应用数学和力学，第12卷第8期（1991年8月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

带小参数的反应—扩散方程组的数值方法*

潘仲雄　　王翼飞

（上海科学技术大学数学系，1989年11月15日收到）

摘　要

本文讨论带小参数的反应—扩散方程组的数值方法．由于边界层效应，使得这类问题的数值求解十分困难．我们根据奇异摄动理论和Green函数方法建立起一种适合求解这类问题的差分格式．在文中，我们引入了可行等距度α，并证明了若$\alpha\geqslant2$则格式在$l_1(m)$意义下一致收敛且收敛阶为$O(h+\Delta t)$．

关键词　边界层　Green函数方法　可行等距度　一致收敛

本文讨论反应—扩散方程组的数值方法．激光等离子体能量交换和生理现象等的模拟可归结为这类问题．

由于物理过程在边界附近变化激烈，使得这类问题的数值求解十分困难．为了确信数值解的精确程度，我们选取$\{h_i\}$，使得在边界层内有一些网格点．又根据奇异摄动理论和Green函数方法建立起一种差分格式．

我们采用类似于[7]的技巧来获得$L_1[0,1]$和$C[0,1]$范数意义下的解的性态估计，并引入可行等距度α，若$\alpha\geqslant2$，那么格式在$l_1(m)$意义下一致收敛，且收敛阶为$O(h+\Delta t)$．

一、问题和范数

我们考虑下述问题的数值方法：

$$\left.\begin{aligned}&u_t=Du_{xx}+Mu_x+f(u)\qquad (x,t)\in[0,1]\times[0,\infty)\\&u(0,t)=a(t);\ u(1,t)=b(t);\ u(x,0)=u_0(x)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中u，$a(t)$，$b(t)$是向量，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T$，$a(t)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$f(u)=(f_1(u_1,u_2,\cdots,u_n),\cdots,f_n(u_1,u_2,\cdots,u_n))^T$．此外假定

(i) D，M 是对角矩阵，$D=\mathrm{diag}(\varepsilon,\cdots,\varepsilon,\ d_{i0},\cdots,d_n)$，$M=\mathrm{diag}(m_1,m_2,\cdots,m_n)$．$\varepsilon$是非负小参数．$d_i>0$，$m_i\neq0$；

(ii) 假定f把$\partial\Sigma$映入Σ，其中

$$\Sigma=\bigcap_{i=1}^{n}\{u:a_i\leqslant u_i\leqslant b_i\}$$

* 江福汝推荐．

即Σ是一个不变区域[6]；

(iii) $\partial^m f_i/\partial u_j^m(1\leqslant m\leqslant 3,\ 1\leqslant i,j\leqslant n)$是其变量的连续函数，即其在$\Sigma$中一致有界；

(iv) a_i，b_i是变量的光滑函数。

设u，$a(t)$为向量，$V_k^m=(V_{1k}^m,\ V_{2k}^m,\cdots,V_{nk}^m)^T$为网格函数。取范数：

$$\|u\|_{L_1(t)}=\sum_{i=1}^n\int_0^1|u_i(x,t)|dx;\quad \|u\|_{\infty,m}=\sum_{i=1}^n\max_x|u_i(x,m\Delta t)|$$

$$\|a\|_{L_1(t)}=\sum_{i=1}^n\int_0^1|a_i(t)|dt;\qquad \|a\|_{\infty,m}=\sum_{i=1}^n\max_{0\leqslant t\leqslant m\Delta t}|a_i(t)|$$

$$\|a\|_{\infty,m}=\|a\|_{\infty,m\Delta t}$$

$$|V|_{l_1(m)}=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^K|V_{ik}^m|\cdot h_k;\quad |V|_{\infty,m}=\sum_{i=1}^n\max_{0\leqslant k\leqslant K}|V_{ik}^m|$$

