

# 叠层复合材料杆弯曲的层间应力(I)

张福范

(清华大学, 1984年9月24日收到)

## 摘要

一矩形横截面的叠层复合材料杆, 由以一种材料为中心部分, 及另一种材料的上下两相同的盖板所组成. 各等于 $P$ 的压力和张力, 均匀分布在上下盖板的两端. 它们形成两力偶使杆弯曲. 本文将探讨层间应力, 以表明力是怎样通过胶合面而传递的.

## 一、引言

叠层复合材料构件的层间应力与边缘局部效应的探讨, 已成为理论和实验方面的一个重要研究题目. 图1为一受弯的叠层复合材料杆. 它是由以一种材料为中心部分, 及另一材料的两相同的上下盖板所组成. 中心部分的材料的弹性常数为 $E_1, G_1, \mu_1$ . 如果是木材这正交各向异性材料, 则弹性常数为 $E_1, E_2, G_1, \mu_{21}$ . 金属盖板的弹性常数为 $E, G, \mu$ . 作用于杆端的力偶, 是由均匀分布在上下两盖板端的压力和张力所组成(图1). 以 $P$ 为张力或压力的值, 则力偶为 $P(h+h_1)$ , 使这叠成复合材料杆的上半部受压而下半部受拉.

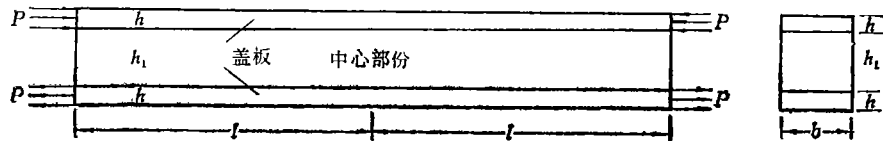


图 1

现分析作用于两端的力偶是怎样通过胶合面传递开去的. 当盖板与中心部分为同一材料, 则所得的结果将对 Saint-Venant 原理提供一实例.

作用于盖板的剪应力 $\tau_0$ 的方向, 很容易根据外力 $P$ 来确定(图2(a)). 但 $\sigma_0$ 的分布将依赖于盖板与中心部分的相对尺寸和弯曲刚度, 使盖板的变形与中心部分协调. 设 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 的分布如图2(a)所示.

设

$$\tau_0 = \sum_{n=1} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \sigma_0 = \sum_{n=1} b_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1.1)$$

系数 $a_n$ 与 $b_n$ 为待定. 由于 $\sigma_0$ 应组成一力偶, 故 $b_0=0$ .

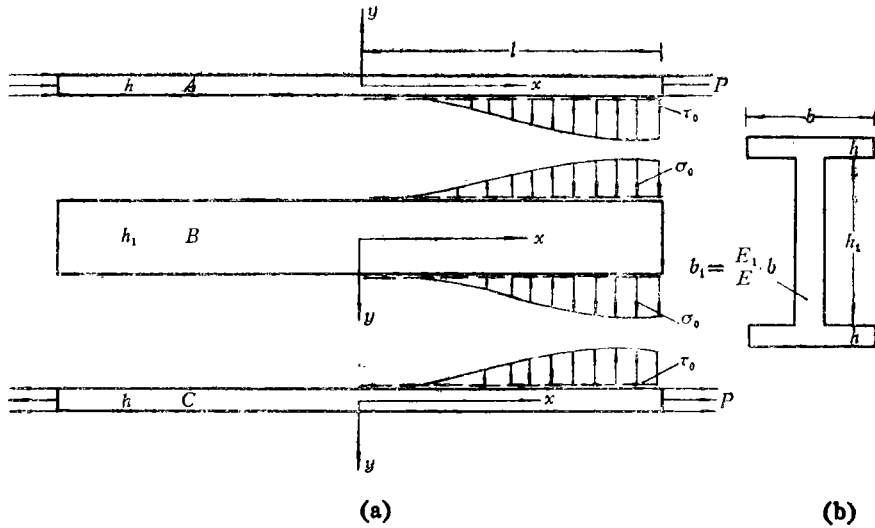


图 2

## 二、盖板与中心部分的内力分量及 $a_n$ 与 $b_n$ 的联系

(A) 上盖板A的内力分量:

自上盖板A截出一微段 $dx$ (图3), 由它的平衡, 得到:

$$\frac{dS}{dx} = -b\tau_0, \quad \frac{dQ}{dx} = b\sigma_0, \quad \frac{dM}{dx} = Q - \frac{bh}{2}\tau_0 \tag{2.1}$$

将以上三式积分, 得

$$\left. \begin{aligned} S &= -P - \frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \\ Q &= \frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ M &= \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{bh}{2} \frac{a_n}{n} + \frac{E_1}{\pi} \frac{b_n}{n^2} \right) \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned} \right\} \tag{2.2}$$

