

复合载荷下环形薄板的热屈曲*

李世荣 程昌钧

(甘肃工业大学) (兰州大学)

摘 要

基于 von Kármán 薄板大挠度方程, 本文研究了经受非均匀轴对称温度场的环形薄板在多种边界条件下的热屈曲问题。采用分析与计算相结合的方法着重讨论了热屈曲的线性化问题, 获得了反映环板失稳特征的稳定边界。

关键词 环形薄板 热屈曲 线性化问题 临界载荷曲面 稳定边界

一、引 言

受约束的薄板当其面内温度超过一定值时, 将会产生屈曲状态。如果在板的周边还作用着径向面内压力则这种状态就更易产生。因此, 研究薄板热弹性屈曲问题对结构稳定性设计具有重要意义。有关薄板热屈曲问题基本理论已早有论述^{[1][2]}。在具体问题的讨论和求解方面也有不少有意义的工作^{[3]~[6]}。但是, 这些文章中只考虑了板中面内变温为均布的特殊情况, 而未曾涉及温度非均布情形以及同时有面内力载荷作用的多载热屈曲问题。本文试图分析和讨论环板在面对轴对称非均匀无源温度场和周边面内压力共同作用下的热弹性稳定性问题。首先根据薄板大变形理论建立问题的数学模型, 并简化为一组二阶常微分方程边值问题, 然后分析和讨论非线性方程在平凡解处的线性化问题, 它将归结为一多参数的线性特征值问题。我们拟用数学分析与数值计算相结合的方法求解该特征值问题, 获得载荷空间环板失稳的临界曲面(或曲线)。

二、数学模型及其简化

设一内半径为 a , 外半径为 b , 厚为 h 的环形薄板, 经受一轴对称无源温度场 T , 在柱坐标中描述为:

$$T(r) = T_a + K \ln(a/r) \quad (2.1a)$$

$$K = (T_b - T_a) / \ln(a/b), \quad T_a = T(a), \quad T_b = T(b) \quad (2.1b)$$

我们假定材料弹性模量 E , 泊松比 μ , 线膨胀系数 α_T 均不随温度升高而改变, 且一切约束均

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅱ)论文。国家自然科学基金资助项目。
叶开沅推荐。1989年12月16日收到。

为轴对称形式的。我们只考虑轴对称问题。于是可得环板热屈曲控制方程：

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} W = \frac{1}{r} \left(r \cdot N_r \frac{d^2 W}{dr^2} + N_\theta \frac{dW}{dr} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{1}{Eh} (N_r - \mu N_\theta) + \alpha_T \cdot T - \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 \quad (2.3)$$

$$\frac{U}{r} = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \mu N_r) + \alpha_T \cdot T \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dr} (r N_r) = N_\theta \quad (2.5)$$

式中 $W(r)$ ——中面挠度， $U(r)$ ——中面径向位移，

$N_r(r)$ ， $N_\theta(r)$ ——薄膜应力， $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ ——抗弯刚度。

在(2.3)(2.4)中消去 U ，利用(2.5)消去 N_θ ，可得：

$$Dr \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} W = (r N_r) \frac{dW}{dr} + A \quad (2.6)$$

$$r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) = - \frac{Eh}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 + B \quad (2.7)$$

式中 A 为积分常数； $B = \alpha_T \cdot E \cdot K$ ，当温度均匀时， $B = 0$ 。横向边界（不包括有一周边横向自由）统一记成：