这类问题解的性态曾在[1]、[2]、[5]、[6] 中讨论过。在本文中，我们建立了解的导数的估计。

二、解的性态

我们作出下述估计：

引理1　若假设条件(i)～(iv)满足，又令$u(x,t)$是问题(1.1)的解，那么

$$\|u_x\|_{L_1(T)}\leqslant[\|u_x\|_{L_1(0)}+\zeta(T)]\exp(M_0T)=M_1(T)\tag{2.1}$$

其中

$$\zeta(T)=\|a'\|_{L_1(T)}+\|b'\|_{L_1(T)}+\|f(a)\|_{L_1(T)}+\|f(b)\|_{L_1(T)}$$

M_0，M_1是与参数ε无关的常数。

证明　$\mathrm{sg}(Z)$表示Z的符号函数，且

$$\mathrm{sg}_\mu(Z)=\begin{cases}\mathrm{sg}(Z) & |Z|\geqslant\mu\\ (Z/\mu+1)^2-1 & -\mu<Z\leqslant 0\\ -(Z/\mu-1)^2+1 & 0<Z<\mu\end{cases}\tag{2.2}$$

对(1.1)的两边关于x求导，再乘上$\mathrm{sg}_\mu(u_{ix})$后逐项积分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^1 u_{ixt}\mathrm{sg}_\mu(u_{ix})dxdt&=\int_0^1|u_{ix}(x,T)|dx-\int_0^1|u_{ix}(x,0)|dx\\&\quad-\int_0^T\int_0^1 Z\frac{d}{dZ}[\mathrm{sg}_\mu(Z)]\ \frac{dZ}{dt}dtdx+O(\mu)\\&=\int_0^1|u_{ix}(x,T)|dx-\int_0^1|u_{ix}(x,0)|dx+O(\mu)\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^1\varepsilon u_{ixxx}\mathrm{sg}_\mu(u_{ix})dxdt&=\int_0^T\varepsilon[u_{ixx}\mathrm{sg}_\mu(u_{ix})]_{x=0}^{x=1}dt-\int_0^T\int_0^1\varepsilon(Z_x)^2\frac{d}{dZ}[\mathrm{sg}_\mu(Z)]dxdt\\&\leqslant\int_0^T\varepsilon[u_{ixx}\mathrm{sg}_\mu(u_{ix})]_{x=0}^{x=1}dt\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\int_0^T\int_0^1 m_iu_{ixx}\mathrm{sg}_\mu(u_{ix})dxdt=\int_0^T\int_0^1 m_i\ \frac{d}{dx}[u_{ix}\mathrm{sg}_\mu(u_{ix})]dxdt$$

$$-\int_0^T\int_0^1 m_i u_{ix} u_{itx}\frac{d}{dZ}[\mathrm{sg}_\mu(Z)]_{Z=u_{ix}}dxdt$$

$$=\int_0^T m_i[u_{ix}\mathrm{sg}_\mu(u_{ix})]_{x=0}^{x=1}dt+O(\mu) \tag{2.5}$$

在(2.3)、(2.5)中，我们利用了关系式

$$\int_0^T\int_{0<Z<\mu} m_i\Big[-\frac{2}{3}\ \frac{d}{\mu^2 dx}(Z^3)\ +\ \frac{d}{\mu dx}(Z^2)\Big]dxdt=O(\mu)$$

$$\int_0^T\int_{0>Z>-\mu}\Big[\frac{1}{\mu^2}\ \frac{d}{dt}(Z^3)+\frac{1}{\mu}\ \frac{d}{dt}(Z^2)\Big]dxdt=O(\mu)$$