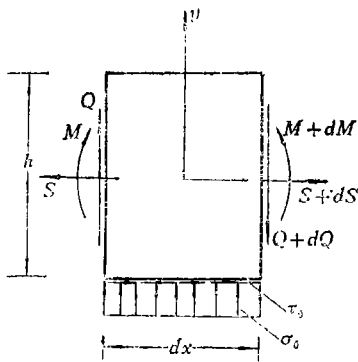


图 3

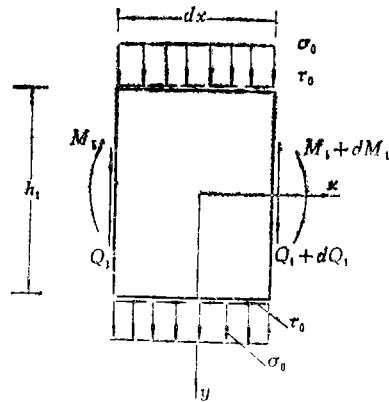


图 4

(B) 中心部分B的内力分量:

自中心部分截出一微段 $dx$ (图4), 由它的平衡, 得到:

$$\frac{dQ_1}{dx} = -2b\sigma_0 \quad \frac{dM_1}{dx} = Q_1 - bh_1\tau_0 \quad (2.3)$$

将以上两式积分, 得:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -2b \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ M_1 &= \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -bh_1 \frac{a_n}{n} - \frac{2bl}{\pi} \frac{b_n}{n^2} \right) \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

(C) 下盖板C的内力分量:

自下盖板C截出一微段(图5), 由它的平衡得:

$$\frac{dS_2}{dx} = b\tau_0, \quad \frac{dQ_2}{dx} = b\sigma_0, \quad \frac{dM_2}{dx} = Q_2 - \frac{bh}{2}\tau_0 \quad (2.5)$$

将以上三式积分, 得:

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= P + \frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \\ Q_2 &= \frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ M_2 &= \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{bl}{\pi} \frac{b_n}{n^2} - \frac{bh}{2} \frac{a_n}{n} \right) \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

系数 $a_n$ 与 $b_n$ 之间的联系

由于当这杆整体弯曲后, 盖板与中心部分的曲率相等, 得:

$$\frac{M}{EI} = \frac{M_1}{E_1 I_1} \quad (2.7)$$

式中的 $I$ 与 $I_1$ 各为盖板与中心部分的横截面, 各对它的中性轴的惯性矩. 将(2.2)与(2.4)式中的 $M$ 与 $M_1$ 代入上式, 得到:

$$b_n = -a_n n \frac{\pi h}{l} \frac{-\frac{1}{2} \frac{1}{EI} + \frac{h_1}{h} \frac{1}{E_1 I_1}}{\frac{1}{EI} + \frac{2}{E_1 I_1}} \quad (2.8a)$$

或

$$b_n = ka_n n \quad (2.8b)$$

式中的

$$k = -\frac{\pi h}{l} \frac{\frac{h_1}{h} \frac{1}{E_1 I_1} - \frac{1}{2EI}}{\frac{1}{EI} + \frac{2}{E_1 I_1}} \quad (2.8c)$$

自(2.8b)式, 并得:

$$\sigma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} ka_n n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

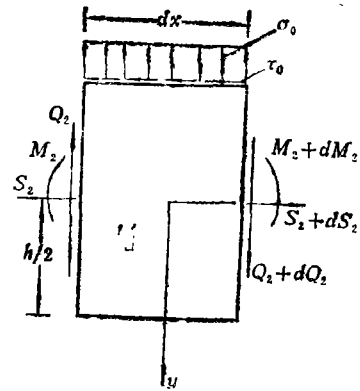


图 5

并由(1.1)式, 得

$$\frac{d\tau_0}{dx} = \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

于是得到以下这算式:

$$\sigma_0 = \frac{l}{\pi k} \frac{d\tau_0}{dx} \quad (2.9)$$

(2.9)式表明: 沿盖板与中心部分的胶合面的长度内, 各点的正应力 $\sigma_0$ 与该点的 $\tau_0$ 的导数成比例。换言之, 如果沿胶合面的长度, 给出 $\tau_0$ 的分布曲线, 则任一点的 $\sigma_0$ 与 $\tau_0$ 曲线在该点的斜率成比例。

### 三、上下两盖板及中心部分的应力分量

既有了 $a_n$ 与 $b_n$ 的联系, 就可用算式(2.8)将所有的应力分量由未知系数 $a_n$ 来表达。

(A) 上盖板的应力分量:

由方程(2.2)及图2(a), 得:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{S}{bh} - \frac{My}{I} \\ &= -\sigma^* - \frac{l}{\pi h} \left\{ 1 + 12 \frac{y}{h} \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right) \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned} \quad (3.1a)$$

