ_1, ξ_2 ;

(3) 计算行列式 $f_2 = \det(J(\lambda_i))$, 判断

$$|f_2| < \delta ?$$

若 $|f_2| < \delta$ 成立, 结束迭代, 得到特征值 λ^* 的近似值 λ_i 。否则, 对 $\lambda = \lambda_i + \Delta\lambda$ 和 $\lambda = \lambda_i - \Delta\lambda$, 分别求解初值问题(3.5), 并计算 $f_3 = \det(J(\lambda_i + \Delta\lambda))$ 及 $f_1 = \det(J(\lambda_i - \Delta\lambda))$ 。

(4) 计算 $\lambda_{i+1} = \lambda_i - 2f_2\Delta\lambda / (f_3 - f_1)$, 返回(2), 重复上述过程直到 $|f_2| < \delta$ 为止。

在数值计算中, 取 $\delta = 10^{-10}$, $N = 400$, $\Delta\lambda = 10^{-6}$ 。为校验程序, 首先计算内外边界夹紧, 外边界承受均布压力作用的环形板的临界载荷, 并取 $\nu = 1/3$, $k_a^i = k_b^i = k_a^b = k_b^b = 10^{10}$ 以及 $k_s = 0$ 。在表1中, 列出了相应的结果并和已有结果相比较, [8]中结果是用变分法得到的。

为方便起见, 用S, C和F分别表示边界为简支, 夹紧和自由。即

S (简支边): $k_1^i = 0, k_1^b = +\infty$

C (夹紧边): $k_1^i = +\infty, k_1^b = +\infty \quad i = a \text{ 或 } b$

F (自由边): $k_1^i = 0, k_1^b = 0$

表1 最小临界载荷

λ^*	$c=a/b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
本文结果		49.54	59.61	75.33	100.6	143.9	225.5	406.0
[3]中结果		49.55	59.64	75.38	100.7	144.0	225.7	406.2
[8]中结果		49.50	59.60	75.39	100.6	143.9	225.7	406.1

各种边界条件、弹性常数 k_s 和几何参数 c 下, 环形板的最小临界载荷 λ^* 列于表2中。可见, 材料参数, 几何参数以及边界条件对临界载荷 λ^* 有着本质的影响。临界载荷 λ^* 随着 k_s, c 的

增加而增加。因此，弹性基础提高了临界载荷 λ^* 。这是预料之中的。

表2

临界载荷

($\nu=1/3$)

$c = \frac{a}{b}$	$x=c, x=1$	k_s							
		0.0	50.0	100.0	150.0	200.0	250.0	300.0	350.0
0.1	C-C	49.53	52.72	55.87	59.01	62.12	65.20	68.25	71.28
	S-C	37.63	41.21	44.76	48.27	51.78	55.21	58.61	61.97
	C-S	22.53	25.93	29.28	32.58	35.81	38.98	42.07	45.08
	S-S	17.21	21.27	25.28	29.23	33.12	36.92	40.61	44.15
	F-C	12.66	18.10	22.85	26.80	29.95	32.46	34.49	36.20
	C-F	4.410	10.59	13.34	15.13	16.55	17.80	18.94	20.01
	F-S	3.923	12.10	20.17	26.79	28.75	30.12	31.42	32.70
	S-F	3.920	10.20	12.42	14.00	15.36	16.61	17.80	18.94
	0.3	C-C	75.33	77.10	78.86	80.61	82.36	84.11	85.86
S-C		43.24	45.07	46.89	48.70	50.51	52.30	54.09	55.86
C-S		36.31	38.27	40.23	42.18	44.12	46.06	47.98	49.90
S-S		20.59	22.91	25.24	27.57	29.89	32.24	34.54	36.87
F-C		8.633	11.42	13.89	16.06	17.96	19.64	21.12	22.44
C-F		5.683	10.56	14.16	16.83	18.89	20.54	21.93	23.13
F-S		2.401	7.623	12.14	15.59	17.94	19.57	20.79	21.79
S-F		2.401	10.24	14.03	16.02	17.39	18.49	19.47	20.37