$$W(a) = 0, W'(a) + A_1 W''(a) = 0 \quad (2.8)$$

$$W(b) = 0, W'(b) + A_2 W''(b) = 0 \quad (2.9)$$

式中 A_1 ， A_2 为横向约束参数，中面内的边界条件考虑以下三种：

- (1) 内外边界固定；
- (2) 内边界受均布法向压力 P_a ，外边界固定；
- (3) 外边界受均布法向压力 P_b ，内边界固定。

利用(2.4)可以将位移边界条件转化为薄膜力的边界条件，于是以上三种面内边界条件可统一记成：

$$r=a: r N_r - B_1 \frac{d}{dr} (r N_r) = Q_1 \quad (2.10a)$$

$$r=b: r N_r - B_2 \frac{d}{dr} (r N_r) = Q_2 \quad (2.10b)$$

式中 常数 B_1 ， B_2 ， Q_1 ， Q_2 是反映以上三种面内约束的参数。

引入无量纲变换：

$$\left. \begin{aligned} x=r/b, w &= \frac{\delta}{h} W, N = \frac{\delta^2 b^2}{Eh^3} N_r \\ \tau &= \alpha_T \cdot \delta^2 \left(\frac{b}{h} \right)^2 T, (p_0, p_1) = \frac{\delta^2}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2 (P_a, P_b), \alpha = \frac{\delta b^2}{Dh} A \\ c &= a/b, \beta = \frac{1}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \cdot \delta \cdot B \\ (\tau_0, \tau_1) &= \alpha_T \delta^2 \left(\frac{b}{h} \right)^2 (T_a, T_b), \delta^2 = 12(1-\mu^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$\text{并令 } \xi(x) = \frac{dw}{dx}, \eta(x) = xN(x), G(\cdot) = x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x(\cdot) \quad (2.12)$$

于是由(2.6)~(2.10)得无量纲控制方程:

$$G(\xi) = \xi\eta + \alpha \quad (2.13)$$

$$G(\eta) = -\frac{1}{2}\xi^2 + \beta \quad (2.14)$$

$$\xi(c) + a_1\xi'(c) = \xi(1) + a_2\xi'(1) = 0 \quad (2.15)$$

$$\int_c^1 \xi(x) dx = 0 \quad (2.16)$$

$$\eta(c) - b_1\eta'(c) = q_1, \eta(1) - b_2\eta'(1) = q_2 \quad (2.17)$$

式中 参数 q_i, a_i, b_i 分别是边界条件参数 $Q_i, A_i, B_i (i=1, 2)$ 的无量纲形式, α 是未知常数, 且有 $w=0 \Rightarrow \alpha=0$. 显然, (2.13)~(2.17) 有平凡解:

$$(\xi, \eta, \alpha) = (0, \eta^*, 0) \quad (2.18)$$

函数 η^* 满足边值问题:

$$G(\eta^*) = \beta, \eta^*(c) - b_1\eta^{*'}(c) = q_1, \eta^*(1) - b_2\eta^{*'}(1) = q_2 \quad (2.19)$$

由弹性理论的唯一性定理知(2.19)有唯一解, 其形式为:

$$\eta^*(x) = \frac{1}{2}\beta x \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + A^*x + B^*/x \quad (2.20)$$

式中 β, A^*, B^* 均为无量纲载荷 τ_0, τ_1, p_0 (或 p_1) 的齐次线性式(见附录). 因此可将 η^* 记为:

$$\eta^*(x) = \lambda v_0(x) \quad (2.21)$$

参数 λ 可任选 τ_0, τ_1, p_0 或 p_1 , 这样, 我们在形式上可将多载荷参数的边值问题化为一个参数的边值问题. 当考虑载荷按比例增加时, 这样做显然是合理的. 另外, 我们已证明对应于本文考虑的三种面内边界条件, 环板的径向薄膜力均为压力, 亦即函数 $v_0(x)$ 满足:

$$v_0(x) < 0 \quad (c < x < 1) \quad (2.22)$$

条件(2.22)对证明屈曲解的唯一性十分重要^[7]. 采用变换:

$$\xi(x) = u(x), \eta(x) = \lambda v_0(x) + v(x) \quad (2.23)$$

将(2.23)代入(2.13)~(2.17), 并注意到(2.19), (2.21), 可得到齐次非线性边值问题:

$$G(u) = \lambda v_0 u + uv + \alpha \quad (2.24)$$

$$G(v) = -\frac{1}{2}u^2 \quad (2.25)$$

$$(I) \quad \begin{cases} u(c) + a_1 u'(c) = 0, u(1) + a_2 u'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\int_c^1 u(x) dx = 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} v(c) - b_1 v'(c) = 0, v(1) - b_2 v'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

我们把(I)作为环板热屈曲问题的基本方程. 如果非线性方程有非零解, 则称这组解为(I)的分叉解, 或称为环板的屈曲状态^[7]. 由常微分方程分叉理论知, 方程(I)发生分叉的必要条件是其线性化问题有非平凡解. 为此, 我们下面讨论(I)的线性化方程.