式中的 $\sigma^* = P/bh$ 。将 $\sigma_x$ 代入由平衡方程所得的积分式,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dy + \int_{-\tau_0}^{\tau_{xy}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy = 0$$

得:

$$\tau_{xy} = - \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right) + 6 \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right) \left( \frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right) \right\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.1b)$$

将 $\tau_{xy}$ 代入由另一平衡方程所得的积分式

$$\int_{-\sigma_0}^{\sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy + \int_{-\frac{h}{2}}^y \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy = 0$$

得:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= - \left\{ k - \frac{\pi h}{l} \left[ \left( \frac{y}{2h} - \frac{y^2}{2h^2} + \frac{3}{8} \right) + 6 \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right) \left( \frac{y}{4h} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{y^3}{3h^3} + \frac{1}{12} \right) \right] \right\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cos \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (3.1c)$$

(B) 下盖板的应力分量:

由内力分量的算式(2.6), 同样可得到下盖板的应力分量, 它们各与上盖板的相等, 只是差一个正负号。因而, 只需将(3.1)式中的 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 改为负的, 即得所需的应力分量。

(C) 中心部分的应力分量:

由内力分量的算式(2.4), 得:

$$\sigma_x' = \frac{M_1 y}{I_1} = -12 \frac{l}{\pi h_1} \frac{y}{h_1} \left( 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (3.2a)$$

将 $\sigma_x'$ 代入由平衡方程得到的积分式:

$$\int_{\tau'_{xy}}^{\tau_0} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} dy + \int_y^{\frac{h_1}{2}} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} dx = 0$$

得:

$$\tau'_{xy} = \left\{ 1 - 6 \left( 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \right) \left( \frac{1}{4} - \frac{y^2}{h_1^2} \right) \right\} \sum_{n=1} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2b)$$

将  $\tau'_{xy}$  代入

$$\int_{\sigma'_y}^{\sigma_0} \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} dy + \int_y^{\frac{h_1}{2}} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} dx = 0$$

得:

$$\sigma'_y = \left\{ k + \left[ \frac{2y}{h_1} \left( \frac{1}{4} - \frac{y^2}{h_1^2} \right) + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 3 \frac{y}{h_1} - 4 \frac{y^3}{h_1^3} - 1 \right) \right] \frac{\pi h_1}{l} \right\} \sum_{n=1} a_n n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2c)$$

因而, 上下盖板与中心部分的应力分量, 均已由未知系数  $a_n$  来表达。

#### 四、由最小变形能原理计算层间应力

设叠层复合材料梁的上下两盖板为金属材料, 而中心部分为木材这正交各向异性材料, 以  $x$  与  $y$  轴为弹性主方向,  $x$  轴系沿木材纤维的方向,  $E_1$  是沿纤维方向的弹性系数,  $E_2$  为与纤维垂直方向的弹性系数,  $\mu_{12}$  与  $\mu_{21}$  各为相应的布桑系数, 并且  $E_2\mu_{12} = E_1\mu_{21}$ ,  $G_1$  是年轮层的剪切模量。由于上下盖板的应力分量只各差一正负号, 故两者的变形能相等。于是整个系统的变形能为:

$$\begin{aligned} U = & 2 \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\mu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \right\} b dx dy \\ & + \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma'_x{}^2}{E_1} + \frac{\sigma'_y{}^2}{E_2} \right) - \frac{\mu_{21}}{E_2} \sigma'_x \sigma'_y + \frac{1}{2G_1} \tau'_{xy}{}^2 \right\} b dx dy \end{aligned} \quad (4.1)$$

由最小变形能原理, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_n} = & 2 \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \frac{1}{E_1} \left[ \sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial a_n} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial a_n} - \mu \left( \sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial a_n} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial a_n} \right) \right] + \frac{\tau_{xy}}{G} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial a_n} \right\} b dx dy \\ & + \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left\{ \frac{\sigma'_x}{E_1} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial a_n} + \frac{\sigma'_y}{E_2} \frac{\partial \sigma'_y}{\partial a_n} - \frac{\mu_{21}}{E_1} \left( \sigma'_x \frac{\partial \sigma'_x}{\partial a_n} + \sigma'_y \frac{\partial \sigma'_y}{\partial a_n} \right) + \frac{\tau'_{xy}}{G_1} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial a_n} \right\} b dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