若$i_0\leqslant i\leqslant n$，那么在(2.4)中用$d_i$代替$\varepsilon$。合併(2.3)、(2.4)、(2.5)诸式，利用方程(1.1)，并令$\mu\to 0$，得

$$\|u_x\|_{L_1(T)}<\|u_x\|_{L_1(0)}+M_0\int_0^T\|u_x\|_{L_1(t)}dt+\|a'\|_{L_1(T)}+\|b'\|_{L_1(T)}$$

$$+\|f(a)\|_{L_1(T)}+\|f(b)\|_{L_1(T)}$$

其中M_0为$\{f_{u_i}\}$的界。利用Gronwall不等式即可推得引理的结论。

引理2 在引理1的同样条件下，问题(1.1)的解成立估计式：

$$\|u_{xt}\|_{L_1(T)}\leqslant M_2(T) \tag{2.6}$$

证明 对(1.1)的两边分别关于x和t求导，再乘$\mathrm{sg}_\mu(u_{ixt})$后逐项积分，注意到

$$\int_0^T\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\mathrm{sg}_\mu(u_{ixt})dxdt=\int_0^T\int_0^1\Big[\sum_{p,q}f_{iu_pu_q}u_{px}u_{qt}+\sum_p f_{iu_p}u_{pxt}\Big]\mathrm{sg}_\mu(u_{ixt})dxdt$$

$$=F_1+F_2$$

$$|F_1|\leqslant M_0M_1(T)\int_0^T\|u_{xt}\|_{L_1(t)}dt+M_0M_1(T)\|a'\|_{L_1(T)}$$

$$|F_2|\leqslant M_0\int_0^T\|u_{xt}\|_{L_1(t)}dt$$

类似于引理 1 的证明可得

$$\|u_{xt}\|_{L_1(T)}\leqslant\|u_{xt}\|_{L_1(0)}+nM_0[M_1(T)+1]\int_0^T\|u_{xt}\|_{L_1(t)}dt+nM_0M_1(T)\|a'\|_{L_1(T)}$$

$$+nM_0\|b'\|_{L_1(T)}+\|a''\|_{L_1(T)}+\|b''\|_{L_1(T)}$$

利用Gronwall不等式即可知引理的结论成立。

推论1 $\max\limits_x\Big(\sum\limits_i|u_{it}|\Big)\leqslant\|u_{tx}\|_{L_1(T)}+\|a'\|_{\infty,T}$ (2.7)

引理3 在引理1的同样条件下，问题(1.1)的解成立下述估计

$$\|u_{xtt}\|_{L_1(T)}\leqslant M_3(T) \tag{2.8}$$

证明 对(1.1)的两边关于x求导一次，关于t求导二次，再乘$\mathrm{sg}_\mu(u_{ixtt})$ 后积分。类似于引理 2 的证明，我们可得

$$\|u_{xtt}\|_{L_1(T)}\leqslant nM_0[M_1(T)+1]\int_0^T\|u_{xtt}\|_{L_1(t)}dt+\|u_{xtt}\|_{L_1(0)}+2nM_0TM_2^2(T)$$

$$+[M_0(nM_1(T)+1)+1]\|a''\|_{L_1(T)}+M_0\|a'\|_{L_1(T)}^2+M_0\|b'\|_{L_1(T)}^2+M_0\|b''\|_{L_1(T)}$$

利用Gronwall不等式即可得知引理成立。

推论2 $\max\limits_x\Big(\sum\limits_i|u_{itt}|\Big)\leqslant\|u_{xtt}\|_{L_1(T)}+\|a''\|_{\infty,T}\leqslant M_3(T)+\|a''\|_{\infty,T}$ (2.9)

三、差分格式与网格划分

记

$$h_\varepsilon=(\varepsilon/m)|\ln\varepsilon|,\ m=\max_{1\leqslant i\leqslant i_0-1}|m_i|$$

为了确信数值解的精度，我们选取网格步长$\{h_i\}$，使其在边界附近小于h_ε。

定义　设$\{x_k\}$为网格点，$\{h_k\}$是网格步长，$h=\max\limits_k\{h_k\}$。若存在正的常数α和C，使得

$$|1-h_{k-1}/h_k|\leqslant Ch^\alpha\qquad(k=1,\cdots,K)\tag{3.1}$$

成立，则称α为网格划分$\{h_k\}$的等距度。此外，若

$$h^\alpha\rho_k\to0\qquad(\text{当}h\to0,\ \varepsilon\to0\text{时})\tag{3.2}$$

其中$\rho_k=h_k/\varepsilon$，$h_k=x_{k+1}-x_k$，那么则称α为可行等距度。

在子区间$[x_k,\ x_{k+1}]$中，问题(1.1)的解被表示为：

$$u_{ik}(x,t)=u_i(x_k,t)\,\phi^{\mathrm{I}}_{ik}(x)+u_i(x_{k+1},t)\,\phi^{\mathrm{I}}_{ik}(x)+\int_{x_k}^{x_{k+1}}G_{ik}(x,s)\xi_i(s,t)ds$$