三、特征值问题和临界载荷

非线性边值问题(I)在平凡解(2.18)处的线性化问题为:

$$\begin{cases} G(\bar{u}) = \lambda v_0 \bar{u} + \bar{\alpha} & (3.1) \\ \int_0^1 \bar{u} dx = 0 & (3.2) \\ \bar{u}(c) + a_1 \bar{u}'(c) = 0, \bar{u}(1) + a_2 \bar{u}'(1) = 0 & (3.3a, b) \\ G(\bar{v}) = 0 & (3.4) \\ \bar{v}(c) - b_1 \bar{v}'(c) = 0, \bar{v}(1) - b_2 \bar{v}'(1) = 0 & (3.5a, b) \end{cases}$$

由(2.19)的解的唯一性可知, (3.4), (3.5a, b)有唯一零解:

$$\bar{v}(x) \equiv 0 \quad (3.6)$$

于是特征值问题归结为求解(3.1)(3.2)(3.3a, b), 为此, 我们分别考察下面两个边值问题:

$$G(\bar{u}_1) = \lambda v_0 \bar{u}_1 + 1 \quad (3.7a)$$

$$\bar{u}_1(c) + a_1 \bar{u}_1'(c) = 0, \bar{u}_1(1) + a_2 \bar{u}_1'(1) = 0 \quad (3.7b)$$

$$G(\bar{u}_2) = \lambda v_0 \bar{u}_2 \quad (3.8a)$$

$$\bar{u}_2(c) + a_1 \bar{u}_2'(c) = 0, \bar{u}_2(1) + a_2 \bar{u}_2'(1) = 0 \quad (3.8b)$$

由常微分方程理论知, (3.1)(3.3a, b)的解可以由(3.7)(3.8)的解线性表出, 即

$$\bar{u}(x, \lambda) = \bar{\alpha} \bar{u}_1(x, \lambda) + \bar{k} \bar{u}_2(x, \lambda) \quad (3.9)$$

其中 $\bar{\alpha}, \bar{k}$ 是任意常数. 要使 λ 是(II)的特征值, 解 $\bar{u}(x, \lambda)$ 必须还满足方程(3.2), 即

$$\bar{\alpha} \int_0^1 \bar{u}_1(x, \lambda) dx + \bar{k} \int_0^1 \bar{u}_2(x, \lambda) dx = 0 \quad (3.10)$$

并且使得 $\bar{\alpha}, \bar{k}$ 不全为零. 这时对应的 $\bar{u}(x, \lambda)$ 就称为(II)的特征向量, 于是我们得到特征方程:

$$\begin{cases} E_1(\lambda) = \int_0^1 \bar{u}_1(x, \lambda) dx = 0 & (3.11a) \\ E_2(\lambda) = \int_0^1 \bar{u}_2(x, \lambda) dx = 0 & (3.11b) \end{cases}$$

定义集合:

$$M_1 = \{\lambda | \bar{u}_1(x, \lambda) \text{ 满足 } (3.7)(3.11a)\} \quad (3.12)$$

$$M_2 = \{\lambda | \bar{u}_2(x, \lambda) \text{ 满足 } (3.8)(3.11b)\} \quad (3.13)$$

于是可得所有特征值的集合:

$$M = M_1 \cup M_2 \quad (3.14)$$

只要同时求解(3.8)(3.7)(3.11)就可求得 M 和对应的特征向量空间. 我们现在定义一个载荷空间:

$$P = \{\tau_0, \tau_1, p | \tau_0, \tau_1, p \geq 0\} \quad (3.15)$$

于是(3.11a)(3.11b)可统一记成:

$$\mathcal{A}(\tau_0, \tau_1, p) = 0 \quad ((\tau_0, \tau_1, p) \in P) \quad (3.16)$$

这是因为 $\eta^*(x)$ 是载荷参数 τ_0, τ_1, p 的齐次线性函数. 方程(3.16)一般代表载荷空间 P 中的一族曲面. 其中和平面 $\tau_0 = 0, \tau_1 = 0$ 和 $p = 0$ 构成的体积最小者称为临界曲面或稳定边界. (Stability Boundary), 将它记为:

$$\mathcal{A}^*(\tau_0, \tau_1, p) = 0 \quad (3.17)$$

曲面(3.17)将载荷空间 M 分为两部分, 即分别是稳定区域(Region of Stability)和失稳区域(Region of Instability).