将应力分量代入上式, 经整理后得到:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi^2} \frac{a_n}{n^2} \left\{ \frac{1}{E} \left[ 1 + 12 \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] + \frac{1}{E_1} \frac{h}{h_1} 6 \left( 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{h^4}{l^4} \cdot \frac{\pi^2}{35} a_n n^2 \left\{ \frac{2}{E} \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( 13 \frac{kl}{\pi h} - \frac{11}{3} \right) \right] + \frac{1}{E_2} \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{23}{48} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 3 + 17 \frac{kl}{\pi h_1} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^2}{l^2} a_n \left\{ -\frac{2}{5G} \left[ \frac{2}{3} - \frac{kl}{\pi h} \left( 1 - 6 \frac{kl}{\pi h} \right) \right] + \frac{4\mu}{5E} \left[ 6 \frac{kl}{\pi h} \left( 1 - \frac{kl}{\pi h} \right) - \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{5G_1} \frac{h_1}{h} \left[ 1 \right. \right. \\
& + \left. \frac{4kl}{\pi h_1} \left( 1 + \frac{6kl}{\pi h_1} \right) \right] - 2 \frac{\mu_{21}}{E_2} \frac{h_1}{h} \cdot \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \left( 7 + 12 \frac{kl}{\pi h_1} \right) \right] \right\} + \frac{4}{E} \frac{h}{\pi l} \sigma^* \frac{\cos n\pi}{n} \\
& + \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\cos n\pi}{n} \left\{ \frac{4}{E} \left[ 1 + 12 \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] + \frac{24}{E_1} \frac{h}{h_1} \left( 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 \right\} \sum_{n=1} a_n \cos n\pi = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

方程(4.3)可用以解  $a_n$ , 并可简写为:

$$a_n = -\frac{Cn \cos n\pi}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} \tag{4.4}$$

式中的

$$p^2 = \frac{H}{F} \quad 2\eta = \frac{h^2 N}{l^2 F} \quad C = \frac{T}{F} \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{E} \left[ 1 + 12 \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] + \frac{1}{E_1} \frac{h}{h_1} 6 \left( 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 \right\} \\
N &= \frac{2}{5G} \left[ \frac{2}{3} - \frac{kl}{\pi h} \left( 1 - 6 \frac{kl}{\pi h} \right) \right] + \frac{4\mu}{5E} \left[ 6 \frac{kl}{\pi h} \left( 1 - \frac{kl}{\pi h} \right) - \frac{2}{3} \right] + \frac{h_1}{5G_1 h} \\
&\quad \cdot \left[ 1 + \frac{4kl}{\pi h_1} \left( 1 + \frac{6kl}{\pi h_1} \right) \right] - \frac{2}{5} \frac{\mu_{21}}{E_2} \frac{h_1}{h} \left[ 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \left( 7 + 12 \frac{kl}{\pi h_1} \right) \right] \\
T &= \frac{1}{E} \frac{h}{\pi l} 4\sigma^* + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1} a_n \cos n\pi \left\{ \frac{4}{E} \left[ 1 + 12 \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{24h}{E_1 h_1} \left( 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 \right\} \\
F &= \frac{h^4}{l^4} \frac{\pi^2}{35} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( 13 \frac{kl}{\pi h} - \frac{11}{3} \right) \right] + \frac{1}{E_2} \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{23}{48} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 3 + 17 \frac{kl}{\pi h_1} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

如果盖板与中心部分为同一材料, 并且是各向同性材料, 则  $E = E_1 = E_2$ ,  $G = G_1 = \frac{E}{2(1+\mu)}$

$\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$ . 这叠层复合材料梁, 就成为一普通的各向同性材料梁. 于是, (4.5)式将成为:

$$\left. \begin{aligned}
p^2 &= \frac{\frac{2}{\pi^2} \left\{ \left[ 1 + 12 \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] + 6 \frac{h}{h_1} \left( 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 \right\}}{\frac{h^4}{l^4} \cdot \frac{\pi^2}{35} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( 13 \frac{kl}{\pi h} - \frac{11}{3} \right) \right] + \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{23}{48} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 3 + 17 \frac{kl}{\pi h_1} \right) \right] \right\}} \\
2\eta &= \frac{h^2}{l^2} \cdot \frac{\pi^2}{35} \left\{ \frac{4}{5} \left[ \frac{2}{3} - \frac{kl}{\pi h} \left( 1 - 6 \frac{kl}{\pi h} \right) \right] + \frac{2}{5} \frac{h_1}{h} \left[ 1 + \frac{4kl}{\pi h_1} \left( 1 + \frac{6kl}{\pi h_1} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \left\{ 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( 13 \frac{kl}{\pi h} - \frac{11}{3} \right) \right] + \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{23}{48} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 3 + 17 \frac{kl}{\pi h_1} \right) \right] \right\} \right. \\
C &= \frac{\frac{4h}{\pi l} \sigma^* + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1} a_n \cos n\pi \left\{ 4 \left[ 1 + 12 \left( -\frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] + 24 \frac{h}{h_1} \left( 1 + \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 \right\}}{\frac{h^4}{l^4} \cdot \frac{\pi^2}{35} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( 13 \frac{kl}{\pi h} - \frac{11}{3} \right) \right] + \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{23}{48} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 3 + 17 \frac{kl}{\pi h_1} \right) \right] \right\}}
\end{aligned} \right\} \tag{4.6}$$