其中

$$\phi^{\mathrm{I}}_{ik}(x)=[\exp(-r_i(x-x_k))-\exp(-r_ih_k)]/[1-\exp(-r_ih_k)]$$

$$\phi^{\mathrm{I}}_{ik}(x)=[\exp(x_{k+1}-x)-\exp(r_ih_k)]/[1-\exp(r_ih_k)]$$

$$r_i=m_i/W_i,\ W_i=\begin{cases}\varepsilon & 1\leqslant i<i_0\\ d_i & i_0\leqslant i\leqslant n\end{cases}$$

$$G_{ik}(x,s)=\frac{1}{W_{ik}(s)}\begin{cases}\phi^{\mathrm{I}}_{ik}(x)\phi^{\mathrm{I}}_{ik}(s) & x\leqslant s\\ \phi^{\mathrm{I}}_{ik}(x)\phi^{\mathrm{I}}_{ik}(s) & x\geqslant s\end{cases}$$

$$W_{ik}(s)=m_i[\exp(-r_i(s-x_{k+1}))-\exp(r_i(x_k-s))]/[(1-\exp(r_ih_k))(1-\exp(-r_ih_k))]$$

$$\xi_i(s,t)=\partial u_i(s,t)/\partial t-f_i(u_1(s,t),\cdots,u_n(s,t))$$

在网格点上，利用$u_{ik}(x,t)$的导数连续性，我们可得下列常微分方程组：

$$A_{ik}u_i(x_{k+1},t)+B_{ik}u_i(x_k,t)+C_{ik}u_i(x_{k-1},t)=du_i(x_k,t)/dt-f_i(u_1(x_k,t),\cdots,u_n(x_k,t))$$

将$du_i(x_k,t)/dt$作差分离散，则可建立差分格式：

$$\left.\begin{array}{l}[U^m_{ik}-U^{m-1}_{ik}]/\Delta t=\theta L_hU^m_{ik}+(1-\theta)L_hU^{m-1}_{ik}+F^{m-1}_{ik}\\ U^0_{ik}=u_{0k}(x_k),\ U^m_{i0}=a_i(m\Delta t),\ U^m_{ik}=b_i(m\Delta t)\\ \qquad(i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,K;\ 0\leqslant\theta\leqslant1)\end{array}\right\}\tag{3.3}$$

其中

$$L_hU^m_{ik}=A_{ik}U^m_{ik+1}+B_{ik}U^m_{ik}+C_{ik}U^m_{ik-1},\ F^{m-1}_{ik}=f_i(U^{m-1}_{1k},\cdots,\ U^{m-1}_{nk})$$

且

$$\left.\begin{array}{l}A_{ik}=r_i/[Z_{ik}(P_{ik}+Q_{ik})]\\ C_{ik}=-r_i/[P_{ik}+Q_{ik}]+r_i/[Z_{i\,k-1}(P_{ik}+Q_{ik})]\\ B_{ik}=-(A_{ik}+C_{ik}),\ Z_{ik}=1-\exp(-r_ih_k)\\ P_{ik}=1/m_i+h_{k-1}/W_i-h_{k-1}/[W_iZ_{i\,k-1}]\\ Q_{ik}=1/m_i+h_k/[W_iZ_{ik}]\end{array}\right\}\tag{3.4}$$