(3.17)或(3.16)的解析解难以求出。我们采用数值微分和积分来确定(3.17)上的临界点。选取两个适当曲面并使它们与曲面族(3.16)相交，从而可获得一系列交点，而落在曲面(3.17)上的点正是临界点。

四、数值结果及其分析

利用有限差分法可以求得环形薄板在各种几何参数和边界条件下的临界载荷曲面或曲线。表1~6给出了对应于文中所述的三种面内边界条件下的数值结果。图1~3表示临界曲线和曲面。在这些图表中，字母S和C分别表示简支边和夹紧边。计算时，取 $\mu=1/3$ 。计算结果如下：

(1) 如果环板两周边完全固定，则载荷参数为 τ_0, τ_1 。于是临界曲面(3.17)退化为坐标平面 (τ_0, τ_1) 上的临界曲线。数值结果表明这些曲线是近似的直线，满足方程：

$$\tau_0/X + \tau_1/Y = 1 \quad (\tau_0, \tau_1 \geq 0) \quad (4.1)$$

其中 X 和 Y 分别是 $\tau_1=0$ 和 $\tau_0=0$ 时的临界温度。表1给出了对应于不同比值 a/b 的 X, Y 值。从中可以发现，当 a/b 增大时相应的稳定区域迅速扩大。这一现象正与物理事实相吻合。如果温度均匀分布，即 $\tau_0=\tau_1=\tau$ ，则临界曲线(4.1)退化为一。表2是不同几何参数下的临界温度。在 $c=0.5$ 时对应于内外周边完全夹紧条件下的临界温度 $\tau_{cr}=105.61$ 。与文献[5]中结果 $\tau_{cr}=103.4$ 相比前者比后者约大2.1%。这是由于[5]中采用了非对称屈曲模式，因此，非对称屈曲可能先于轴对称屈曲发生。

(2) 若板的内周边受均布径向面内压力，外边界面内固定，载荷空间是三维的。表3给出了 $(\tau_0, \tau_1)^T=(0, 0)^T$ 情况下算得的临界压力和[7][8]中结果的比较。由于在[8]中采用了能量法，因此结果稍偏小。就两周边横向简支、几何参数 $c=0.3$ 的情形，计算出平面 $p=r_1\tau_0(r_1=0, 0.5, 1.5)$ 与临界曲面(3.17)的交线在坐标平面 (τ_0, τ_1) 上的投影以及平面 $\tau_1=r_2p(r_2=0.0, 0.5, 1.0, 2.0)$ 与临界曲面(3.17)的交线在坐标平面 (p, τ_0) 上的投影，从而得到载荷空间的临界曲面（见图1~3）。这一曲面可近似地用平面方程

$$\tau_0/X + \tau_1/Y + p/Z = 1 \quad (\tau_0, \tau_1, p \geq 0) \quad (4.2a)$$

表示，其中

$$(X, Y, Z)^T = (64.2, 38.6, 55.7)^T \quad (4.2b)$$

分别为载荷 τ_0, τ_1, p 单独作用时的临界值。对应两周边横向夹紧几何参数 $c=0.3$ 的临界曲面是：

$$\tau_0/209.6 + \tau_1/142.7 + p/241.5 = 1 \quad (\tau_0, \tau_1, p \geq 0) \quad (4.3)$$

(3) 对于板内周边不可移而外边界受均布面内径向压力作用且 $\tau_0=\tau_1=0$ 的屈曲问题已在[7]中有详细讨论。表4是本文结果与[7][8]中结果的比较。表5中反映了均匀变温对临界压力的影响。从中发现，随温度升高临界压力 P_{cr} 迅速增加。这是由于外边界不受面内位移约束，温度升高产生的自由膨胀要抵抗一部分周边压力，因而环板的临界压力相对提高了。表6中的结果进一步表明环板失稳的主要因素是周边压力，而温度升高却增强了板的稳定性。但值得注意的是在此种面内边界条件下，不存在象(4.2)那样的有限稳定边界。