在(4.6)式中并不包含弹性常数,正如所预料及的,对于一各向同性材料梁(图1),应力的分布是与梁的弹性常数无关的。

由算式(4.4)及(1.1),得剪应力 $\tau_0$ 为:

$$\tau_0 = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} \quad (4.7)$$

以上这级数可以求和,对于所讨论的叠层复合材料梁,  $p > \eta$  并且  $\beta\pi$  是个较大值,由附录中的级数和(A-6),得:

$$\tau_0 = -\frac{C\pi}{4\beta\gamma \sinh\pi\beta} \left\{ \sin\pi\gamma \sinh \frac{\pi\beta}{l} x \cos \frac{\pi\gamma}{l} x - \cos\pi\gamma \cosh \frac{\pi\beta}{l} x \sin \frac{\pi\gamma}{l} x \right\}$$

式中的  $\beta = \sqrt{(p+\eta)/2}$ ,  $\gamma = \sqrt{(p-\eta)/2}$  (4.8)

其实,级数(4.7)与以下这梁的挠度曲线相同.梁的两端为铰支并为弹性地基所支承.在梁的两端作用轴向拉力 $P$ ,并在其右端作用力偶(反时针方向) $M_0$ ,以梁的左端为原点,以正弦级数表示这梁的挠度曲线,所得的结果与级数(4.7)的形式相同.因而,这两问题在数学上是相似的。

在盖板的端部,由于  $\sinh \frac{\pi\beta}{l} x = \cosh \frac{\pi\beta}{l} x$ , (4.8)式简化为:

$$\tau_0 = \frac{C\pi}{4\beta\gamma} \cdot \frac{\sinh \frac{\pi\beta}{l} x}{\sinh\pi\beta} \sin\pi\gamma \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (4.9)$$

由方程(2.9)及(4.8),正应力 $\sigma_0$ 为:

$$\sigma_0 = k \frac{l}{\pi} \cdot \frac{d\tau_0}{dx} = k \frac{C\pi}{4\beta\gamma} \cdot \frac{1}{\sinh\pi\beta} \left\{ \cosh \frac{\pi\beta}{l} x \cos \frac{\pi\gamma}{l} x (\beta \sin\pi\gamma - \gamma \cos\pi\gamma) - \sinh \frac{\pi\beta}{l} x \sin \frac{\pi\gamma}{l} x (\gamma \sin\pi\gamma + \beta \cos\pi\gamma) \right\} \quad (4.10)$$

在盖板端部,  $\sigma_0$ 可进一步简化为:

$$\sigma_0 = k \frac{C\pi}{4\beta\gamma} \cdot \frac{\sinh \frac{\pi\beta}{l} x}{\sinh\pi\beta} \left\{ \beta \sin\pi\gamma \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - \gamma \cos\pi\gamma \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right\} \quad (4.11)$$

由算式(4.8),盖板所传递的剪力等于:

$$b \int_0^l \tau_0 dx = \frac{Cbh}{4\beta p h/l} \quad (4.12)$$

由图2(a),计算 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 对盖板中点这横截面所产生的弯矩.由算式(4.12)与(2.9)得:

$$M = \frac{h}{2} \int_0^l b \tau_0 dx + b \int_0^l x \sigma_0 dx = \frac{h}{2} \cdot \frac{Cbl}{4p\beta} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h} \right) \quad (4.13)$$

在计算 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 时所用的 $C$ 值,可由(4.5)式中的第三式来计算,而在该式的分子中的级数和,可由(4.4)式及附录中的(A-3)式得到.由于 $\beta\pi$ 是个较大值,得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\pi = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} = -C \left( \frac{\pi}{4\beta p} - \frac{1}{2p^2} \right) \quad (4.14)$$

将这级数和代入(4.5)式的第三式,即可计算 $C$ 值.于是可进而计算 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ .

## 五、数值例题

数值例题1 设上下两盖板为硬铝, 它的  $E=7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $G=2.69 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu=0.3$ , 中心部分为松木,  $E_1=10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_2=0.042 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $G_1=0.075 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu_{21}=0.01$ .  $h_1=6h$ ,  $l/(2h+h_1)=l/(8h)=4$ .

由算式(2.8c), 得:  $k=0.28696 \pi h/l=0.028172$ .

于是  $kl/(\pi h)=0.28696$ ,  $kl/(\pi h_1)=0.28696/6=0.047827$ .