四、差分格式的一致收敛性

定理1 若$\{U_{ik}\}$是差分格式(3.3)的解，并且满足

$$(1-\theta)\Delta t(A_{ik}+C_{ik})\leqslant 1 \tag{4.1}$$

则

$$|u|_{\infty,m}\leqslant \max\{\|a\|_{\infty,m},\ \|b\|_{\infty,m},\ \|u\|_{\infty,0},\ nM_0T\} \tag{4.2}$$

证明 利用离散的极大值原理，我们可容易地证明这个定理。

为了证明差分格式的一致收敛性，不妨将格式的误差表示为

$$V_{ik}^m=u_i(x_k,\ m\Delta t)-U_{ik}^m \tag{4.3}$$

则$\{V_{ik}^m\}$满足下列差分方程：

$$\left.\begin{aligned}&[V_{ik}^m-V_{ik}^m]/\Delta t=\theta L_hV_{ik}^m+(1-\theta)L_hV_{ik}^{m-1}+\sum_{j=1}\tilde{F}_{iu_j}\cdot V_{jk}^{m-1}+J_{ik}^1+J_{ik}^2\\&V_{i0}^m=V_{ik}^m=0;\ V_{ik}^0=0\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{F}_{iu_j}=\frac{\partial f_j}{\partial u_j}(u(x_k,\ (m-1)\Delta t)+\tilde{\theta}(u(x_k,(m-1)\Delta t)-U_k^{m-1}))\qquad \tilde{\theta}\in(\theta,1)\\&J_{ik}^1=\left[\int_{x_h}^{\theta_1}\int_{x_k}^{s}\frac{\partial\xi_j}{\partial s}(u(Z,t),\theta)dZds+\int_{\theta_2}^{x_h}\int_{x_k}^{s}\frac{\partial\xi_j}{\partial s}(u(Z,t),\theta)dZds\right]\Big/[W_i(P_{ik}\\&\qquad +Q_{ik})]\qquad \theta_1\in(x_k,x_{k+1});\ \theta_2\in(x_{k-1},x_k)\\&J_{ik}^2=\left[\theta\sum_{j=1}\frac{\partial f_j}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial t}(x_k,\bar{t})+\frac{1}{2}\theta\frac{\partial^2u_i(x_k,\bar{t})}{\partial t^2}-\frac{1}{2}(1-\theta)\frac{\partial u_i}{\partial t^2}(x_k,\hat{t})\right]\Delta t\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

$$\xi_i(u(s,t),\theta)=\theta\xi_i(s,t)+(1-\theta)\xi_i(s,t-\Delta t)$$

由推论1和推论2，我们有

$$|J_{ik}^2|\leqslant M_4\Delta t \tag{4.6}$$

$$|J_{ik}^1|\leqslant M_4\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}\left|\frac{\partial\xi_i}{\partial s}(u(s,t);\ \theta)\right|ds$$

引理4 记

$$\tau_{ik}=\exp(-r_ih_k),\ \rho_k=h_k/\varepsilon$$

若a是可行等距度，那么可有

$$|1-\tau_{i\ k+1}/\tau_{ik}|\leqslant Ch^a\rho_{k+1} \tag{4.7}$$

$$0<Z_{i\ k+1}/Z_{ik}\leqslant Ch^a \tag{4.8}$$

证明 利用(3.1)和(3.2)两式容易证明引理。

推论3 设a是可行等距度，$\Delta t/h^2=r$是正的常数，则

$$A_{ik}\Delta t\leqslant A_{i\ k+1}\Delta t+Ch^a,\ C_{ik}\Delta t\leqslant C_{i\ k-1}\Delta t+Ch^a \tag{4.9}$$