最后应当指出，本文只讨论了载荷参数 $\tau_0, \tau_1, p \geq 0$ 的情形。实际上我们也可以分析某个参数为负的情形。因为环板失稳是全部载荷共同作用的结果。

虽然本文求得了多种边界条件下对应于不同几何参数的环板的临界载荷，但是还不能肯

定非线性方程(I)一定在临界点处发生分叉。这些问题我们将有另外文章讨论。

表 1 内外周边不可移时的临界温度参数

横向约束	a/b	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
(S-S)	X		39.98	42.26	50.32	66.03	96.29
	Y		18.18	23.22	31.75	44.48	74.25
(C-C)	X	122.18	124.81	144.88	182.23	274.60	369.81
	Y	46.63	63.04	86.72	123.24	184.14	297.17
(C-S)	X	61.14	61.92	71.64	90.17	122.90	184.35
	Y	20.28	27.98	39.38	57.14	87.08	143.18
(S-C)	X		82.74	89.06	106.72	139.98	203.33
	Y		41.95	52.35	70.52	101.70	160.12

表 2 等温时的临界温度

a/b	τ_{cr}	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
(S-S)		11.75	12.50	14.99	19.47	27.28	41.92
(C-C)		33.75	41.89	54.25	73.52	105.61	164.77
(C-S)		15.23	19.28	25.41	34.98	50.98	80.60
(S-C)		26.25	27.70	32.99	42.47	58.91	89.59

表 3 温度分布为零时的临界压力

a/b	$(p_0)_{cr}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	备注
(C-C)		587.6	277.6	214.5	209.9	242.4	325.3	519.8	本文结果
		587.6	277.6	214.5	209.9	242.4	325.3	519.8	[7]中结果
		587.5	277.5	214.5	209.9	242.4	325.3	519.8	[8]中结果

表 4 温度分布为零时的临界压力

a/b	$(p_1)_{cr}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	备注
(S-S)		17.21	17.62	20.59	26.40	36.92	57.15	102.14	本文
		17.20	17.61	20.58	26.39	36.91	57.14	102.13	[8]
(C-C)		49.55	59.63	75.38	100.7	144.0	255.7	406.2	本文
		49.55	59.64	75.38	100.7	144.0	255.7	406.2	[7]

表 5 均布温度对临界压力的影响 ($c=0.3, r_1=\tau/p$)

r_1	$(p_t)_{cr}$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
(C-C)		75.38	79.81	84.66	89.98	95.79	102.14	109.05	116.53
(S-S)		20.59	21.98	22.53	25.13	27.13	29.20	31.46	33.90

表 6

τ_1, p_1 对临界温度 $(\tau_0)_{cr}$ 的影响

$(r_1 = \tau_1/\tau_0, r_2 = p_1/\tau_0, c = 0.3)$

r_2	r_1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
0.5	$(\tau_0)_{cr}$	46.31	54.25	65.58	77.88	94.58	114.73	138.08
1.5		14.27	14.99	15.77	16.62	17.55	18.58	19.70
2.0		10.60	11.00	11.41	11.87	12.53	12.85	13.39