由算式(4.5),

$$p^2=314.75, \quad p=17.741, \quad 2\eta=20.389, \quad \eta=10.195;$$

$$\beta=\sqrt{(17.741+10.195)/2}=3.7374, \quad \gamma=\sqrt{(17.741-10.195)/2}=1.9425$$

现进而计算C值. 由算式(4.14),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\pi = -0.010256C$$

将这级数和代入(4.5)式的第三式, 解得:

$$C=0.83318\sigma^*$$

我们先由上盖板的中点横截面内的轴力与弯矩, 校核以上的计算是否正确, 由算式(4.12)得:

$$\int_0^l \tau_0 b dx = \frac{0.83318\sigma^* b h \times 32}{4 \times 3.7374 \times 17.741} = 0.10053P$$

故得上盖板的中点横截面的轴向压力为:

$$-P + 0.100526P = -0.89947P$$

由算式(4.13), 上盖板这中点横截面的弯矩为:

$$M = \left( \frac{h}{2} - \frac{kl}{\pi} \right) \int_0^l \tau_0 b dx = 0.100526P \left( \frac{h}{2} - 0.28696h \right) = 0.021416Ph$$

对于如图1所示的叠层复合材料杆, 在计算离两端较远的横截面内的应力时, 可将这由两种材料所组成的矩形横截面, 转换成由一种材料所成的I形截面(图2(b)). 然后可按通常的弯曲应力算式作计算. 于是, 杆中点这横截面内的应力为:

$$\sigma_x = \frac{P(h+h_1)}{I_x} y$$

式中的  $I_x = \frac{h^3}{12} b \frac{E_1}{E} + 2 \left[ bh \frac{1}{4} (h+h_1)^2 + \frac{bh^3}{12} \right]$ .

上盖板的轴力  $S_0$  相应为:

$$S_0 = - \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h+h_1}{2}} b \frac{P(h+h_1)b}{I_x} y dy = - \frac{P(h+h_1)^2 bh}{2I_x}$$

式中的

$$I_x = \frac{216bh^3}{12 \times 7} + 2 \left[ \frac{bh^3}{4} \times 49 + \frac{bh^3}{12} \right] = 27.238bh^3$$

于是

$$S_0 = - \frac{P(1+6)^2 bh^3}{2 \times 27.238bh^3} = -0.899475P$$



这结果由上盖板所传递的剪力所计算得的轴向力压完全相同。

按照转换成 I 字形梁以后，作用于上盖板中点横截面内的弯矩为：

$$M_0 = \int_{h_1}^{h+h_1} \frac{b}{2} \sigma_x y dy \left[ y - \frac{1}{2}(h+h_1) \right] = \frac{Pbh^3}{12I_z} (h+h_1) = 0.021416Ph$$

这结果与由盖板所传递的  $\tau_0$  与  $\sigma_0$  所计算的结果相同。这表明以上的计算是可靠的。由算式(4.9)及(4.11)所给的  $\tau_0$  与  $\sigma_0$  各为：

$$\tau_0 = \frac{0.83318\sigma^*\pi}{4 \times 3.7374 \times 1.9425} \frac{\sinh \frac{3.7374\pi}{l} x}{\sinh 3.7374\pi} \sin 1.9425\pi \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$$

$$\sigma_0 = 0.028172 \frac{0.83318\pi\sigma^*}{4 \times 3.7374 \times 1.9425} \cdot \frac{\sinh \frac{3.7374\pi}{l} x}{\sinh 3.7374\pi} \left\{ 3.7374 \times \sin 1.9425 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - 1.9425 \cos 1.9425\pi \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right\}$$

在表1中列出了  $\tau_0$  与  $\sigma_0$  在若干点的数值。

表1

$x$	$l$	$0.99l$	$0.98l$	$0.96l$	$0.94l$	$0.92l$	$0.90l$
$\tau_0$	0	$0.0048882\sigma^*$	$0.0086773\sigma^*$	$0.01362\sigma^*$	$0.015954\sigma^*$	$0.016527\sigma^*$	$0.015966\sigma^*$
$\sigma_0$	$-0.0049326\sigma^*$	$-0.0038633\sigma^*$	$-0.0029577\sigma^*$	$-0.0015585\sigma^*$	$-0.00059705\sigma^*$	$0.00037125\sigma^*$	$0.00043162\sigma^*$
$x$	$0.85l$	$0.80l$	$0.75l$	$0.70l$	$0.65l$	$0.60l$	$0.55l$
$\tau_0$	$0.012280\sigma^*$	$0.0080887\sigma^*$	$0.0047829\sigma^*$	$0.0025724\sigma^*$	$0.0012498\sigma^*$	$0.00053041\sigma^*$	$0.00019551\sigma^*$
$\sigma_0$	$0.0077636\sigma^*$	$0.0006892\sigma^*$	$0.00049175\sigma^*$	$0.00030828\sigma^*$	$0.00017496\sigma^*$	$0.000090268\sigma^*$	$0.000041655\sigma^*$