设 λ^* 为特征方程(3.8)的一个根并令 $R = \text{rank} J(\lambda^*)$ ，显然， $R \leq 1$ 。令 $L = 2 - R$ ，则 $L = 1$ 或 2 。由常微分方程的一般理论^[9]，当 $\lambda = \lambda^*$ 时，(3.3)，(3.4)有 L 个线性无关的非零解。因此，称 L 为特征值重数。

现在，讨论 $L=2$ 的条件，即矩阵 $J(\lambda^*)$ 的所有元素为零的条件。

显然，矩阵 $J(\lambda^*)$ 的所有元素为零当且仅当 λ^* 同时为下面四个问题的特征值。

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda^*} w = 0 \quad \text{在 } \bar{Q} \text{ 内} \\ (\Sigma_r - k_r^0 d/dx)w = 0, (q_{r,\lambda^*} + k_r^0)w = 0 \\ d^3w/dx^3 = 0, \text{ 当 } k_r^0 \neq 0 \text{ 时, 或 } w = 0, \text{ 当 } k_r^0 = 0 \text{ 时} \end{array} \right\} \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \\
 & b_{11} = 0 \\
 \text{(II)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda^*} w = 0 \quad \text{在 } \bar{Q} \text{ 内} \\ (\Sigma_r - k_r^0 d/dx)w = 0, (q_{r,\lambda^*} + k_r^0)w = 0, d^2w/dx^2 = 0 \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \\ b_{12} = 0 \end{array} \right. \\
 \text{(III)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda^*} w = 0 \quad \text{在 } \bar{Q} \text{ 内} \\ (\Sigma_r - k_r^0 d/dx)w = 0, (q_{r,\lambda^*} + k_r^0)w = 0 \\ d^3w/dx^3 = 0, \text{ 当 } k_r^0 \neq 0 \text{ 时, 或 } w = 0, \text{ 当 } k_r^0 = 0 \text{ 时} \end{array} \right\} \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \\
 & b_{21} = 0 \\
 \text{(IV)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda^*} w = 0 \quad \text{在 } \bar{Q} \text{ 内} \\ (\Sigma_r - k_r^0 d/dx)w = 0, (q_{r,\lambda^*} + k_r^0)w = 0, d^2w/dx^2 = 0 \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \\ b_{22} = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

因此，我们有如下定理。

定理3.1 设 $\lambda = \lambda^*$ 为(3.8)的根，则 $L=2$ 当且仅当 λ^* 同时是问题(I)~(IV)的特征值。

假定H 不存在 λ ，使得它同时是上面四个问题(I)~(IV)的特征值。

因此, 如果 $\lambda=\lambda^*$ 是(3.8)的根并且假定H成立, 则线性化问题(3.3), (3.4)只有一个形如(3.6)的非零解.

四、分支解及过屈曲分析

下面我们来讨论环形板的过屈曲性态, 即在临界载荷 λ^* 附近(2.8), (2.9)的非平凡解. 设 λ^* 是临界载荷, 并且假定H成立, 于是, (3.3), (3.4)存在唯一非零解 \bar{w} , 并设 \bar{w} 满足法化条件

$$\int_0^1 \bar{w}^2 dx = 1$$

假定(2.8), (2.9)的解具有形式

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(x, \epsilon) &= \epsilon \bar{w} + \epsilon \bar{W}_2(x, \epsilon) \\ N_{r_1}(x, \epsilon) &= \lambda N_r^* + \epsilon N_{r_2}(x, \epsilon) \\ \lambda(\epsilon) &= \lambda^* + \lambda_2(\epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中, ϵ 为小参数, 定义为