证明 利用(4.8)，(3.4)两式，且注意到$1/(a-x)\leqslant 1/a+2x/a^2$（当$a/2>x>0$），即知推论成立。

定理2 设$\{V_{ik}^m\}$是(4.4)的解，a是可行等距度。若$a\geqslant 2$且条件(4.1)满足，则

$$|V|_{l_2(m)}\leqslant M_6(h+\Delta t)$$

证明 由(4.4)式，我们可得

$$\sum_{k=0}[1+\theta(A_{ik}+C_{ik})\Delta t]|V_{ik}^{m}|h_k<\sum_{k=0}A_{ik}\theta\Delta t|V_{ik+1}^{m}|h_k+\sum_{k=1}C_{ik}\theta\Delta t|V_{ik-1}^{m}|h_k$$

$$+\sum_{k=0}A_{ik}(1-\theta)\Delta t|V_{ik+1}^{m-1}|h_k+\sum_{k=1}C_{ik}(1-\theta)\Delta t|V_{ik-1}^{m-1}|h_k$$

$$+\sum_{k=0}[1-(1-\theta)(A_{ik}+C_{ik})\Delta t]|V_{ik}^{m-1}|h_k+\sum_{k=1}\sum_{j=1}|\bar{F}_{iuj}V_{jk}^{m-1}|\Delta ht_k$$

$$+\sum_{k=1}|J_{jk}^{1}|\Delta th_k+\sum_{k=1}|J_{jk}^{2}|\Delta th_k$$

利用估计式(4.6)、假定条件(iii)、条件(4.1)和$a\geqslant 2$，我们可有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K-1}|V_{jk}^{m}|h_k\leqslant(1+M_5\Delta t)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K-1}|V_{jk}^{m-1}|h_k+\sum_{j}M_5h\Delta t+\sum_{j}M_5(\Delta t)^2$$

于是一致收敛性定理获证。

五、数 值 试 验

试验函数

$$u(x,t)=x+\sin\pi x\exp(-t)+t\sin\pi x\exp(-ax/\varepsilon)$$
$$v(x,t)=x+\sin\pi x\exp(-d\pi^2 t)$$

网格步长h_k，$h_k=y_k/\sum y_i$

$$y_i=\begin{cases}2H_gZ_i & 0\leqslant Z_i\leqslant 1/2\\ 2H_g(1-Z_i) & 1/2\leqslant Z_i\leqslant 1,\ Z=i/K,\ K=50\end{cases}$$

$$\theta=1$$

表1

ε	d	m	Δt	误差(l_1模)
0.001	1	100	0.0001	2.1211×10^{-2}
0.001	1	200	0.0001	4.0767×10^{-2}

参 考 文 献

[1] Nishiura, Y., Stability analysis of travelling front solutions of reaction-diffusion systems——an application ot the step method, *Proceedings of BAIL-IV* (1986).

[2] Nishiura, Y., Layer stability analysis and those hold phenomenon of reaction-diffusion systems, *SIAM, J. Math. Anal.*, 13 (1982).

[3] Niijima, K., A uniformly convergent difference scheme for a semilinear singular perturbation problem, *Numer. Math.*, 43 (1984).

[4] Lorenz, J., Non-linear boundary value problems with turning points and properties of difference schemes, *Lecture Notes in Mathematics*, New York, 942 (1982).

[5] 徐至展、潘仲雄、王翼飞、张文琦，激光核聚变的一维三温度计算，物理学报，31(9)(1982).

[6] Smeller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag (1980).

[7] Pan Zhong-xiong and Wang Yi-fei, Numerical method for an evolutive system of nonlinear equations with a small parameter, *Proceedings of BAIL-V* (1988).

Numerical Method for the System of Reaction-Diffusion Equations with a Small Parameter

Pan Zhong-xiong   Wang Yi-fei

(*Shanghai University of Science and Technology, Shanghai*)

Abstract

This paper deals with the numerical method for the system of reaction-diffusion equations with a small parameter. It is difficult to solve the problems of this kind numerically because of the boundary layer effect. Based on singular perturbed theory and Green's function, we have established the difference scheme that is suited for the solution to the problems. We introduce an idea of feasible equidistant degree α here. And this proves that if $\alpha \geqslant 2$, the scheme converges in $l_1(m)$ norm with speed $O(h+\Delta t)$ uniformly.

Key words boundary layer, Green's function, feasible equidistant degree, uniform convergence