一类发展方程的结构和谱的变形*

谢 汉 光

（浙江教育学院，1990年8月20日收到）

摘 要

本文研究了若谱按规律

$$\lambda_t=\sum_{j=0}^{m_1}K_j\lambda^{n_1-j}\qquad(n_1\leqslant m_1)$$

变化，且A_1，B_1，C_1均为λ的正负幂多项式时，AKNS特征值问题$q(x,t)$，$r(x,t)$的发展方程的一般结构，其中q，r在无穷远处不附加任何条件.

关键词 AKNS特征值问题 谱的变形 零曲率方程 发展方程的一般结构

设有AKNS特征值问题

$$\varphi_x=U\varphi,\qquad U=\begin{bmatrix}\lambda/2 & q(x,t)\\ r(x,t) & -\lambda/2\end{bmatrix},\qquad \varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\tag{1}$$

其中φ满足相应的发展方程

$$\varphi_t=V\varphi,\qquad V=\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & -A_1\end{bmatrix}\tag{2}$$

当谱按规律

$$\lambda_t=\sum_{j=1}^{m}K_j\lambda^{m-j}$$

变化，且A_1，B_1，C_1均为λ的正幂多项式时，文[1]得到了q，r发展方程的一般结构。

本文进一步研究了若谱按规律

$$\lambda_t=\sum_{j=0}^{m_1}K_j\lambda^{n_1-j}\qquad(n_1\leqslant m_1)$$

变化，且A_1，B_1，C_1均为λ的正负幂多项式时，特征值问题(1)的q，r发展方程的一般结构，其中q，r在无穷远处也不附加任何条件。从而推广了[1]的工作。

我们知道，(1)，(2)中的U，V必须满足零曲率方程

$$U_t=V_x-[U,V]\tag{3}$$

其中 $[U,V]=UV-VU$

记 $$U=\lambda h_0+qe_0+rf_0\tag{4}$$

其中 $$h_0=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{bmatrix},\qquad e_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad f_0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

---

* 戴世强推荐.

国家自然科学基金资助项目.

设 $$V=(A+\varepsilon)h_0+(B+\delta)e_0+(C+\theta)f_0 \tag{5}$$

由零曲率方程得

$$\begin{aligned}\lambda_t h_0+q_t e_0+r_t f_0=&(A_x+\varepsilon_x+2Br-2Cq+2\delta r-2q\theta)h_0\\&+(B_x+\delta_x+Aq-B\lambda+\varepsilon q-\delta\lambda)e_0+(C_x+\theta_x+C\lambda-Ar+\theta\lambda-r\varepsilon)f_0\end{aligned}$$

因此，若 $$\left.\begin{aligned}&\lambda_t=\varepsilon_x-2\theta q+2\delta r,\ A_x+2Br-2Cq=0\\&q_t=B_x+Aq-B\lambda+\delta_x-\delta\lambda+\varepsilon q,\ r_t=C_x+C\lambda-Ar+\theta_x+\theta\lambda-\varepsilon r\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

那么(3)成立。

设 $$A=\sum_{j=0}^{m}a_j\lambda^{n-j},\quad B=\sum_{j=0}^{m}b_j\lambda^{n-j},\quad C=\sum_{j=0}^{m}c_j\lambda^{n-j} \tag{7}$$

$$\lambda_t=\sum_{j=0}^{m_1}K_j\lambda^{n_1-j} \tag{8}$$

$$\varepsilon=\sum_{j=0}^{m_1}\varepsilon_j\lambda^{n_1-j},\ \delta=\sum_{j=0}^{m_1}\delta_j\lambda^{n_1-j},\ \theta=\sum_{j=0}^{m_1}\theta_j\lambda^{n_1-j} \tag{9}$$

其中$n\leqslant m$，$n_1\leqslant m_1$。下文主要讨论$n<m$，$n_1<m_1$与$n=m$，$n_1<m_1$两种情形，至于$n=m$，$n_1=m_1$的情形可类似进行讨论。

(一) $n<m$，$n_1<m_1$

把(7)、(8)、(9)代入(6)可得

$$\left.\begin{aligned}&b_0=0,\ b_{jx}+a_jq-b_{j+1}=0,\ b_{mx}+a_mq=0\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1;\ j\neq n)\\&c_0=0,\ c_{jx}-a_jr+c_{j+1}=0,\ c_{mx}-a_mr=0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$a_{jx}=2c_jq-2b_jr\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m) \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\delta_0=0,\ \delta_{jx}-\delta_{j+1}+\varepsilon_jq=0,\ \delta_{m_1x}+\varepsilon_{m_1}q=0\quad(j=0,1,\cdots,m_1-1;\ j\neq n_1)\\&\theta_0=0,\ \theta_{jx}-\varepsilon_jr+\theta_{j+1}=0,\ \theta_{m_1x}-\varepsilon_{m_1}r=0\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$K_j=\varepsilon_{jx}-2q\theta_j+2r\delta_j\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m_1) \tag{13}$$