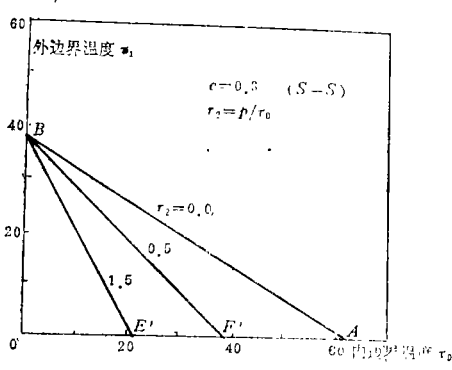


图1 临界曲面和平面 $p=r_2\tau_0$ 的交线在坐标面 (τ_0, τ_1) 上的投影

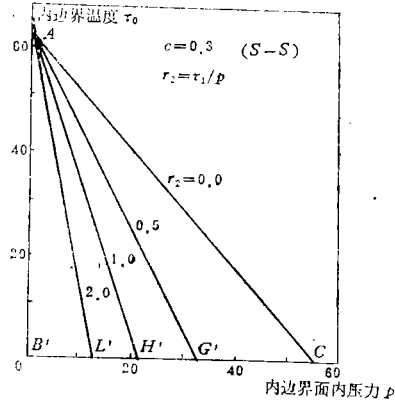


图2 临界曲面与平面 $\tau_0=r_2p$ 的交线在 (p, τ_0) 平面上的投影

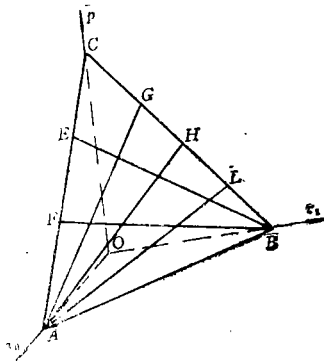


图3 临界曲面示意图

附 录

$$\beta = (\tau_1 - \tau_0) / \ln(c)$$

$$(1) \quad A^* = \frac{-1}{(1-c^2)(1-\mu)} \left[\frac{1}{4} \beta (1+\mu)(1-c^2) - \frac{1}{2} \beta c^2 (1-\mu) \ln(c) + \tau_1 - \tau_0 c^2 \right]$$

$$B^* = \frac{-1}{(1-c^2)(1-\mu)} \left[\frac{1}{2} \beta c^2 (1-\mu) \right]$$

$$(2) \quad A^* = \frac{-1}{(1-\mu) + (1+\mu)c^2} \left[(1+\mu)c^2 p_0 + \tau_1 + \frac{1}{2} c^2 (1+\mu)(\tau_1 - \tau_0) + \frac{1}{4} \beta (1+\mu)(1-c^2) \right]$$

$$B^* = \frac{-c^2}{(1-\mu) + (1+\mu)c^2} \left[(1-\mu)p_0 - \tau_1 + \frac{1}{2} (1-\mu)(\tau_1 - \tau_0) - \frac{1}{2} \beta \right]$$

$$(3) \quad A^* = \frac{-1}{(1+\mu) + (1-\mu)c^2} \left[(1+\mu)p_1 + \tau_0 c^2 + \frac{1}{2} c^2 (1-\mu)(\tau_1 - \tau_0) - \frac{1}{4} \beta (1-\mu)(1-c^2) \right]$$

$$B^* = \frac{-1}{(1+\mu) + (1-\mu)c^2} \left[(1-\mu)p_1 - \tau_0 - \frac{1}{2}(1-\mu)(\tau_1 - \tau_0) - \frac{1}{2}\beta \right]$$

参 考 文 献

- [1] Nowinski, J. L., *Theory of Thermoelasticity with Applications*, Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff (1978), 547—570.
- [2] 竹内洋一郎, 《热应力》(郭廷玮、李安定译), 中国科学出版社, 北京(1977), 358—378.
- [3] Kanaka, R. K. and R. G. Venkateswara, Thermal-postbuckling of circular plates, *Comput. Struct.*, **18** (1984), 1179—1182.
- [4] Tani, J., Thermal buckling of an annular plate with axisymmetric initial deflection, *J. Appl. Mech.*, **45**, (1978), 693—695.
- [5] Tani, J., Elastic instability of a heated annular plate under lateral pressure, *J. Appl. Mech.*, **48** (1981), 399—403.
- [6] Prabha, M. S. S. and S. Durvasula, Thermal buckling of skew plates, *Can. Aeronaut. and Spce. J.*, **20** (1974), 111—113.
- [7] 程昌钧、朱正佑, 环板的屈曲状态, 中国科学(A辑), **24** (1986), 956—965.
- [8] 吕小安、程昌钧、李世荣, 正交各向异性环板的屈曲, 应用数学和力学(待发表).

Thermal-Buckling of Thin Annular Plates under Multiple Loads

Li Shi-rong

(University of Gansu Technology, Lanzhou)

Cheng Chang-jun

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

On the basis of von Kármán equations, the thermal-buckling of thin annular plates subjected to a field of non-uniform axisymmetric temperature and a variety of boundary conditions is discussed. The linearized problem is analyzed and stability boundaries which characterize instability of a plate are obtained by means of numerical and analysis methods.

Key words thin annular plates, thermal-buckling, linearized problem, critical load surface, stability boundary.