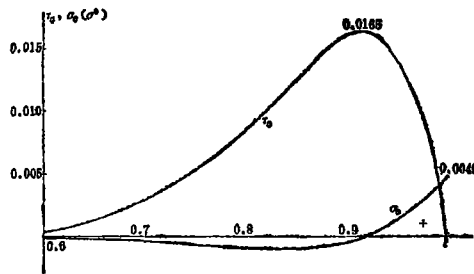


图6 上盖板端的  $\tau_0$  与  $\sigma_0$  曲线  
上下盖板(硬铝)，中心部分(松木)

$$h_1 = 8h, \quad l/h = 32, \quad \sigma^* = \frac{P}{bh}$$

由于由盖板传递给中心部分的剪力约为  $P/10$ ，并且  $\tau_0$  与  $\sigma_0$  分布在较长的长度  $3l/10$  内，故  $\tau_0$  与  $\sigma_0$  均较小。并且，因所得的  $\sigma_0$  在盖板的端部为负，而在图3中所设为压应力，故在上盖板的端部的正应力  $\sigma_0$  为张应力。同样的理由，在下盖板端部的这几个点的  $\sigma_0$  应为压应力。在图6中给出了  $\sigma_0$  与  $\tau_0$  的分布曲线。

数值例题2 设盖板与中心部分为相同的各向同性材料。 $h/h_1 = 1/2, h_1 + 2h = 4h, l/4h = 4$ 。由算式(2.8c)，得：

$$k = \frac{\pi}{80} = 0.03927$$

$$\frac{kl}{\pi h} = \frac{\pi}{80} \cdot \frac{16}{\pi} = 0.2, \quad \frac{kl}{\pi h_1} = 0.1$$

由算式(4.6), 得:

$$p^2 = 38477.9, \quad p = 196.16; \quad 2\eta = 217.57, \quad \eta = 108.79;$$

于是

$$\beta = \sqrt{(196.16 + 108.98)/2} = 12.352, \quad \gamma = \sqrt{(196.16 - 108.98)/2} = 6.6013.$$

由算式(4.14), 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\pi = -0.00031115C$$

由(4.6)式的第三式, 得:

$$C = 94.646\sigma^*$$

先对以上的计算作校核. 由(4.12)式, 上盖板所传递的剪力为:

$$\int_0^l b\tau_0 dx = \frac{94.646\sigma^*bh \times 16}{4 \times 12.352 \times 196.16} = 0.15625P$$

作用在上盖板中点横截面内的轴向压力等于:

$$P - 0.15625P = 0.84375P$$

由材料力学的弯曲应力, 得到上盖板的中点横截面所产生的轴向压力为:

$$\frac{P}{2I_z} bh(h+h_1)^2 = \frac{Ph}{2 \frac{64bh^3}{12}} \times 9h^2 = 0.84375P$$

由 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 的分布, 计算上盖板中点横截面的弯矩. 由算式(4.13), 得:

$$M = \frac{h}{2} \cdot \frac{94.646 \times 16P}{4 \times 196.16 \times 12.352} (1 - 0.4) = 0.046874Ph$$

由材料力学所得的结果为:

$$\frac{Ph^3 \times 3h}{12 \times \frac{64bh^3}{12}} = \frac{3}{64}Ph = 0.046875Ph$$

从以上的校核可知, 所作的分析与计算是正确的. 由算式(4.9)与(4.11),  $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 各为:

$$\tau_0 = \frac{94.646\pi\sigma^*}{4 \times 12.352 \times 6.6023} \cdot \frac{\sinh \frac{12.352\pi}{l} x}{\sinh 12.352\pi} \sin 6.6023\pi \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$\sigma_0 = 0.03927 \frac{94.646\pi\sigma^*}{4 \times 12.352 \times 6.6023} \cdot \frac{\sinh \frac{12.352\pi}{l} x}{\sinh 12.352\pi} \left\{ 12.352 \sin 6.6023\pi \left(1 - \frac{x}{l}\right) - 6.6023 \cos 6.6023\pi \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right\}$$

由以上两式所得的 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 列于表2.