$$\epsilon = \int_0^1 \bar{W} \bar{w} dx \quad (4.2)$$

由此得

$$\int_0^1 \bar{W}_2 \bar{w} dx = 0 \quad (4.3)$$

将(4.1)代入(2.8), (2.9), 得到关于 \bar{W}_2 , N_{r_2} 和 λ_2 的方程

$$\left. \begin{aligned} L_{\lambda^*} \bar{W}_2 - \frac{\lambda_2}{x} \frac{d}{dx} \left[x N_r^* \frac{d}{dx} (\bar{w} + \bar{W}_2) \right] &= \frac{\epsilon}{x} \frac{d}{dx} \left[x N_{r_2} \frac{d}{dx} (\bar{w} + \bar{W}_2) \right] \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d}{dx} \right) N_{r_2} &= -\epsilon \frac{\nu}{2x^2} \left[\frac{d}{dx} (\bar{w} + \bar{W}_2) \right]^2 \end{aligned} \right\} \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} x d N_{r_2} / dx + (1-\nu) N_{r_2} &= 0, \quad (\Sigma_r - k_d^* d/dx) \bar{W}_2 = 0 \\ (q_{r_1}^* + \lambda_2 N_r^* d/dx + k_d^*) \bar{W}_2 + \epsilon N_{r_2} \frac{d}{dx} (\bar{w} + \bar{W}_2) \\ + \lambda_2 N_r^* \frac{d \bar{w}}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{当 } x=c \text{ 时} \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{r_2} = 0, \quad (\Sigma_r - k_d^* d/dx) \bar{W}_2 &= 0 \\ (q_{r_1}^* + \lambda_2 N_r^* \frac{d}{dx} + k_d^*) \bar{W}_2 + \epsilon N_{r_2} \frac{d}{dx} (\bar{w} + \bar{W}_2) \\ + \lambda_2 N_r^* \frac{d \bar{w}}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{当 } x=1 \text{ 时} \quad (4.6)$$

显然, 当 $\epsilon=0$ 时, (4.3)~(4.6)有平凡解

$$\bar{W}_2 = 0, \quad N_{r_2} = 0, \quad \lambda_2 = 0$$

(4.3)~(4.6)关于平凡解的线性化问题为:

$$\left. \begin{aligned} L_{\lambda^*} \bar{W}_2 - \frac{\lambda_2}{x} \frac{d}{dx} \left(x N_r^* \frac{d \bar{w}}{dx} \right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d}{dx} \right) N_{r_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} x d N_{r_2} / dx + (1-\nu) N_{r_2} = 0, (\Sigma_r - k_r^* d/dx) \bar{W}_2 = 0 \\ (q_{r,\lambda^*} + k_r^*) \bar{W}_2 + \lambda_2 N_r^* d\bar{w}/dx = 0 \end{aligned} \right\} \text{当 } x=c \text{ 时} \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{r_2} = 0, (\Sigma_r - k_r^* d/dx) \bar{W}_2 = 0 \\ (q_{r,\lambda^*} + k_r^*) \bar{W}_2 + \lambda_2 N_r^* d\bar{w}/dx = 0 \end{aligned} \right\} \text{当 } x=1 \text{ 时} \quad (4.9)$$

$$\int_c^1 \bar{W}_2 \bar{w} dx = 0 \quad (4.10)$$

不难看出, $N_{r_2} = 0$. 将 $x\bar{w}$ 乘以 (4.7) 第一个方程两端并在 $[c, 1]$ 上积分, 利用

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx} \right) + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx} \right) \\ - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \nu \frac{d^2}{dx^2} \right) \end{aligned}$$

得到 $\lambda_2 \int_c^1 x N_r^* \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 dx = 0$

显然, $\int_c^1 x N_r^* \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 dx < 0$

于是, $\lambda_2 = 0$. 因此, \bar{W}_2 满足如下边值问题

$$\begin{cases} L_\lambda^* \bar{W}_2 = 0 & \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 中} \\ (\Sigma_r - k_r^* d/dx) \bar{W}_2 = 0, (q_{r,\lambda^*} + k_r^*) \bar{W}_2 = 0 & \text{当 } x=c \text{ 时} \\ (\Sigma_r - k_r^* d/dx) \bar{W}_2 = 0, (q_{r,\lambda^*} + k_r^*) \bar{W}_2 = 0 & \text{当 } x=1 \text{ 时} \end{cases}$$

将此边值问题和当 $\lambda = \lambda^*$ 时 (3.3), (3.4) 相比较, 得 $\bar{W}_2 = \alpha \bar{w}$, 这里 α 是常数, 由条件 (4.10), 易得 $\alpha = 0$, 从而 $\bar{W}_2 = 0$. 因此, 当 $\epsilon = 0$ 时, (4.7)~(4.10) 只有零解, 至此, 证明了如下定理.