发展方程为

$$q_t=b_{nx}+a_nq-b_{n+1}+\delta_{n_1x}-\delta_{n_1+1}+\varepsilon_{n_1}q,\ r_t=c_{nx}-a_nr+c_{n+1}+\theta_{n_1x}+\theta_{n_1+1}-\varepsilon_{n_1}r \tag{14}$$

其中b_n，c_n，a_n，b_{n+1}，c_{n+1}分别由下列式子确定

$$\begin{bmatrix}b_{j+1}\\c_{j+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D+qD^{-1}(-2r) & qD^{-1}(2q)\\rD^{-1}(-2r) & -D+rD^{-1}(2q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_j\\c_j\end{bmatrix}+a_j(t)\begin{bmatrix}q\\r\end{bmatrix} \tag{15}$$

$$b_0=c_0=0,\ D=\partial/\partial x,\ DD^{-1}=I\ (\text{恒等算子})\qquad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

$$a_j=2D^{-1}(c_jq-b_jr)+a_j(t)\qquad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m) \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}b_j\\c_j\end{bmatrix}_x=\begin{bmatrix}b_{j+1}\\-c_{j+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}qD^{-1}(2r) & qD^{-1}(-2q)\\rD^{-1}(-2r) & rD^{-1}(2q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_j\\c_j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-q\\r\end{bmatrix}a_j(t) \tag{17}$$

$$(j=n+1,\ \cdots,\ m-1)$$

$$b_{mx}+a_mq=0,\ c_{mx}-a_mr=0$$

而δ_{n_1}，θ_{n_1}，ε_{n_1}，δ_{n_1+1}，θ_{n_1+1}分别由下式确定

$$\begin{bmatrix}\delta_{j+1}\\\theta_{j+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D+qD^{-1}(-2r) & qD^{-1}(2q)\\rD^{-1}(-2r) & -D+rD^{-1}(2q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_j\\\theta_j\end{bmatrix}+(D^{-1}K_j+\beta_j)\begin{bmatrix}q\\r\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\delta_0=\theta_0=0 \qquad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n_1-1)$$

$$\varepsilon_j=D^{-1}(K_j+2q\theta_j-2r\delta_j)+\beta_j(t) \qquad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m_1) \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}\delta_j\\ \theta_j\end{bmatrix}_x=\begin{bmatrix}\delta_{j+1}\\ -\theta_{j+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}qD^{-1}(2r) & qD^{-1}(-2q)\\ rD^{-1}(-2r) & rD^{-1}(2q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_j\\ \theta_j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-q\\ r\end{bmatrix}(D^{-1}K_j+\beta_j)$$

$$(j=n_1+1,\ \cdots,\ m_1-1) \tag{20}$$

$$\delta_{m_1x}+\varepsilon_{m_1}q=0,\ \theta_{m_1x}-\varepsilon_{m_1}r=0$$

当　$q=-r$，取$b_m=c_m=(\sin u)/2$，$a_m=\cos u$，$q=-u_x/2$

我们得到谱变形且满足(8)时，Sine-Gordon系统发展方程

$$u_{xt}=-b_{nx}+c_{nx}+b_{n+1}+c_{n+1}-\delta_{n_1x}+\theta_{n_1x}+\delta_{n_1+1}+\theta_{n_1+1} \tag{21}$$

其中b_n，c_n，b_{n+1}，c_{n+1}，δ_{n_1}，θ_{n_1}，δ_{n_1+1}，θ_{n_1+1}由(15)～(20)诸式确定。

若$n=0$，$m=1$，$n_1=1$，$m_1=2$时，并设$\lambda_t=K_0\lambda+K_1+K_2\lambda^{-1}$中的$K_0$，$K_1$，$K_2$为常数，可得

$$b_{0x}-c_{0x}=0,\ b_1=c_1=(\sin u)/2,\ a_1=\cos u,\ q=-u_x/2$$

$$\delta_1=-\theta_1=K_0xq,\ \varepsilon_1=K_1x,\ \delta_{2x}+\varepsilon_2q=0,\ \theta_{2x}+\varepsilon_2q=0$$

若取$\delta_2=\theta_2$，我们有

$$\varepsilon_{2xx}-\varepsilon_{2x}q_x/q+4q^2\varepsilon_2=-K_2q_x/q$$

而对应的齐次方程有解

$$\sin u,\ \cos u \qquad (u_x=-2q)$$

可得

$$\varepsilon_2=\sin uD^{-1}\left(\frac{K_2q_x\cos u}{2q^2}\right)+\cos uD^{-1}\left(-\frac{K_2q_x\sin u}{2q^2}\right)$$

$$=K_2\sin uD^{-1}\sin u+K_2\cos uD^{-1}\cos u$$

于是　$\delta_2=-D^{-1}(\varepsilon_2q)=K_2(\sin uD^{-1}\cos u-\cos uD^{-1}\sin u)/2$