表2

$x$	$l$	$0.99l$	$0.98l$	$0.97l$	$0.96l$	$0.94l$	$0.92l$	$0.90l$	$0.85l$
$\tau_0$	0	$0.12734\sigma^*$	$0.16907\sigma^*$	$0.16586\sigma^*$	$0.14241\sigma^*$	$0.084194\sigma^*$	$0.040721\sigma^*$	$0.016481\sigma^*$	$0.00008\sigma^*$
$\sigma_0$	$-0.23633\sigma^*$	$-0.095115\sigma^*$	$-0.017525\sigma^*$	$0.020504\sigma^*$	$0.035288\sigma^*$	$0.033434\sigma^*$	$0.02069\sigma^*$	$0.010348\sigma^*$	$0.0007401\sigma^*$

在图7中绘出 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 的分布曲线. 在盖板端部的 $\sigma_0$ 为负, 这表明对于这三点 ( $x=l, 0.99l, 0.98l$ )  $\sigma_0$ 应与图3和图5所示的相反. 换言之, 对于上盖板端的这三点,  $\sigma_0$ 为张应力 (图7). 对于下盖板这三点的 $\sigma_0$ 为压应力.  $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 在盖板端部的分布长度为  $0.15l$ , 或  $2.4h$ , 等于横截面高度  $4h$  的  $0.6$  倍. 对于离端点大于这长度的横截面, 应力的分布为材料力学所给的弯曲应力. 这提供了一个实例以证实 Saint-Venant 原理, 从这两个数值例子可以看出, 对于一各向同性材料的梁, 其边缘效应比叠层复合材料梁更为局部化. (待续)

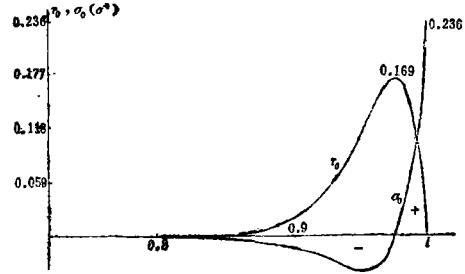


图7 上盖板端的 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 曲线  
盖板与中心部分为相同的各向同性材料

$$h_1=2h, \quad l/h=16, \quad \sigma^*=\frac{P}{bh}$$

附 录: 两个级数的和

对于  $\eta < p$  这情形

$$I. \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n^2 + 2\eta n^2 + p^2} = \frac{1}{2i\sqrt{p^2 - \eta^2}} \sum_{n=1} \left[ \frac{1}{n^2 + (\eta - i\sqrt{p^2 - \eta^2})} - \frac{1}{n^2 + (\eta + i\sqrt{p^2 - \eta^2})} \right] \quad (A-1)$$

用复变函数留数定理的计算结果:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi}{2z} \coth \pi z - \frac{1}{2z^2} \quad (A-2)$$

用(A-2)式计算(A-1)式中的两级数和, 使等式两边的实数分相等, 得到:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2 + 2\eta n^2 + p^2} = \frac{1}{4p\sqrt{p^2 - \eta^2}} \cdot \frac{\gamma \sinh 2\pi\beta + \beta \sin 2\pi\gamma}{\sinh^2 \pi\beta + \sin^2 \pi\gamma} - \frac{1}{2p^2} \quad (A-3)$$

式中的  $\beta = \sqrt{(p+\eta)/2}, \quad \gamma = \sqrt{(p-\eta)/2}.$

$$I. \quad \sum_{n=1} \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 + 2\eta n^2 + p^2} = \frac{1}{2i\sqrt{p^2 - \eta^2}} \sum_{n=1} \left[ \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 + (\eta - i\sqrt{p^2 - \eta^2})} - \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 + (\eta + i\sqrt{p^2 - \eta^2})} \right] \quad (A-4)$$

用复变函数留数定理的计算结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 + z^2} = (-1)^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh \frac{\pi z}{l} x}{\sinh \pi z} \quad (\text{A-5})$$

以(A-5)式计算(A-4)式中的两级数和, 得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{p^2 - \eta^2(\sinh^2 \pi\beta + \sin^2 \pi\gamma)}} \left\{ \cosh \frac{\pi\beta}{l} x \sin \frac{\pi\gamma}{l} x \right. \\ \left. \cdot \sinh \pi\beta \cos \pi\gamma - \sinh \frac{\pi\beta}{l} x \cos \frac{\pi\gamma}{l} x \cosh \pi\beta \sin \pi\gamma \right\} \quad (\text{A-6})$$

### 参 考 文 献

- [1] Goland, M. and E. Reissner, The stresses in cemented joints. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1, (1944).
- [2] Timoshenko, S., The Approximate Solution of Two Dimensional Problems in Elasticity, *Collected Papers*, (1953).
- [3] 张福范, 拉伸杆的贴片所传递的应力, *上海力学*, 3(1983).
- [4] 张福范, 双金属条整温器的接触热应力, *应用数学和力学*, 4, 3(1983).

## Interlaminar Stresses of a Laminated Composite Bar under Bending ( I )

Chang Fo-van

(Tsinghua University, Beijing)

### Abstract

A laminated composite bar of rectangular cross section consists of a middle portion of one material as well as upper and lower identical cover plates of another material. Uniformly distributed compressive and tensile forces each equal to  $p$  are acting respectively at the ends of the upper and lower cover plates. They form two end couples to cause the bar to bend. Interlaminar stresses are to be found showing how the forces are transmitted through the glued surfaces.