定理 4.1 设 λ^* 是 (3.8) 的根且假定 H 成立. 则 (2.8), (2.9) 的平凡解在线性化问题 (3.3), (3.4) 的特征值 $\lambda = \lambda^*$ 处发生分支. 分支解具有形式 (4.1) 并满足: 当 $\epsilon = 0$ 时, $\bar{W}_2 = N_{r_2} = \lambda_2 = 0$.

现在, 我们寻求 $\bar{W}_2(x, \epsilon)$, $N_{r_2}(x, \epsilon)$, $\lambda_2(\epsilon)$ 关于 ϵ 的渐近展式. 设

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_2(x, \epsilon) = \epsilon \bar{W}_2^{(1)} + \epsilon^2 \bar{W}_2^{(2)} + O(\epsilon^3) \\ N_{r_2}(x, \epsilon) = \epsilon N_{r_2}^{(1)} + \epsilon^2 N_{r_2}^{(2)} + O(\epsilon^3) \\ \lambda_2(\epsilon) = \epsilon \lambda_2^{(1)} + \epsilon^2 \lambda_2^{(2)} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

将 (4.11) 代入 (4.3)~(4.6), 比较 ϵ 同次幂系数, 得一系列线性边值问题, 求解这些问题得到 $\bar{W}_2^{(1)} = N_{r_2}^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 0$. 而 $N_{r_2}^{(2)}$, $\bar{W}_2^{(2)}$ 和 $\lambda_2^{(2)}$ 由下列边值问题确定.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d}{dx} \right) N_{r_2}^{(2)} + \frac{\nu}{2x^2} \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 = 0 & \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \\ x d N_{r_2}^{(2)} / dx + (1-\nu) N_{r_2}^{(2)} = 0 & \text{当 } x=c \text{ 时} \\ N_{r_2}^{(2)} = 0 & \text{当 } x=1 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$L_\lambda^* \bar{W}_2^{(2)} - \frac{1}{x} \lambda_2^{(2)} \frac{d}{dx} \left(x N_r^* \frac{d\bar{w}}{dx} \right) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x N_{r_2}^{(1)} \frac{d\bar{w}}{dx} \right) \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内}$$

$$(4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma_r - k_r^a d/dx) \bar{W}_2^{(2)} &= 0 \\ (q_{r,\lambda}^* + k_d^a) \bar{W}_2^{(2)} + \lambda_2^{(2)} N_r^* d\bar{w}/dx + N_{r_2}^{(1)} d\bar{w}/dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{当 } x=c \text{ 时} \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma_r - k_r^b d/dx) \bar{W}_2^{(2)} &= 0 \\ (q_{r,\lambda}^* + k_d^b) \bar{W}_2^{(2)} + \lambda_2^{(2)} N_r^* d\bar{w}/dx + N_{r_2}^{(1)} d\bar{w}/dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{当 } x=1 \text{ 时} \quad (4.15)$$

$$\int_c^1 \bar{W}_2^{(2)} \bar{w} dx = 0 \quad (4.16)$$

为求解(4.12), 构造如下两个初值问题

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d}{dx} \right) z + \frac{\nu}{2x^2} \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 &= 0 \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \\ dz/dx &= 0 \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \\ z &= 0 \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d}{dx} \right) z &= 0 \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \\ z = A_3, \quad dz/dx &= -(1-\nu)A_3/c \quad \text{当 } x=c \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