因此，得到发展方程

$$u_{xt}=\sin u+(K_0xu_x)_x+2\delta_2 \tag{22}$$

当$K_2=0$时，$\varepsilon_2=\delta_2=0$，(22)即带非均匀项S-G方程[2]。

(二)　$n=m$，$n_1<m_1$

把(7)、(8)、(9)代入(6)可得

$$\left.\begin{aligned}&b_0=0,\ b_{jx}+a_jq-b_{j+1}=0 \qquad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)\\ &c_0=0,\ c_{jx}-a_jr+c_{j+1}=0\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$a_{jx}=2c_jq-2b_jr \tag{24}$$

还有(12)、(13)两式。

我们得到一类谱变形（按(8)式）的发展方程

$$q_t=b_{nx}+a_nq+\delta_{n_1x}-\delta_{n_1+1}+\varepsilon_{n_1}q,\ r_t=c_{nx}-a_nr+\theta_{n_1x}+\theta_{n_1+1}-\varepsilon_{n_1}r \tag{25}$$

其中b_n，c_n，a_n由下式确定。

$$\left.\begin{aligned}&b_0=c_0=0\\ &\begin{bmatrix}b_{j+1}\\ c_{j+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D+qD^{-1}(-2r) & qD^{-1}(2q)\\ rD^{-1}(-2r) & -D+rD^{-1}(2q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_j\\ c_j\end{bmatrix}+a_j(t)\begin{bmatrix}q\\ r\end{bmatrix}\\ &a_j=2D^{-1}(c_jq-b_jr)+a_j(t) \qquad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

而δ_{n_1}，θ_{n_1}，ε_{n_1}，δ_{n_1+1}，θ_{n_1+1}由(18)、(19)、(20)诸式确定。

当$q=r$，$n=3$时，$b_0=c_0=0$，取$a_0=$常数

$$b_1=c_1=a_0q,\quad b_2=a_0q_x+a_1q \qquad (a_1\text{为常数})$$

$$c_2=a_1q-a_0q_x,\quad a_2=-2a_0q^2$$

$$b_3=a_0q_{xx}+a_1q_x-2a_0q^3,\quad c_3=a_0q_{xx}-a_1q_x-2a_0q^3,\quad a_3=-2a_1q^2$$

于是得到谱按(8)变形时MKDV系统的发展方程

$$q_t=a_0q_{xxx}-6a_0q^2q_x+(\delta_{n_1x}+\theta_{n_1x}-\delta_{n_1+1}+\theta_{n_1+1})/2 \tag{27}$$

若$n_1=1$，$m_1=2$，即

$$\lambda_t=K_0\lambda+K_1+K_2\lambda^{-1} \qquad (K_0,\ K_1,\ K_2\text{为常数})$$

可得
$$\delta_0=\theta_0=0,\quad \delta_1=K_0xq,\quad \theta_1=K_0xq,\quad \delta_{2x}+\varepsilon_2q=0,\quad \theta_{2x}-\varepsilon_2q=0$$

$$\varepsilon_{2xx}-\varepsilon_{2x}q_x/q-4q^2\varepsilon_2=-K_2q_x/q$$

相应的齐次方程有解

$$\mathrm{sh}u,\quad \mathrm{ch}u$$

因此
$$\varepsilon_2=\mathrm{sh}uD^{-1}(K_2(q_x/2q^2)\mathrm{ch}u)+\mathrm{ch}uD^{-1}(-K_2(q_x/2q^2)\mathrm{sh}u)$$
$$=K_2\mathrm{ch}uD^{-1}(\mathrm{ch}u)+K_2\mathrm{sh}uD^{-1}(-\mathrm{sh}u)$$

因此，得到发展方程

$$q_t=a_0q_{xxx}-6a_0q^2q_x+(K_0xq)_x+\theta_2 \tag{28}$$

其中
$$\theta_2=D^{-1}(\varepsilon_2q)=K_2(\mathrm{ch}^2u-\mathrm{sh}uD^{-1}\mathrm{ch}u-\mathrm{ch}uD^{-1}\mathrm{sh}u)/2$$

本文虽然是就特征值问题(1)进行讨论的，但为研究某个特征值问题当谱按一般规律

$$\lambda_t=\sum_{j=0}^{m_1}K_j\lambda^{n_1-j} \qquad (n_1\leqslant m_1)$$

变化时的发展方程提供了一般的方法。

参 考 文 献

[1] 李翊神，一类发展方程和谱变形，中国科学A辑，(5)(1982)，385—390.

[2] 徐宝智、谢汉光，带非均匀项的Sine-Gordon方程，高校应用数学学报4(1)(1989)，81—95.

Deformation of Structure and Spectrum of Evolution Equations

Xie Han-guang

(Zhejiang Educational College, Zhejiang)

Abstract

In this paper, we study the general structure of evolution equations of the AKNS eigenvalue problem $q(x,\ t)$, $r(x,\ t)$ with spectrum varying as

$$\lambda_t=\sum_{j=0}^{m_1}K_j\lambda^{n_1-j} \qquad (n_1\leqslant m_1)$$

and A_1, B_1, C_1 are all positive or negative power polynomials of λ, where q, r are not limited with any additional conditions at infinity.

Key words AKNS eigenvalue problem, spectrum deformation, null curvature equation, general structure of evolution equation