易得(4.18)的解为

$$z = A_3[(1+\nu) + (1-\nu)c^2/x^2]/2$$

设(4.17)的解为 ξ_3 , 不难看到

$$N_{r_2}^{(1)} = \xi_3 + A_3[(1+\nu) + (1-\nu)c^2/x^2]/2 \quad (4.19)$$

为(4.12)的解的充要条件为 $N_{r_2}^{(1)}$ 在 $x=1$ 处满足(4.12)中的条件 $N_{r_2}^{(1)}=0$. 由此得

$$A_3 = 2\xi_3(1)/[(1+\nu) + (1-\nu)c^2]$$

利用处理(4.7)~(4.10)的相同方法, 由(4.13)~(4.16)可得

$$\lambda_2^{(2)} = - \int_c^1 x N_{r_2}^{(1)} \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 dx / \int_c^1 x N_r^* \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 dx \quad (4.20)$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_c^1 x N_{r_2}^{(1)} \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 dx &= - \frac{2}{\nu} \int_c^1 x^3 N_{r_2}^{(1)} \left[\frac{d^2 N_{r_2}^{(1)}}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{dN_{r_2}^{(1)}}{dx} \right] dx \\ &= \frac{2}{\nu} \int_c^1 x N_{r_2}^{(1)} \left\{ (1-\nu) N_{r_2}^{(1)} - \nu x \frac{dN_{r_2}^{(1)}}{dx} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{dN_{r_2}^{(1)}}{dx} + x(1-\nu) N_{r_2}^{(1)} \right] \right\} dx \\ &= \frac{2}{\nu} \int_c^1 x \left\{ \left[x \frac{dN_{r_2}^{(1)}}{dx} + (1-\nu) N_{r_2}^{(1)} \right]^2 + (1-\nu^2) (N_{r_2}^{(1)})^2 \right\} dx \end{aligned}$$

可得 $\lambda_2^{(2)} > 0$.

因此, 分支解(4.11)是右倒的. 为从(4.13)~(4.16)求得 $\bar{W}_2^{(2)}$. 构造如下初值问题

$$L_{\lambda^*} z - \frac{1}{x} \lambda_2^{(2)} \frac{d}{dx} \left(x N_r^* \frac{d\bar{w}}{dx} \right) - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x N_{r_2}^{(1)} \frac{d\bar{w}}{dx} \right) = 0 \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 内} \quad (4.21)$$

$$\left. \begin{aligned} z &= dz/dx = d^2 z/dx^2 = 0 \\ d^3 z/dx^3 &= \lambda_2^{(2)} N_r^* d\bar{w}/dx + N_{r_2}^{(1)} d\bar{w}/dx \end{aligned} \right\} \text{当 } x=c \text{ 时} \quad (4.22)$$

这里, N_r^* , \bar{w} , $N_{r_2}^{(1)}$ 和 $\lambda_2^{(2)}$ 都是已知的.

设(4.21), (4.22)的解为 ξ_4 . 令

$$\mathcal{W}_2^{(2)} = \xi_4 + A_4 \xi_1 + A_5 \xi_2 \tag{4.23}$$

其中, A_4, A_5 是常数。显然 $\mathcal{W}_2^{(2)}$ 是(4.13)~(4.16)的解当且仅当 $\mathcal{W}_2^{(2)}$ 满足(4.15),(4.16), 于是得到关于 A_4, A_5 的方程

$$\left. \begin{aligned} & [\xi_1''(1) + (\nu + k_1^*) \xi_1'(1)] A_4 + [\xi_2''(1) + (\nu + k_1^*) \xi_2'(1)] A_5 \\ & = -[\xi_4''(1) + (\nu + k_1^*) \xi_4'(1)] \\ & [\xi_1'''(1) + \xi_1''(1) - (1 + \lambda^* N_1^*(1)) \xi_1'(1) - k_1^* \xi_1(1)] A_4 \\ & + [\xi_2'''(1) + \xi_2''(1) - (1 + \lambda^* N_2^*(1)) \xi_2'(1) - k_1^* \xi_2(1)] A_5 \\ & = -[\xi_4'''(1) + \xi_4''(1) - (1 + \lambda^* N_4^*(1)) \xi_4'(1) \\ & - k_1^* \xi_4(1)] + [\lambda_2^{(2)} N_1^*(1) + N_{r2}^{(1)}(1)] \tilde{w}'(1) \end{aligned} \right\} \tag{4.24}$$

以及

$$\int_0^1 \xi_1 \tilde{w} dx A_4 + \int_0^1 \xi_2 \tilde{w} dx A_5 = - \int_0^1 \xi_4 \tilde{w} dx \tag{4.25}$$

虽然(4.24)是一奇异线性方程组, 但由于假定H成立, (4.24)在条件(4.25)下是封闭的, 于是可求得常数 A_4 和 A_5 。

至此, 我们得到了在线性化问题(3.3), (3.4)的特征值 $\lambda = \lambda^*$ 附近(2.8), (2.9)的分支解的渐近展开式:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{W} &= \epsilon \tilde{w} + \epsilon^3 \mathcal{W}_2^{(2)} + O(\epsilon^4) \\ N_r &= \lambda N_r^* + \epsilon^2 N_{r2}^{(1)} + O(\epsilon^4) \\ \lambda &= \lambda^* + \epsilon^2 \lambda_2^{(2)} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \right\} \tag{4.26}$$

其中, $\lambda_2^{(2)} > 0$ 。

由(4.26), 我们可以分析环形板的过屈曲性态并得到相应的挠度, 薄膜力和弯曲应力。

在数值计算中, 首先验证假定H是否成立, 若成立, 利用 Runger-Kutta 方法求解初值问题(4.17), 和(4.21), (4.22)。值得注意的是假定H在考虑的所有情形中是成立的。限于篇幅, 我们将不列出 $J(\lambda^*)$ 的所有元素的值。

对 $k_s = 0.0$ 和 $k_s = 50.0$, 环形板在各种边界条件下的 $\lambda_2^{(2)}$ 值列于表3中, 同时也列出了几何参数 $c = a/b$ 对 $\lambda_2^{(2)}$ 的影响。可见这种影响是十分明显的。

表3 $\lambda_2^{(2)}$ 的 值 ($\nu = 1/3$)

$c = \frac{a}{b}$	B.D.		C-C	S-C	C-S	S-S	F-C	C-F	F-S	S-F
	k_s	$\lambda_2^{(2)}$								
0.1		0.0	31.35	46.97	12.12	15.97	15.79	5.317	3.289	4.710
		50.0	31.53	47.64	11.86	15.12	21.52	8.695	3.584	11.17
0.3		0.0	42.88	68.94	17.92	28.73	38.71	7.386	8.691	8.217
		50.0	43.01	69.71	17.82	28.70	47.26	7.723	12.91	6.660

图2至图13示出了在 $c = 0.1, 0.3, k_s = 0.0, 50.0$ 时, 环形板过屈曲状态的挠度和应力分布, 此时均取 $\epsilon = 0.1$ 。其中, 虚线和实线分别表示 $k_s = 50.0$ 和 $k_s = 0.0$ 时的结果。在某些图中, 只有一条实线, 这表明虚线和实线重合。可见, 弹性基础对内边自由, 外边夹紧的环形板屈曲性态的影响较为显著, 而对两边夹紧环形板的影响最弱。

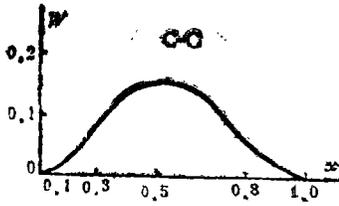


图2 挠度分布

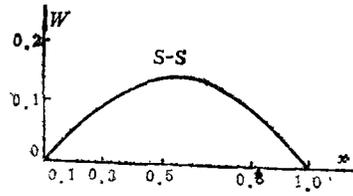


图3 挠度分布

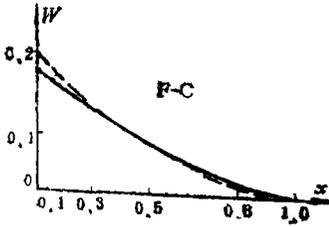


图4 挠度分布

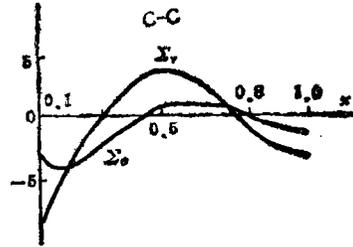


图5 弯曲应力分布

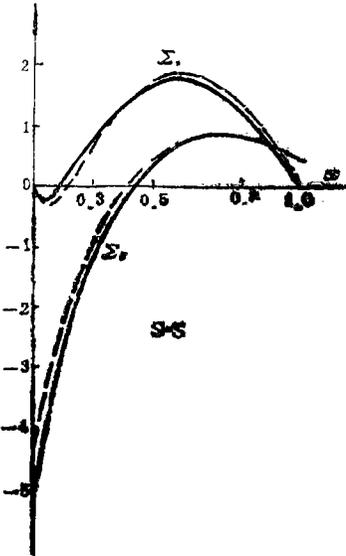


图6 弯曲应力分布

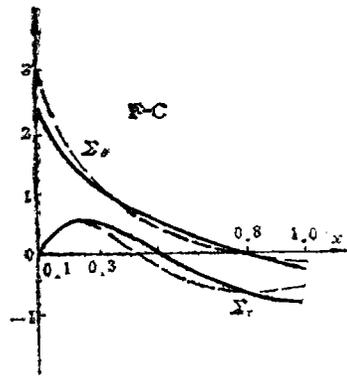


图7 弯曲应力分布

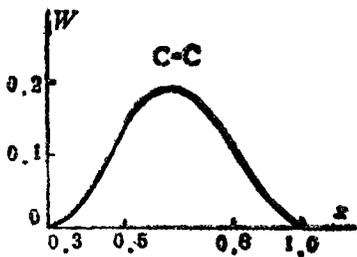


图8 挠度分布

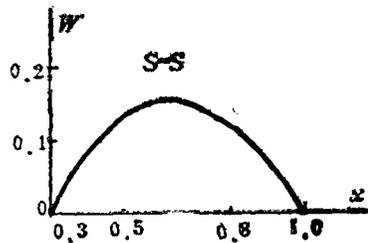


图9 挠度分布

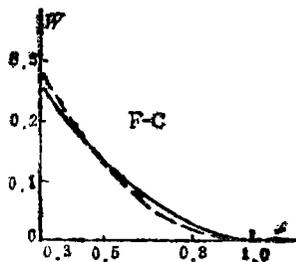


图10 挠度分布

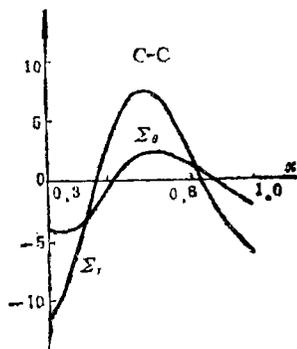


图11 弯曲应力分布

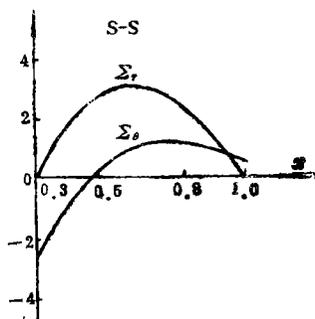


图12 弯曲应力分布

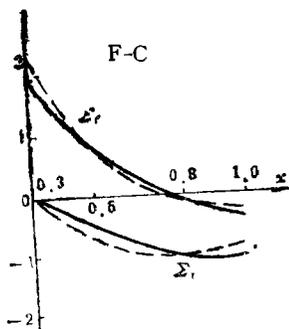


图13 弯曲应力分布

参 考 文 献

- [1] 朱正佑、程昌钧, 开孔薄板大挠度问题的一般数学理论, 力学学报, 18(2)(1986), 123—135.
- [2] 程昌钧、吕小安, 开孔薄板大挠度问题的一般数学理论(续), 力学学报, 21(2)(1989), 193—203.
- [3] 程昌钧、朱正佑, 环形板的屈曲状态, 中国科学, A辑(3)(1986), 265—273.
- [4] Cheng Chang-jun, Duan Wei and D. F. Parker, Elastic instability of polar orthotropic annular plates, *Int. J. Engng. Sci.*, 27(2)(1989), 109—121.
- [5] Cheng Chang-jun and A. J. M. Spencer, Non-axisymmetric instability of polar orthotropic annular plates, *J. Engng. Math.*, 23(1989), 29—51.
- [6] 程昌钧、吕小安, 剪力作用下环形板的屈曲和过屈曲 I: 屈曲; II: 过屈曲(待发表).
- [7] 程昌钧、杨晓, 广义 von Kármán 方程分支解的存在性, 《现代数学与力学》, 科学出版社(1989), 257—266.
- [8] Ramiah, G. K. and K. Uijayakumar, Buckling of polar orthotropic annular plates under uniform internal pressure, *AIAA J.*, 12(8)(1974), 1045—1050.
- [9] Coddington, E. A. and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill (1955).

Buckling and Post-Buckling of Annular Plates on an Elastic Foundation

Yang Xiao Cheng Chang-jun

(*Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou*)

Abstract

On the basis of von Kármán equations, the axisymmetric buckling and post-buckling of annular plates on an elastic foundation is systematically discussed by using shooting methods.

Key words elastic foundation, shooting method, bifurcation solution, asymptotic formulae, post-buckling analyses